

LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

S. R. Velázquez, C. Flores, G. García, H. Hesiquio, E. Gómez y M. Gutiérrez
Centro de Investigación y Desarrollo Educativo y Universidad Autónoma de Guerrero.

sramiro@galeana.uagfm.mx

Resumen

En este artículo se describe la realización de un taller cuyo diseño responde al marco de una investigación en proceso, que explora los saberes que sobre el concepto de función tienen los alumnos de educación media superior (EMS) y pretende analizar los efectos que presenta la puesta en escena de situaciones didácticas sobre la formación del concepto de función. En la primera etapa de la investigación se están explorando dichos saberes en 30 alumnos de EMS y 10 de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas en Acapulco, Guerrero, México. También se han diseñado situaciones didácticas para abordar este concepto, a fin de que se instrumenten en la escuela. Con estos avances se estructuró el taller para interesados en este campo y realizado en Relme 17 con la participación de siete profesores.

Introducción

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa constatan que los alumnos no tienen una comprensión cabal de este concepto que es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias. Por su parte los profesores tienen dificultades para hacer una representación coordinada de este concepto, en varias cuestiones se guían por la forma y no por el contenido y hacen una interpretación inadecuada de las producciones de los alumnos en esta temática (Hitt, 1996).

Se considera que es posible diseñar e instrumentar situaciones didácticas (Brousseau, 1983) en las que los alumnos realicen diversas tareas matemáticas para que formen el concepto de función. De modo que sean capaces de realizar una representación coordinada de este concepto (Duval, 1998), modelen diversos fenómenos y resuelvan problemas en los que se reflejen las 4 categorías que se consideran necesarias para la comprensión de un concepto. Estas son la identificación, discriminación, generalización y síntesis (Sierpinska, 1991).

En esta presentación se propone un taller dirigido a estudiantes y profesores interesados en la Matemática Educativa, en el que se analicen las dificultades y errores asociados de los alumnos al abordar estos contenidos y diversas situaciones didácticas que pueden promover la formación del concepto de función.

Antecedentes de la investigación en curso

Descripción del problema

El problema de investigación consiste en que los alumnos del nivel medio superior no tienen una comprensión cabal del concepto de función que es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias. Existen diversas investigaciones que constatan este problema, a continuación se describen algunas de las más representativas.

Duval (1998) afirma “...se hace énfasis en que el conocimiento matemático se puede representar bajo diversas formas semióticas. Pero muy pocos estudios se centran en la operación de cambiar la forma semiótica mediante la cual se representa un conocimiento. Sin embargo esta es una operación cognitiva básica”. En esta afirmación se refleja que la falta de una representación coordinada de contenidos matemáticos, particularmente, en la formación del concepto de función dificulta su comprensión y por ende los alumnos no desarrollan la habilidad de visualizar. La representación coordinada de un concepto está relacionada con la habilidad de visualizar y consiste en cambiar el registro de cualquier representación semiótica.

Cantoral y Montiel (2002) en un trabajo sobre exploración del concepto de función en alumnos y profesores afirman que “... el tratamiento del concepto de función ha provocado que el alumno no desarrolle la habilidad de transitar por las distintas representaciones del concepto, ni disponga de las herramientas o el lenguaje para abordar problemas gráficos donde necesite el análisis numérico y algebraico, o viceversa”. En dicho trabajo se expresan algunas dificultades y errores asociados de los alumnos al abordar este contenido, como los siguientes: Considera que una gráfica cartesiana que cambia de pendiente en determinados intervalos no corresponde a una función, ve varias funciones en funciones discontinuas, asigna una función a cada par ordenado y representa y une los puntos en el plano en el orden en que están en una tabla.

Por nuestra parte en un estudio sobre el referido concepto en alumnos de EMS y de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas, se constata que tienen dificultades para articular la representación gráfica de una función con un contexto real. Al plantear actividades con este fin los alumnos se guían por la forma y no por el contenido como se ve en la fig. 1. Esta situación refleja una falta de significados del concepto ya que éste tiene grandes potencialidades para la modelación de fenómenos del medio físico y social.

Considerando el recipiente cuyo dibujo aparece, grafica la expresión que representa el llenado de un líquido donde la variable independiente representa la altura del líquido y la variable dependiente el área que ocupa dicho líquido.

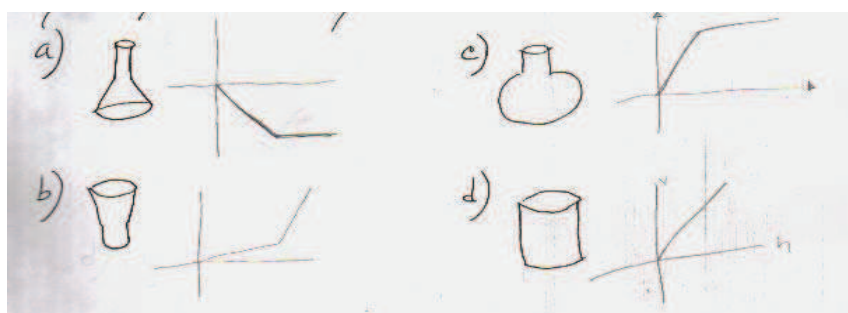


Fig. 1

Además tienen dificultades en los subconceptos dominio, rango e imagen. De igual forma sucede al identificar una función dada la gráfica, como se muestra a continuación.



Algunos aspectos del marco teórico conceptual

La formación de conceptos es una categoría esencial en la enseñanza aprendizaje de la matemática, ya que los conceptos constituyen formas fundamentales con las que opera y se desarrolla el pensamiento matemático. En especial la comprensión del concepto de función es fundamental para la construcción de conocimiento matemático y para desempeñarse con éxito en las diferentes ciencias, debido a que por lo general en toda actividad matemática se establecen relaciones, correspondencias y funciones. Sobre la base de estas ideas la formación del concepto de función debe realizarse como un proceso organizado y sostenido que refleje los objetivos a lograr, los contenidos y el tratamiento didáctico a lo largo de las diferentes etapas escolares.

En el ámbito de la Matemática Educativa se ha construido un proceso de formación de conceptos (Arango, 1993) que comprende tres fases principales, como se describen a continuación: la primera fase es de familiarización con el concepto, que comprende ejercicios preparatorios sobre situaciones y formas de trabajo referentes al contenido correspondiente. En esta fase se incluye el análisis de contenidos ya apropiados como los de variación proporcional directa e inversa, en conexión con ideas interesantes como las de Galileo que expresaba sus relaciones funcionales con palabras y en lenguaje de proporciones. La segunda fase corresponde a la formación del concepto y abarca el desarrollo de las funciones didácticas⁴ aseguramiento del nivel de partida, motivación, orientación hacia el objetivo e introducción del nuevo contenido. En esta fase se desarrolla la representación coordinada del concepto. La tercera fase corresponde a la fijación del concepto en la que se realizan diversas acciones de profundización que amplíen la articulación de los diferentes registros de representación.

Por otra parte es necesario insistir en que en la formación del concepto de función se trabaje ampliamente su representación coordinada (Duval, 1998), que como ya se afirmó en líneas anteriores consiste en cambiar el registro de cualquier representación semiótica. A los signos, gráficos o notaciones que usamos para representar objetos matemáticos se les denominan representaciones externas, que a su vez tienen un equivalente en la mente de los sujetos que los emplea y se les conoce como representaciones mentales. Duval (1998) se refiere a estas dos formas de representación y las denomina semióticas y mentales. Las primeras las considera como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema

⁴ Cada actividad que se realiza en una clase o un sistema de clases, tiene una función o tarea didáctica. Las funciones didácticas que se consideran son la motivación, orientación hacia el objetivo, el aseguramiento del nivel de partida, los nuevos contenidos, fijación y control.

de representación. Las representaciones mentales las define como aquellas que cubren el conjunto de imágenes y globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, una situación y sobre lo que les está asociado. En el mismo sentido afirma que las representaciones semióticas son necesarias para fines de comunicación e igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento, desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de las representaciones mentales, en el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas y en la producción de conocimientos.

Otro aspecto a considerar en esta formación consiste en las 4 categorías que son necesarias para la comprensión de un concepto. Estas son la identificación, discriminación, generalización y síntesis (Sierpiska, 1991). Esta educadora afirma que para asimilar un concepto se requiere de la comprensión de ejemplos y contraejemplos del objeto, decir lo que es el objeto y lo que no es, dar cuenta de sus relaciones con otros conceptos y reconocer que estas relaciones son análogas a relaciones que son familiares con aplicaciones. En este sentido se utilizan las referidas categorías, la identificación de un objeto entre otros objetos da como resultado que algo que había sido un antecedente se convierte en el objeto principal de la descripción, lo percibimos como algo digno de interés y estudio. La discriminación consiste en reconocer objetos distintos, notar sus diferencias y sus propiedades relevantes. La generalización conduce a un conocimiento a extenderse al rango de las aplicaciones y finalmente la síntesis es la percepción de relaciones entre hechos como resultados, propiedades y relaciones organizados de una manera consistente. Como se puede ver estas categorías orientan el proceso de formación del concepto de función, asegurando la organización de actividades apropiadas para cada una de ellas.

Una concepción de situaciones didácticas

Una forma de concretar las posiciones teóricas antes expuestas es con el diseño y puesta en escena de situaciones didácticas, en este sentido se estructura una concepción que si bien considera aspectos de la teoría original de las situaciones didácticas (Brousseau, 1983) incorpora otros que las acercan a las condiciones escolares de la región. A continuación se describe brevemente esta concepción.

La escuela como centro expreso para promover el desarrollo intelectual de los alumnos, es un escenario donde de manera sistemática se realiza el proceso de estudio en general y en particular de la matemática. Sobre la base de las posiciones teóricas que se vienen sustentando en este trabajo, estudiar matemática es un proceso organizado y sostenido como fuente constante de tareas y problemas matemáticos. En este sentido un proceso de enseñar y aprender matemática en la escuela, requiere de la participación consciente de estudiantes y profesores en el planteamiento y solución de problemas. Donde se utilicen los diversos medios didáctico-matemáticos, en la producción de saberes que mantengan “vivo” el conocimiento matemático.

Cuando se considera el estudio como el objetivo principal del proceso didáctico, resulta mucho más fácil traspasar al alumno una parte de la responsabilidad matemática asignada hoy día en exclusiva al profesor. Este nuevo reparto de responsabilidades asigna al profesor el papel de “director de estudio”, posibilita que los alumnos reconozcan al profesor como “matemático” y disminuye el riesgo de la “enfermedad didáctica”. Chevallard, Y. (1998).

Un eje rector en este proceso, es el diseño de situaciones didácticas conformadas con series de actividades en las que los alumnos pueden resolver problemas y generar saberes a partir de los recursos cognitivos de que disponen. Las situaciones didácticas que en este trabajo se diseñan, se conciben principalmente, sobre la base de las funciones didácticas enmarcadas en la teoría de la actividad (Leontiev, 1981), los 4 aspectos básicos del proceso de estudiar matemática (Chevallard, 1998) y las fases de la apropiación del conocimiento matemático (Brousseau, 1983).

Funciones Didácticas

La actividad docente es la forma de realización de la actividad cognoscitiva en la escuela, es por tanto una actividad humana dirigida a un fin y organizada en las fases de orientación, ejecución y control. A cada una de estas fases le corresponde una cierta función en el trabajo docente como proceso didáctico, esas son las funciones didácticas. Cada actividad que se realiza en una clase o un sistema de clases, tiene entonces una función o tarea didáctica. Las funciones didácticas que se consideran son la motivación, orientación hacia el objetivo, el aseguramiento del nivel de partida, los nuevos contenidos, fijación y control. Las tres primeras corresponden a la fase de orientación, los nuevos contenidos y la fijación a la de ejecución y el control a la fase del mismo nombre. En la instrumentación de estas funciones didácticas, destaca la formación de conceptos como fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que los conceptos son la forma principal en que opera dicho pensamiento. Como se puede ver estas funciones constituyen una guía para el docente, en el diseño e instrumentación de situaciones didácticas.

Los cuatro aspectos básicos para el estudio de la matemática

Estos aspectos son las cuestiones a las que responde el contenido matemático que se aborda, la unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, las técnicas que se utilizan y el tecnológico-teórico.

Las cuestiones a las que responde el contenido que se aborda consideran las necesidades y problemas que dieron origen a ese conocimiento, la forma de cómo se construyó para ser un conocimiento matemático científico comunicable, así como su transformación en un conocimiento matemático enseñable. En esta transformación se responde a estas preguntas ¿Qué características tiene este contenido para ser un conocimiento enseñable?, ¿Cuáles son las razones para que forme parte del currículo escolar?, ¿Qué potencialidades tiene para desarrollar el pensamiento matemático?.

La unidad del razonamiento deductivo y el pensamiento conjetural, se refleja en la búsqueda y aseguramiento del conocimiento matemático, es decir para el cumplimiento de una tarea matemática se requiere de la exploración y formulación de conjeturas hasta encontrar el conocimiento. A la vez este conocimiento se asegura a base de demostraciones, fundamentos, argumentos y justificaciones. En este proceso de búsqueda y aseguramiento, se ejecuta el trabajo con la técnica que consiste en la instrumentación de procedimientos matemáticos vinculados con el contenido, a partir de las cuales se producen nuevas técnicas y nuevos conocimientos. En este aspecto son relevantes las técnicas y estrategias eficaces en la solución de problemas. Como una base de orientación para los estudiantes, existe una serie de técnicas y estrategias en la solución de problemas. Como técnicas están la lectura analítica, la modelación, el tanteo inteligente, la determinación de problemas auxiliares y la comprobación (Rizo . y Campistrous, 1995). Como estrategias se tiene la analogía, partir del problema resuelto, lugares geométricos y transformaciones geométricas (Polya, 1976).

El aspecto tecnológico-teórico lo conforman los fundamentos, argumentos y explicaciones sobre la tarea que se está realizando de manera que se amplíe su comprensión y se eficiente el proceso de estudio.

Estos aspectos están entrelazados, se dan en unidad y caracterizan el proceso de aprender y enseñar matemática como un proceso de estudio. Cuando las actividades de una situación didáctica se realizan de esta manera, se descubre la naturaleza de la matemática.

Las Fases de la Apropriación del Conocimiento Matemático

Brousseau (1983) establece que las fases de la adquisición del conocimiento matemático son: la acción, formulación, validación e institucionalización. La acción consiste en el planteamiento de la tarea, su comprensión y en las acciones que realiza el alumno para cumplir con las exigencias establecidas. En la formulación se confrontan y analizan los diversos procedimientos y resultados. En la validación se fundamentan los procedimientos y resultados y finalmente, en la fase de institucionalización se expresan los saberes construidos, correctamente, desde el punto de la forma y el contenido.

Algunos resultados de la investigación marco del taller

En esta fase de la investigación se tienen los primeros resultados sobre la exploración de saberes sobre el concepto de función, que muestran dificultades y errores asociados al resolver situaciones relacionadas con este contenido, como se expresa en la descripción del problema. Además se han diseñado situaciones didácticas para abordar los contenidos programáticos referentes a este concepto, sobre la base de las posiciones que se vienen sustentando. Estos resultados preliminares y las situaciones didácticas diseñadas se presentaron en un curso con la participación de 28 estudiantes y profesores de diversas partes del país, en el marco de la VI Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de la Matemática. Así como en un taller en Relme 17 con la asistencia de 7 profesores de diversos países de América Latina.

Descripción del taller

Los objetivos del taller fueron describir las dificultades y errores asociados de los estudiantes al realizar diversas tareas matemáticas en las que está inmerso el concepto de función y analizar situaciones didácticas para promover la formación de este concepto, de modo que se determine la pertinencia y eficacia de su instrumentación en la escuela. Con el propósito ulterior de evaluar los efectos de la puesta de escena de situaciones didácticas sobre el concepto de función. Se consideraron los contenidos de dificultades y errores asociados de los alumnos al realizar tareas matemáticas que involucran el concepto de función y situaciones didácticas para promover la formación del concepto de función. Se propuso como modalidad de trabajo para el taller que los participantes cuenten con un material impreso de apoyo, realicen las tareas matemáticas propuestas y hagan producciones individuales, de equipo y de grupo.

Los asistentes al taller manifestaron que se trató de un trabajo interesante y propusieron cambios a las situaciones didácticas, particularmente en lo referente a las lecturas de introducción en las que se sugiere considerar el desarrollo histórico del concepto como conocimiento matemático enseñable.

Bibliografía

- Arango, C. (1993), *Metodología de la enseñanza de la matemática*, tomo I, Pueblo y Educación, Habana.
- Brousseau, G. (1983), *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de la enseñanza*, versión en español del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México, D.F.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2002), Desarrollo del pensamiento: El caso de visualización de funciones, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, tomo I, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D. F.
- Duval, R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Didáctica de la Matemática II*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.
- Hitt, F. (1996), Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos, En *Investigaciones en didáctica de la Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F.
- Leontiev, A. (1981) *La actividad en Psicología*, Pueblo y Educación, Habana.
- Sierpinska, A. (1994), *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, London.