

# Selección de tareas “ricas” para el aprendizaje matemático en educación secundaria

Antonio Marín del Moral

[anmarin@ugr.es](mailto:anmarin@ugr.es)

Universidad de Granada. España

# La planificación de la enseñanza y su complejidad

- Hay múltiples decisiones que el profesorado adopta cuando planifica la enseñanza de una lección o sesión de clase. Algunas de ellas:
  - Selección del contenido matemático
  - Fijar las expectativas de aprendizaje: objetivos
  - Elegir materiales y recursos para el aprendizaje
  - Seleccionar las tareas escolares más adecuadas
  - Organizar la enseñanza por sesiones de clase
  - Prever un modo de gestionar el trabajo en el aula
  - Fijar medios para evaluar el aprendizaje
- Para adoptar cualquier grupo de decisiones es necesario un proceso que implica análisis, fijar criterios para la decisión y seleccionar las mejores respuestas a la situación actual.

# La tarea

- La tarea es Christiansen & Walker (1986) “aquello que se le pide a los alumnos que hagan”
- Actividad: Los argumentos y acciones matemáticas o de otro tipo que emergen desde las interacciones entre alumnos, profesor, recursos y entorno al realizar una tarea.
- La tarea puede incluir, -como Margolinas, C. (2012) comenta en el ICMI Study- un rango muy amplio de objetos como:
  - Ejercicios repetitivos, construcción de objetos, ejemplificar decisiones, resolver problemas de una o varias etapas, realizar un proyecto de investigación, o trabajos que haga un estudiante en una situación particular.

# La complejidad en la decisión: ¿Qué percibe el estudiante de la tarea?

El estudiante en su aprendizaje, básicamente realiza tareas matemáticas a las que debe dar respuesta utilizando conocimientos y recursos matemáticos y de acuerdo con ciertas reglas que regulan la actividad del alumno.

Enunciado

Encuadre en la lección

Normas sobre  
recompensas y  
penalizaciones

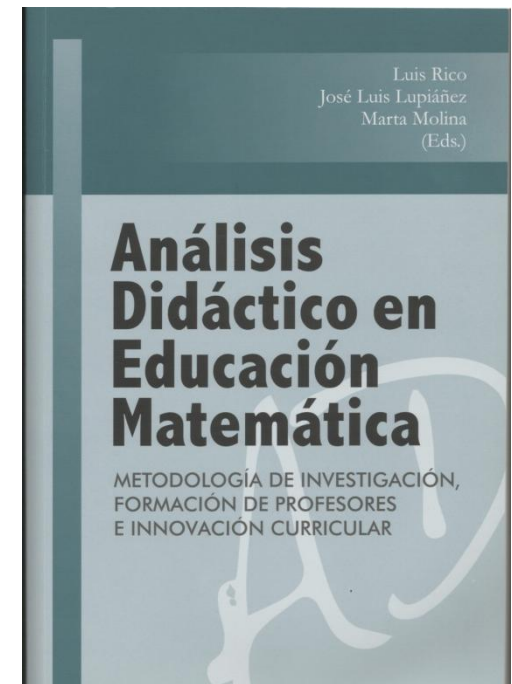
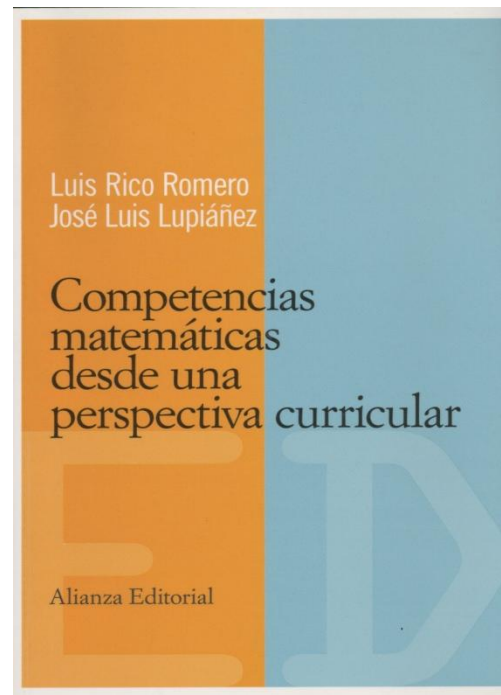
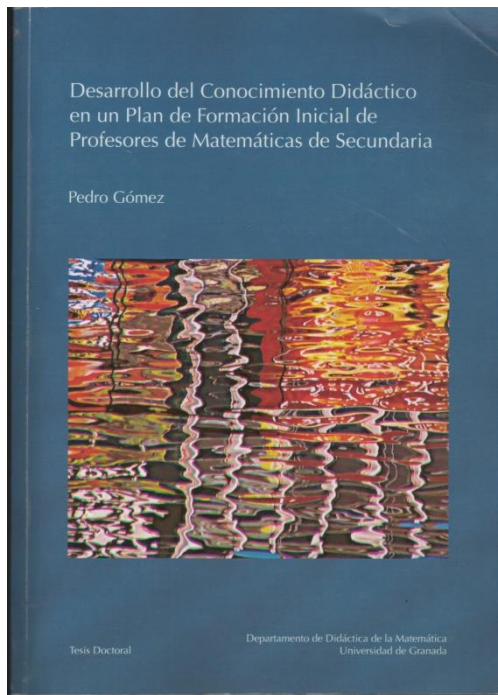
Resolución

Recursos  
y ayudas

Errores

Evaluación

# La complejidad en la decisión: ¿Qué planifica el profesor desde el Análisis Didáctico? Referencias



# La complejidad en la decisión: ¿Qué planifica además el profesor desde la perspectiva del Análisis Didáctico?

## Tarea escolar

Ajustada a un  
CONTENIDO

Tipo cognitivo

Sistema/s  
representación  
predominante/s

Contexto  
fenomeno-  
lógico

Relaciones con  
otros contenidos

Asociada a EXPECTATIVAS  
DE APRENDIZAJE

Objetivos  
específicos de la  
tarea

Contribución a  
Competencias

Previsión de ERRORES en la  
actividad

Tipo de  
dificultades

Tipos de tareas  
para remediar  
errores

# La complejidad en la decisión: ¿Qué planifica además el profesor desde la perspectiva del Análisis Didáctico (y 2)

## Tarea escolar

Con una **COMPLEJIDAD** adecuada

Hipótesis sobre conocimientos previos y ZDP

Análisis de la complejidad cognitiva

Graduación del enunciado

Formando parte de una **SECUENCIA DE APRENDIZAJE**

Intenciones de la secuencia

Relaciones entre las tareas de la secuencia

Función de la tarea en la secuencia/lección

Con los **RECURSOS Y AYUDAS EN EL APRENDIZAJE** pertinentes

Selección y formación previa en el recurso

Ayudas del profesor y entre alumnado para realizar la tarea

# Tareas “ricas” para el aprendizaje

- Varias formas de nombrarlas: tareas de alto nivel, tareas importantes, tareas que merecen la pena, tareas de calidad...
- La formación en planificación docente del Análisis Didáctico debe contener criterios para diseñar o seleccionar tareas ricas.
  - No es un procedimiento aséptico. Tiene que comprometerse en la dirección de ciertas expectativas generales de la enseñanza
- Ricas ¿para qué? Primera aproximación
  - Para el desarrollo de ciertas competencias/ logro de expectativas operativas/ alcance de finalidades generales. (Necesidad de definirse)



# Tareas “ricas” para el aprendizaje

## ¿Ricas= complejas?

### Grupos de competencias PISA

Grupo reproducción	Grupo conexión	Grupo de reflexión
<ul style="list-style-type: none"><li>•Representaciones y definiciones estándar</li><li>•Cálculos rutinarios</li><li>•Procedimientos rutinarios</li><li>•Solución de problemas de rutina</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Construcción de modelos</li><li>•Traducción, Interpretación y solución de problemas estándar</li><li>•Métodos múltiples y bien definidos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Formulación y solución de problemas complejos</li><li>•Reflexión y comprensión en profundidad</li><li>•Aproximación matemática original</li><li>•Múltiples métodos complejos</li><li>•Generalización</li></ul>

## Tareas “ricas” para el aprendizaje (y2)

### Niveles de competencia para la modelización matemática

Acción	Reproducción	Conexión	Reflexión
Reconocer, Recopilar, Activar, Aprovechar	Modelos familiares bien estructurados	→	→
Interpretar,  Comunicar,  Estructurar	Modelos y resultados desde la realidad Los resultados de un modelo de forma elemental	→  El campo en el que hay que realizar el modelo (datos, variables, parámetros simplificaciones)	Los resultados de un modelo en formas más complejas  →
Traducir		Realidad a estructuras matemáticas (Fórmulas, ecuaciones, representaciones) en contextos no muy complejos	Realidad a estructuras matemáticas (Fórmulas, ecuaciones, representaciones) en contextos más complejos
Recopilar			Información y datos
Supervisar			El proceso de construcción de modelos
Validar			El modelo resultante

# ¿Qué se entiende por tareas ricas en el mundo de la educación matemática?

Miramos en varias direcciones:

- Los indicadores de riqueza en el aprendizaje escolar que describen
- profesores, investigadores en investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- Los indicadores de riqueza en el aprendizaje escolar que valoran formadores de profesores.
- Las descripciones orientadas a caracterizar dimensiones de las tareas que permiten inducir ciertos rangos de calidad

## NRICH Project integrado en el National Centre for Excellence in the teaching of Mathematics (ncetm.org)

- Sitio del proyecto (<http://nrich.maths.org/frontpage>)
- Es un centro de recursos de aprendizaje para el currículo escolar e investigaciones asociadas mantenido por profesores de la Universidad de Cambridge.
- Los descriptores de “tarea rica” Afzal Ahmed (1987)
  - Debería no restringir a los aprendices a buscar en otras direcciones (la resolución de la tarea)
  - Debería involucrar a los aprendices en conjeturar, generar hipótesis, poner a prueba, demostrar, explicar, reflexionar e interpretar
  - Debería animar a preguntar ¿qué ocurre si...? ¿qué ocurre si no...?
  - Debería animar a la originalidad y la invención
  - Accesible a todo el mundo desde el principio (de la tarea)
  - Debería permitir retos posteriores y ser ampliables
  - Debería tener un elemento de sorpresa o intriga y ser divertida

REF **NRICH**

## Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning M. Henningsen y M.K. Stein 1996

Investigación sobre los factores de la implementación en clase que inhiben el desarrollo del pensamiento de alto nivel en estudiantes .  
Estudia por qué las expectativas en el diseño de tareas de alto nivel se ven mermadas durante su implementación.

Características de estas tareas:

- Existencia de más de una estrategia de resolución
- Aparición de múltiples representaciones
- Generadoras de varios estilos de comunicación a través de explicaciones o argumentaciones.
- Capaces de hacer recordar y aplicar procedimientos o reglas presentados con anterioridad.

La graduación de estas características la fija el profesor al planificar la demanda cognitiva esperada de cada tarea

REF **Henningsen**

TTML Project. Investigación en formación de profesores acerca de la mejor elección de tareas D. Clarke y Roche A.

## Teachers' Extent of the use of particular Tasks types in Mathematics and choices behind that use.

- Define el nivel de calidad de las tareas a través de tres tipos:
  - Tipo 1: La tarea ejemplifica un modelo o concepto matemático.
  - Tipo 2: La matemática se sitúa en la tarea como problema práctico contextualizado para darle significado en la realidad y para ayudar a la motivación.
  - Tipo 3: La tarea es de tipo abierto y orientada a investigar un contenido matemático específico. No necesariamente en contexto.
- Los profesores en formación modifican sus criterios de selección de tareas a medida que progresan en su formación

REF **Clarke**

## Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study Hiebert, J. et al

Estudio de comparación de lecciones en varios países. No obstante hace referencia a tareas escolares. Al establecer indicadores comunes de comparación entre diferentes lecciones gradúa la complejidad de los indicadores:

Indicadores de comparación:

- Naturaleza del contenido: conceptual, procedimental, notacional
- Tipo de razonamiento empleado: deductivo, justificación matemática, generalización, uso de contraejemplos
- Coherencia de la lección: Interrelación entre los componentes (tareas) de la lección
- Compromiso de los estudiantes con la tarea: Probabilidad de que el estudiante estuviese involucrado en matemáticas significativas

REF **Hiebert**

Tareas ricas en educación matemática: LEARNING TO POSE  
MATHEMATICAL PROBLEMS: EXPLORING CHANGES IN PRESERVICE  
TEACHERS' PRACTICES Sandra Crespo (2003)

Estudio que se centra en el modo en que los profesores en formación formulan tareas. En la evolución que siguen los profesores marca un horizonte de calidad de las tareas que se resume en:

- Formular problemas menos dirigidos, más multipaso y abiertos
- Formular problemas que introduzcan nuevas ideas, pulsen el pensamiento de los alumnos o reten su comprensión
- Formular problemas que requieran la comunicación de las ideas entre alumnos

REF **Crespo**



## Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics , Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford, Bradford Findell (2001)

- Compendio de recomendaciones basadas en investigaciones sobre el aprendizaje escolar. En los criterios para seleccionar y usar las tareas escolares se centra en los factores que inhiben o potencia la demanda cognitiva de la tarea:
  - Inhibidor fundamental: Que el profesor disminuya la demanda cognitiva al observar dificultades de aprendizaje durante la implementación.
  - Potenciadores:
    - Elegir tareas que se apoyen en conocimientos previos del estudiante
    - Utilizar ayudas en la tarea para mantener al alumno siempre involucrado en ella.
    - No usar ni poco ni demasiado tiempo en la ejecución de la tarea
    - Mantener el profesor una presión continua buscando la explicación y el desarrollo de significados de los conceptos matemáticos.

REF **Kilpatrick**

## Design and Understanding Janet Ainley and Dave Pratt (2006)

- Uno de los artículos en que se cuestionan tanto que las expectativas del profesor no coinciden con las del alumno al realizar las tareas, como que los problemas contextualizados no son garantía de éxito.
- Propone que las tareas escolares contextualizadas deben tener, además de una utilidad o expectativa que marca el profesor un **propósito** para el alumno.
- “Una tarea con propósito es la que tiene un resultado para el alumno en forma de un producto actual o virtual o solución a un problema inquietante”

REF *Ainley*

# The Role of Mathematical Tasks in Different Cultures

Shimizu Y., Kaur, B. , Huang, R. and Clarke D.

## En Mathematical Tasks in Classrooms Around the World

Artículo que reivindica el papel del estudiante como agente en la tarea de forma que sea tan importante el contexto de realización de la misma como las características cognitivas y de recursos que comporta.

Al considerar la naturaleza de las tareas en clase debe prestarse atención a:

- La complejidad
- Los participantes que interactúan y la naturaleza de su participación
- El contexto socio cultural
- La intención para la que las tareas se han introducido en clase

REF: [Shimizu](#)

## *Task design for systemic improvement: principles and frameworks* Burkhardt, H. y Swan, M. Shell Center (2013)

- Este artículo proporciona un marco de dimensiones de la tarea que pueden modificarse buscando la mejora de ella y regulando el nivel de dificultad medido con muestreo estadístico.
- Dimensiones a considerar:
  - Contenido matemático
  - Proceso matemático en resolución de problemas
    - Fases: Modelización, Transformación, Inferencias y conclusiones, Revisión, Informe
    - Tipo de razonamiento, uso de representaciones, conexiones, comunicación.
  - Tipos de tareas: Rutinaria, de evaluación, abierta, de investigación...
  - Realización de la tarea
    - Duración
    - Modo de presentación del enunciado y respuesta

REF **Burkhardt**

Tareas ricas en Educación matemática: *Task design: Supporting teachers to independently create rich tasks* Libby Knott, Jo Olson, Anne Adams, Rob Ely (2013)

Proyecto en formación de profesores para diseñar tareas ricas:

Caracterizan estas tareas :

- Compleja
- No algorítmica
- No rutinaria
- Maneja múltiples representaciones
- Contiene diversas estrategias de razonamiento
- Tiene varios caminos de resolución
- Permite generalizaciones

**Ref: Knott**

## ¿Cómo manejar esta información?

- Esta propuesta considera adscribir los indicadores descritos a cada una de las fases que propone el Análisis Didáctico en la planificación docente de una Unidad Didáctica y considerar estos criterios como **principios de diseño** en el momento del análisis pertinente.
- La selección de tareas que se encuadran en una unidad didáctica o lección seguiría un proceso de decisiones asociadas a los pasos que se describen en el Análisis Didáctico:
  - Dimensiones referidas al contenido,
  - Dimensiones referidas a las expectativas de aprendizaje y
  - Dimensiones referidas a su encuadre en una secuencia de tareas o lección.

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
NRICH	Debería no restringir a los aprendices a buscar en otras direcciones (la resolución de la tarea)	Tipo cognitivo Estrategias	Obj. y Competencias: RP	Ayudas e Interacciones alumno profesor
	Debería involucrar a los aprendices en conjeturar, generar hipótesis, poner a prueba, demostrar, explicar, reflexionar e interpretar	Tipo cognitivo	Obj. y Competencias: RP, PR, M	Ayudas e Interacciones alumno profesor
	Debería animar a preguntar ¿qué ocurre si...? ¿qué ocurre si no...? Debería animar a la originalidad y la invención		Obj. y Competencias: PR	Ayudas e Interacciones alumno profesor

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
NRICH	Debería animar a la originalidad y la invención	Tipo cognitivo actitudinal	Obj. y Competencias: RP	Ayudas e Interacciones alumno profesor
	Accesible a todo el mundo desde el principio (de la tarea)			Complejidad
	Debería permitir retos posteriores y ser ampliables	Tipo cognitivo Estrategias	Obj. y Competencias: RP	
	Debería tener un elemento de sorpresa o intriga y ser divertida	Tipo cognitivo actitudinal		



## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Hennin gsen	Capaces de hacer recordar y aplicar procedimientos o reglas presentados con anterioridad.		Obj. y Competencias en RP y PR	Complejidad
	Aparición de múltiples representaciones	S. representación	Obj. y Competencia R	
	Generadoras de varios estilos de comunicación a través de explicaciones o argumentaciones		Competencias, C, AJ	
	Existencia de más de una estrategia de resolución	Tipo cognitivo estrategia	Obj. y Competencias RP, M	

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Clarke	Tipo 1: La tarea ejemplifica un modelo o concepto matemático.	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia RP, M	
	Tipo 2: La matemática se sitúa en la tarea como problema práctico contextualizado para darle significado en la realidad y para ayudar a la motivación.	Tipo cognitivo, contexto, c. actitudinal	Obj. y Competencia RP, M	
	Tipo 3: La tarea es de tipo abierto y orientada a investigar un contenido matemático específico. No necesariamente en contexto	Tipo cognitivo Estrategia Contexto	Obj. y Competencia RP, M	

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. instrucción
Hiebert	Naturaleza del contenido: conceptual, procedimental, notacional	Tipo cognitivo		
	Tipo de razonamiento empleado: deductivo, justificación matemática, generalización, uso de contraejemplos	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia AJ	
	Coherencia de la lección: Interrelación entre los componentes (tareas) de la lección	Relaciones entre contenidos		Estructura de la secuencia
	Compromiso de los estudiantes con la tarea: Probabilidad de que el estudiante estuviese involucrado en matemáticas significativas	Tipo cognitivo actitudinal		

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Crespo	Formular problemas menos dirigidos, más multipaso y abiertos	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia PR, RP, M	
	Formular problemas que introduzcan nuevas ideas, pulsen el pensamiento de los alumnos o reten su comprensión	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia RP	
	Formular problemas que requieran la comunicación de las ideas entre alumnos		Obj. y Competencia C	Interacciones en el aula

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Kilpatrick	No disminuir la demanda cognitiva al observar dificultades de aprendizaje durante la clase.		Selección de objetivos	Interacciones alumno-profesor
	Elegir tareas que se apoyen en conocimientos previos del estudiante			Estructura de las secuencias
	Utilizar ayudas en la tarea para mantener al alumno siempre involucrado en ella.	Tipo cognitivo actitudinal		Ayudas en el aula
	No usar ni poco ni demasiado tiempo en la ejecución de la tarea			Estructura de la secuencia
	Mantener una presión continua buscando la explicación y el desarrollo de significados de los conceptos matemáticos.	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia PR	Interacciones en el aula

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Ainley	Las tareas escolares contextualizadas deben tener, además de una utilidad o expectativa que marca el profesor un <b>propósito</b> para el alumno. Una tarea con propósito es la que tiene un resultado para el alumno en forma de un producto actual o virtual o solución a un problema inquietante	Contexto, contenido actitudinal	Obj. y Competencia M, RP	

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Shimizu	La complejidad	Tipo cognitivo	Obj. y Competencias	Grado de complejidad
	Los participantes que interactúan y la naturaleza de su participación			Interacciones profesor y alumnos
	El contexto socio cultural			Estructura de la secuencia de tareas
	La intención para la que las tarea se han introduce en la planificación			Función de la tarea en la secuencia /secuencia en la lección

## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Burkh ard	Contenido matemático	Tipo cognitivo, contextos, representaciones, relaciones		
	Proceso matemático en resolución de problemas: Fases, Tipo de razonamiento	Tipo cognitivo estrategia	Obj. y Competencias RP, M, PR, AJ, R	
	Tipos de tareas: Rutinaria, de evaluación, abierta, de investigación...			Función de la tarea en la secuencia
	Realización de la tarea: Duración, Modo de presentación del enunciado y respuesta		Obj. y Competencia R	Estructura y formato de la tarea



## Encaje de esta información en el Análisis didáctico como esquema de planificación docente

REF	Descripción	A. contenido	A. cognitivo	A. Instrucción
Knott	Compleja	Tipo cognitivo	Obj. y Competencias	
	No algorítmica	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia LS, PR	
	No rutinaria	Tipo cognitivo Estrategias	Obj. y Competencia RP	
	Maneja múltiples representaciones	Tipo cognitivo representaciones	Obj. y Competencia RP	
	Contiene diversas estrategias de razonamiento	Tipo cognitivo Estrategias	Obj. y Competencia RP y AJ	
	Tiene varios caminos de resolución		Obj. y Competencia RP	
	Permite generalizaciones	Tipo cognitivo	Obj. y Competencia AJ	

## Frecuencia de los indicadores para valorar la riqueza de tareas escolares

Análisis		
Del contenido (35/114)	Tipo cognitivo del contenido	14
	Tipo cognitivo esp. Estrategias	8
	Tipo cognitivo esp. Actitudinal	5
	Sistemas de representación	2
	Contextos y situaciones	4
	Relaciones entre contenidos	2
Cognitivo (62/114)	Objetivos: acciones y contexto	30
	Contribución al desarrollo de competencias	RP (11) PR (3) M (7) R (3) C (1) AJ (5) C (1) LS ( 1)
De la Instrucción (17/114)	Complejidad de la tarea	3
	Recursos y ayudas del profesor	3
	Interacciones profesor y estudiantes	4
	Estructura y formato de la secuencia	5
	Función de la tarea en la secuencia	2

Esta selección no podemos hacerla con



Pero merece la pena para conseguir  
estudiantes eficientes y...



felices



Gracias por su atención

Anexo 1 ¿Cómo percibe el estudiante la tarea?

## Enunciado de la tarea



–La propuesta que se hace al alumno en una tarea escolar contiene:

- Información sobre *datos y relaciones* entre ellos e información sobre relaciones entre datos y el producto a obtener.
- Información sobre *el producto que debe obtenerse* al realizar la tarea. La precisión sobre el producto a obtener es variable.
- Información orientada a que el alumno considere que *es importante dedicar tiempo y esfuerzo a responder a la tarea*
- Una referencia más o menos explícita acerca de los *recursos* que se pueden manejar para realizar la actividad: libros, calculadora, ordenador, útiles de dibujo...
- *Instrucciones para realizar la actividad*: en casa, clase, individual, en grupo,...
- El alumno también conoce *el papel que juega la realización de esta tarea en la evaluación de su aprendizaje*: calificación, recompensa o penalización, consideración del profesor...

## Encuadre en la lección



- ¿Es una tarea para aprender o para evaluar?
- ¿Es una tarea nueva y desconocida o una tarea para responder por analogía a otras ya conocidas?
- ¿Qué conocimientos me han aportado previamente para resolver la tarea?



## La realización de la actividad



–La tarea puede percibirse realmente como un reto que se acepta o no. Por ello *la información que se introduce y la demanda de actividad* deben de adecuarse al nivel de comprensión del alumno y a sus capacidades actuales.

–Para realizar la tarea de aprendizaje se pueden activar destrezas, habilidades, (capacidades) muy diferentes: razonar, aplicar, aflorar de la memoria, interpretar, organizar etc. Estas habilidades están relacionadas, de una parte con el tipo de tarea o problema propuesto atendiendo a su *complejidad* y, de otra parte con *la fase de resolución de la tarea* en que se encuentre el estudiante.

–Por otra parte, el alumno tiene derecho a que las tareas que se le propongan contribuyan al desarrollo de competencias útiles en nuestro tiempo, acordes con las directrices curriculares.



## Recursos y ayudas

- ¿De qué recursos dispone el alumno? ¿Son opcionales y obligatorios?
- ¿ Cuales son los apoyos del profesor disponibles?  
¿Cómo se puede interactuar con *otros compañeros*?
- ¿Qué tiempo tiene?



## Errores

- Si es una tarea de aprendizaje y durante él se producen dificultades o errores, el alumno entenderá que debe haber mecanismos para solucionar estos errores que le permitan alcanzar los mismos logros que el resto de sus compañeros.



## Evaluación

- Si es una tarea de evaluación ¿a qué otra actividad conocida se parece? ¿qué es desconocido para mí? ¿cómo puedo descomponer la resolución en acciones cuya realización conozca?



## Normas sobre recompensas y penalizaciones

Las normas que el profesor impone para funcionar en clase relativas al valor (calificación) que decide para a la realización de las tareas influyen en la motivación y el modo de intervenir en ellas.

- Fin y ahora un anexo