

CONSTRUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA DE UNA GRÁFICA,
CONSIDERANDO LA INTERPRETACIÓN GLOBAL DE LAS REPRESENTACIONES
GRÁFICA, NUMÉRICA Y ALGEBRAICA

Alma Alicia Benítez Pérez
C.E.C.y T. 11, “Wilfrido Massieu” IPN, México D.F.
abenitez@ipn.mx

Resumen

La Interpretación Global (Duval, 1988) fomenta y fortalece la exploración de las representaciones gráficas y numéricas para identificar la organización de las relaciones al interior de las representaciones, así como sus relaciones exteriores, permitiendo establecer conexiones entre las representaciones gráfica, numérica y algebraica. La identificación de la información contribuye a interpretar el contenido de las representaciones, beneficiando la tarea de construir la expresión algebraica a partir de su gráfica.

Se implementó la Interpretación Global a un grupo de 40 alumnos, los cuales cursaban la asignatura de álgebra (primer semestre de bachillerato), siendo el propósito del estudio, analizar las estrategias que el alumno emplea cuando la tarea solicita la construcción de la expresión algebraica de una gráfica (recta, parábola y la introducción al trazo cúbico). Durante la experiencia los alumnos contaron con el apoyo del software Cabri Geometry para realizar las tareas diseñadas.

Marco Teórico

Duval (1999), menciona que la visualización “*Es producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permita observarlos como si estuviera realmente delante de los ojos*” (Pág. 10) [5], se considera entonces que la visualización se basa sobre la producción de una representación semiótica, donde se identifique de manera directa lo que está representado.

La visualización matemática no es un acto de aprehensión simultánea en el campo de la percepción, es una actividad cognitiva intencional que produce una representación en una superficie de dos dimensiones (pantalla y papel), la cual muestra las relaciones entre las unidades que componen a las figuras, eso quiere decir que la visualización matemática expone únicamente objetos, los cuales se hacen “ver” a través de las organizaciones de las relaciones que tienen las unidades de las figuras. Estas unidades se conectan, bi-dimensionalmente, porque se requiere la organización de al menos dos dimensiones para establecerlas.

Las representaciones gráfica y numérica es un de tipo visualización en matemática, particularmente necesarias en la investigación a realizar. Ambas representaciones poseen organizaciones visuales bi-dimensional; el cuadrículado del plano en líneas para la gráfica y la distribución en columnas para la tabla.

La representación gráfica posee sus propias leyes de organización (Bertin,1968), y cuyo funcionamiento se basa en la relación de dos figuras; figura fondo referida al plano cartesiano y figura-forma al trazo. Duval (1994) menciona tres tratamientos relacionados con las figuras:

“1.- *Un señalamiento de posiciones por selección de los puntos donde la figura forma coincide con los puntos de intersección del campo cuadrículado. Ello permite una lectura de números.*”

2.- Una *aprehensión global de los valores visuales de la figura forma (trazo de rectas, trazo de curvas, inflexión,...)* Es esta *aprehensión perceptiva global que da a la representación gráfica un poder intuitivo o heurístico. Este tipo de tratamiento es esencialmente cualitativo.*

3.- *Una modificación de la figura forma cambia la aprehensión global de los valores visuales en juego, con los grados de libertad que da la figura-fondo. Podemos modificar la figura forma no tomando por ejemplo, la misma unidad de graduación para los dos ejes. Podemos también modificar la figura forma, efectuando un “zoom” en una de sus partes, es el equivalente de dividir localmente la unidad de graduación y hacerse la cuadrícula más fina”* Pág. 7, [4]

El primer tratamiento señala el puntaje como instrumento principal para explorar el contenido de la gráfica, el cual consiste en la lectura de las coordenadas de un punto en la gráfica, o bien para situar una posición a partir de un par de números dados.

El tercer tratamiento consiste en recobrar la ecuación correspondiente a la forma de la figura, basado en procedimientos de cálculo, de los números leídos de la gráfica. Particularmente Duval menciona el hecho de estas conversiones son efectuadas cognitivamente a ciegas, pues es un trabajo incierto y difícil, si únicamente su enfoque está en ciertas parejas de números ubicados en la figura forma. Ambos tratamientos 1 y 3 respectivamente, basan su análisis exclusivamente en la figura-fondo de la representación gráfica, dejando de lado la figura-forma.

El segundo tratamiento, consiste en identificar los distintos valores visuales de la forma y la orientación de la gráfica, para establecer relaciones con los valores categóricos de la expresión algebraica (Duval, 1988). Este tratamiento es esencialmente cualitativo, para fortalecer la aprehensión global del contenido de la representación gráfica.

La interpretación global concentra su atención en la figura-forma, y descuida la figura-fondo, el cual se considera un marco estable, sin embargo, la figura-fondo es un aspecto relevante para explorar el contenido de la representación, ya que la modificación de la figura-fondo, al dividir localmente la unidad de graduación origina un cambio en la figura-forma. Actividad que altera el comportamiento del trazo, y por tanto la identificación de los valores visuales.

Al respecto, Duval menciona que el punto central y decisivo en el aprendizaje de las representaciones gráficas es la discriminación de los valores visuales y su coordinación con los valores categóricos de la expresión algebraica, atendiendo la discriminación de los valores visuales con relación a la figura-fondo. Para ello las actividades diseñadas deben permitir explorar las variaciones de una sola variable y mantener constantes los valores de las otras variables, con la finalidad de que los valores de las distintas variables visuales se unifiquen para ser exploradas como única figura forma/fondo.

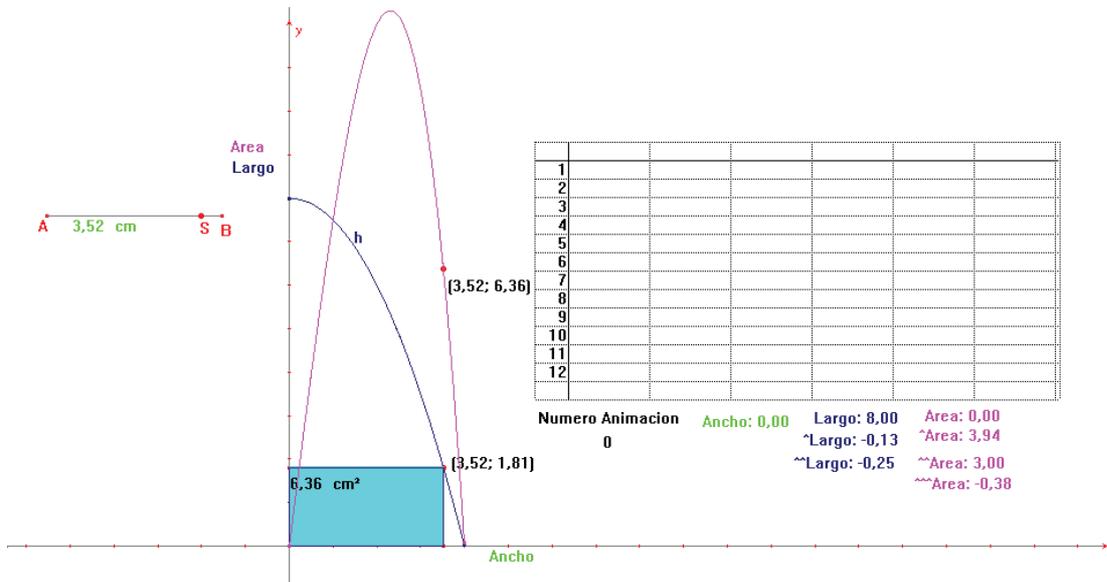
Metodología

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones para explorar el contenido de las representaciones gráfica, numérica y algebraica, empleando tratamientos que permitan evidenciar su riqueza, dicha actividad beneficia la tarea de construir su expresión algebraica. Para ello se diseñó una dinámica que apoyara el desarrollo con este tipo de actividad.

La actividad se realizó en el contexto de un curso de álgebra. Los estudiantes no habían participado anteriormente en esta forma de trabajo, modificando la práctica en el salón de

clase, es decir, se impulsó la comunicación de ideas y la continua participación en clase. A continuación se presenta el desarrollo de la Experiencia Educativa:

1. Fase de introducción. Los alumnos participantes provenían de diversas centros escolares (secundarias), por tal circunstancia se asumió que no se contaba con un ambiente adecuado para llevar a cabo la dinámica en el aula, considerando que los alumnos estaban habituados a la exposición de conceptos por parte del profesor. Ante esta situación, la primera semana de trabajo, se introdujo a los estudiantes a través de conversaciones por parte del maestro, a la dinámica a desarrollar en el aula, es decir, trabajo en equipo y discusión en el grupo, teniendo el profesor el papel de coordinador del proceso.
2. Dinámica de trabajo en el aula. La clase se organizó en equipos de 4 a 5 integrantes, formando un total de 6 equipos por grupo. Se entregó al inicio de la sesión una actividad diseñada por el profesor, para trabajarla de manera colectiva, mencionado que un integrante del equipo sería el encargado de recolectar toda la información que se obtuviera durante el proceso de solución, mientras el profesor participaba con los equipos como espectador y para proporcionar información. Una vez terminada la tarea, los equipos presentaban un reporte escrito. El profesor, de acuerdo con las observaciones realizadas a los equipos, seleccionaba un equipo para exponer su trabajo al grupo. El criterio de selección consideraba los diferentes puntos de vista, favoreciendo la discusión en el grupo, para aclarar dudas y superar posibles dificultades. Los reportes de los equipos se entregaban a la siguiente sesión, presentando diferentes anotaciones, para que el alumno de manera individual revisara el trabajo y lo corrigiera (si era el caso), en una carpeta para ser evaluada al final del departamental. En determinados momentos, durante la experiencia educativa, el maestro expuso al grupo algunos tópicos que ocasionaban dificultad, por ejemplo, identificar las diferentes variables visuales que componen a la recta y a la parábola, para ser vinculadas con las representaciones algebraica y numérica. Cuando el profesor realizó esta experiencia, los alumnos presentaron mayor interés para explorar los trazos. Esta situación, se debe posiblemente a la necesidad del estudiante para que el profesor intervenga en determinados momentos del proceso. Durante las sesiones que se realizaron en la sala microsoft, se continuó con la misma dinámica que en el salón de clase.
3. Después de concluir la experiencia educativa, se solicitó la participación de 6 alumnos para formar 3 equipos. La actividad se llevó a cabo en la sala de Cómputo (Microsoft), y cuyas sesiones se realizaron extraclases, teniendo la duración de 2 horas. Se proporcionó la Tarea, en cuyo texto se menciona brevemente la situación, y se exponen las indicaciones básicas para explorar el archivo (Cabri-Geometry), el cual muestra las gráficas que generan los anchos, largos y áreas de diferentes rectángulos, así mismo se presenta la tabla numérica vacía, para que los equipos desarrollen el tratamiento que consideren pertinente. A continuación se muestra una de las actividades realizadas por los equipos:



En el primer cuadrante aparece la gráfica “h”. Esta gráfica y los ejes cartesianos forman una región, dentro de esta se construyen varios rectángulos, a través de mover el punto S que pertenece al segmento \overline{AB}

¿ Determina la expresión algebraica que permite generar el ancho y largo para estos rectángulos?

Una de las siguientes expresiones algebraica representa el comportamiento de las áreas.

¿Elige la que consideres cumpla con las condiciones de los rectángulos?

$$A = \frac{1}{2}x^3 + d$$

$$A = -\frac{1}{2}x^3 + cx$$

$$A = ax^3 + 3x$$

$$A = ax^3 + 8x$$

$$A = 8x$$

$$A = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx$$

Resultados

Los equipos realizaron interpretaciones de tipo global y puntual a la información que se identificó en las representaciones gráfica, numérica y algebraica.

La interpretación global se utilizó en la **representación gráfica**, para explorar el contenido del trazo a través de tratamientos cualitativos, concediendo la identificación de variables y características visuales. La interpretación global de las variables visuales otorgó establecer conexiones con las variables categóricas de la representación algebraica, de las cuales se mencionan las siguientes:

- Término independiente para los polinomios de grado dos, tres y cuatro
- Coeficientes lineal y cuadrático para el polinomio de grado dos y
- Los coeficientes cúbico y cuadrático para el polinomio cúbico.

Dicha interpretación permitió: considerar estrategias, establecer conjeturas, argumentar afirmaciones y validar resultados.

Por otra parte, la interpretación puntual se aplicó a la representación gráfica, a través de tratamientos cuantitativos, cuya información se basó en la elección de parejas ordenadas para verificar el tipo de trazo que se exploraba. Los equipos no establecieron conexiones con las representaciones numérica y algebraica, sino con la misma representación gráfica para determinar el tipo de trazo (Cúbico y Cuarto grado).

Respecto a la **representación numérica**, la interpretación global se realizó con la información identificada a través de tratamientos cuantitativos, específicamente para reconocer la segunda y tercera diferencia, lo cual permitió determinar el tipo de trazo y el valor numérico de los coeficientes cuadrático y cúbico para los polinomios de grado dos y tres respectivamente, estableciendo conexiones con la representación algebraica.

La interpretación puntual se aplicó a las parejas ordenadas que fueron elegidas para identificar el valor numérico del término lineal de los polinomios cuadrático y cúbico.

Las interpretaciones que se aplicaron a la información identificada en la representación numérica contribuyó a establecer conexiones con otras representaciones, permitiendo la aplicación de estrategias para continuar explorando la situación.

El contenido de la **representación algebraica** se exploró por tratamientos cualitativos y cuantitativos, cuya información se interpretó global y puntualmente.

La interpretación global se realizó con la identificación de las variables categórica en la expresión algebraica, para establecer las conexiones con las variables y características visuales del trazo.

La interpretación puntual en la representación algebraica, se llevó a cabo por procedimientos algebraicos, es decir, los equipos eligieron parejas ordenadas de la representación numérica, para sustituirlos en las expresiones algebraicas que consideraban las indicadas, posteriormente llevaron a cabo procedimientos algebraicos para determinar el valor numérico del coeficiente que se exploraba. Estableciendo la conexión con la representación numérica.

Las interpretaciones que los equipos formularon a la información identificada en las representaciones algebraica, numérica o gráfica, permitió establecer conexiones entre las representaciones, concediendo a los equipos tener un panorama global y específico de la situación.

Durante el desarrollo de las tareas los equipos emplearon la interpretación global en las 3 representaciones, mientras que la interpretación puntual se aplicó con mayor frecuencia en la representación numérica, siendo mínimo el desempeño en la representación gráfica.

En este sentido, Duval ha mencionado, que la identificación de parejas ordenadas consiste en recobrar la ecuación correspondiente a la forma de la figura, basado en procedimientos de cálculo, de los números leídos de la gráfica (para el caso en la representación numérica).

Exponiendo el hecho de que estas conversiones son efectuadas cognitivamente a ciegas, pues es un trabajo incierto y difícil, si únicamente su enfoque está en ciertas parejas de números ubicados en la figura forma. Sin embargo, los equipos desarrollaron de manera simultánea tanto la aprehensión global como la puntual, obteniendo información para establecer conexiones con otras representaciones, permitiendo realizar conjeturas, misma que fueron aceptadas o rechazadas de acuerdo con los argumentos que los equipos emplearon, los cuales se justificaron con la información identificada.

Bibliografía

- Bertin, J. (1968). *Gráfica (Representación)*. Volumen 7 de la Encyclopoedia Universalis. Pp. 955-964. Editada en París, Francia.
- Dugdale, S. (1993). *Functions and Graphs Perspectives on Student Thinking*. In T.A. Romberg, E. Fennema & T.P. Carpenter (Eds.) Integrating Research on the Graphical Representation of Functions. Pp. 101-130. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Duval, R. (1988). *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988)235-253. Versión en español de Blanca M. Parra. Antología en Educación Matemática. DME.CINVESTAV. 1993.
- Duval, R. (1994). *Les Représentations Graphiques: Fonctionnement et Conditions de leur Apprentissages*. C.I.E.A.E.M., Toulouse, France. Pp. 3-14.
- Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization : Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México, Vol. I, Pp. 3-26
- Duval, R. (2003). "Ver" *En Matemáticas*. En Eugenio Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, Aspectos de Investigación Educativa*. Fondo de Cultura Económica. En prensa.
- Goldin, G. & Kaput, J. (1996). *A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics*. Theories of Mathematical Learning. Paul Cobb, Gerald A. Goldin & Brian Greer. Pp. 397-430. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers Nahwah, New Jersey.
- Roth W-M (1999). *Professionals Read Graphs: A Semiotic Analysis*. Journal for Research in Mathematics Education. En prensa.
- Yerushalmy, M. & Schwartz, J. (1993). *Seizing the Oportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting*. In T.A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.). Integrating Research on the Graphical Representation fo Functions. Pp. 57-68. Hillsdale, Nj: Erlbaum.