

EN TORNO AL TEOREMA DE PICK:
UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA

Lorenzo Blanco Nieto

E.U. del Profesorado de E.G.B. - Badajoz

Luis Márquez Zurita

C.Pco. de Prácticas de la E.U. del Profesorado de E.G.B. - Badajoz

INTRODUCCION

Quando surgió la idea de este trabajo, queríamos observar si los alumnos de 8^o de E.G.B., después de la realización de una serie de actividades, eran capaces de enunciar el teorema de PICK (*). A medida que íbamos desarrollando la experiencia, surgieron actividades y ejercicios nuevos, que provocaron situaciones de investigación y discusión sobre diversos aspectos de la Geometría.

No pretendimos, en ningún momento, fijar contenidos específicos, sino "hacer Matemáticas" con algunos de los conceptos geométricos de los programas de la E.G.B.: figuras planas, perímetros, áreas, etc.

Nuestro trabajo nos reafirmó en la creencia de la necesidad de revisar todo el planteamiento tradicional de enseñanza de las Matemáti-

(*) Relaciona el área de figuras construidas en un geoplano, con el número de clavos que soportan los lados y el de clavos interiores. Está planteado como actividad recreativa en el libro de Briant Bolt, "Mathematical activities", publicado por Cambridge University Press en 1982.

cas -basado en la transmisión de contenidos- y caminar más en la línea- de provocar situaciones reales o plantear problemas motivadores que induzcan a una forma de investigación científica acorde con la idea de "hacer Matemáticas".

Trabajamos con un grupo de 24 alumnos del Colegio de Prácticas Masculino de la E.U. del P. de E.G.B. de Badajoz. Su situación socioeconómica y cultural es de un nivel medio.

La experiencia se realizó en tres etapas :

. Actividades cuyo objetivo principal era familiarizar a los alumnos con el material a utilizar y recordarles algunos conceptos de cursos anteriores.

. Ejercicios sobre figuras planas, en los que surgieron interesantes observaciones sobre semejanza e igualdad.

. Como objetivo final: ejercicios con tres fichas, tendentes a la deducción del teorema de Pict.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

1. EJERCICIOS DE ADAPTACIÓN Y RECUERDO

El primer día se dedicó a que se familiarizaran con lo que denominamos "tablero", que es la representación de un geoplano en papel punteado, y en el que la distancia horizontal o vertical entre dos puntos - representa la unidad de longitud.

Les presentamos nueve tableros de 5x5 puntos en un folio, y les pedimos que dibujaran las figuras que quisieran, con la única condición de que aparecieran separadas y con los vértices coincidiendo con puntos.

Sin entrar en aportación de conceptos, hicimos luego varias observaciones sobre denominación de los polígonos, número de lados, tamaño, etc. Al mismo tiempo, fuimos dibujando algunos en la pizarra.

En la segunda sesión, empezamos por recordar las nociones que habían surgido el día anterior, al objeto de situar a los alumnos ante las próximas actividades.

A continuación, les pedimos que dibujasen cuadriláteros en los

tres tableros superiores y respetando las condiciones señaladas. Se pudo observar el esfuerzo por no repetir ningún tipo.

Posteriormente, pedimos que fueran saliendo a la pizarra para dibujar, en tableros hechos en ella, "figuras que no sean iguales a las ya realizadas", indicando su nombre y algunas de las características.

Surgió entonces una discusión interesante sobre los conceptos de igualdad, semejanza y clasificación de figuras. Pudimos observar que, pese a que dichos conceptos se estudian de forma precisa en la E.G.B., no se usan correctamente en el trabajo diario. Así, por ejemplo, dos figuras de la misma clase son generalmente definidas como iguales; no usan casi nunca la noción de semejanza.

En esta segunda sesión fueron repasados los conceptos citados y se trató la clasificación de los cuadriláteros.

El mal uso de los términos de igualdad y semejanza de figuras, nos movió a proponer la misma actividad a los alumnos de las especialidades de Ciencias y Preescolar de la Escuela del Profesorado de E.G.B., observando similar incorrección. Esto nos llevó a reflexionar sobre el abuso del lenguaje en Matemáticas. Existe una contradicción entre la precisión que pretendemos exigir mediante definiciones y ejercicios y el lenguaje que usamos normalmente en la vida e, incluso, cuando tratamos otros temas.

2. PERÍMETRO. TEOREMA DE PITÁGORAS

Después de recordar las unidades de longitud y superficie expresadas el día anterior, empezamos a trabajar la noción de perímetro, proponiendo la siguiente actividad: Dibujar figuras de perímetro 6.

La contestación más generalizada fue la correcta: el rectángulo. Sin embargo, algunos alumnos confundieron perímetro con dibujar seis trazos. En la fig. 1 pueden verse las figuras erróneas y el % de alumnos que las dibujaron.

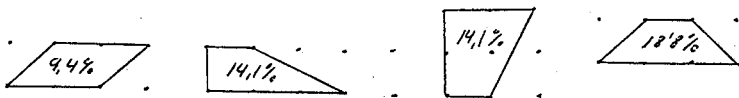


Fig. 1

El error cometido en la medida del lado oblicuo nos dió oportunidad para recordar y trabajar con el teorema de Pitágoras.

3. AREA DE FIGURAS PLANAS

Introducimos este aspecto pidiendo que determinaran el área del triángulo de la fig.2.



Fig.2

La contestación es rápida y correcta. Razonan diciendo que es la mitad del cuadrado unidad. Aprovechamos, entonces, para recordarles la fórmula del área del triángulo rectángulo.

A continuación, les pedimos que dibujen figuras de área 2, dando como un ejemplo un rectángulo dibujado en un tablero de la pizarra.

Destacamos que sólo un alumno trazó figuras de áreas superiores a 2. He aquí los distintos tipos de figuras que resultaron :

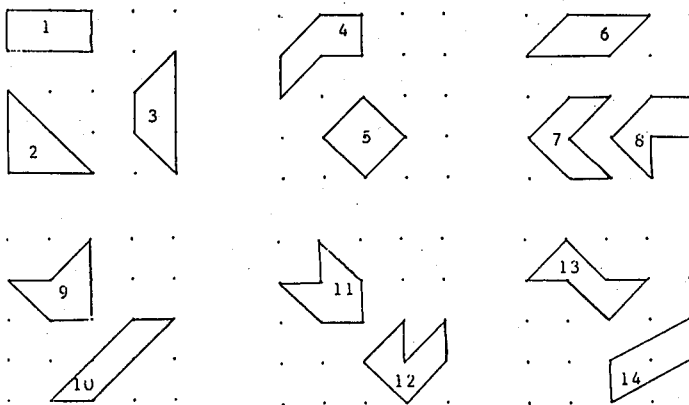


Fig.3

La frecuencia de cada figura fue la siguiente :

23-1 ; 19-2 ; 13-3 ; 10-4 ; 14-5 ; 14-6 ; 3-7 ; 6-8 ; 5-9 ;
4-10 ; 3-11 ; 1-12 ; 1-13 ; 1-14.

En cuanto a la relación n° de figuras - n° de alumnos, resultó :
1 fig.-1 alumno ; 2-1 ; 4-1 ; 5-8 ; 6-6 ; 7-7.

En otra sesión, planteamos una actividad sugerida por el libro de Briant Bolt. Les entregamos una ficha con ocho tableros de 3×3 , y les pedimos que dibujaran ocho triángulos distintos, uno en cada tablero.

Surgieron algunas dudas derivadas del mal aprendizaje de los conceptos de igualdad y semejanza, lo que motivó que la actividad, prevista para ser realizada en 20 minutos, se demorara 1 hora. A partir de ella surgieron nuevos ejercicios y sugerencias.

15 de los 24 alumnos dibujaron correctamente todos los triángulos posibles (fig.4). Los 9 restantes trazaron sólo siete, aunque sólo 2 dejaron en blanco un tablero; los otros 7, repitieron alguno de los ya dibujados.

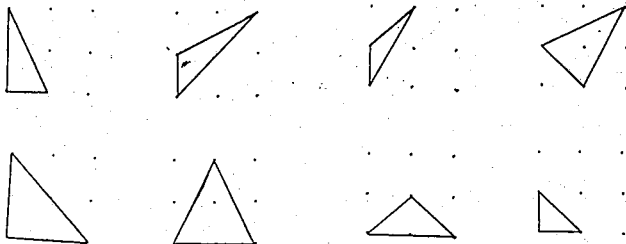


Fig.4

Cuando estaban resolviendo el ejercicio, surgió la duda entre considerar o no iguales los triángulos de la fig.5. Por ello, insistimos una vez más en la diferencia entre igualdad y semejanza de figuras.

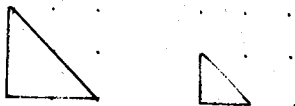


Fig.5

Se pasó a continuación a revisar en la pizarra el ejercicio, solicitando entonces que clasificaran los triángulos. Lo hicieron atendiendo sólo a los lados o a los ángulos, no a ambos.

La última actividad relativa a áreas consistió en pedirles que escribieran debajo de cada uno de los triángulos de la ficha que sí

que el área correspondiente, con los resultados que se indican (fig.6) :

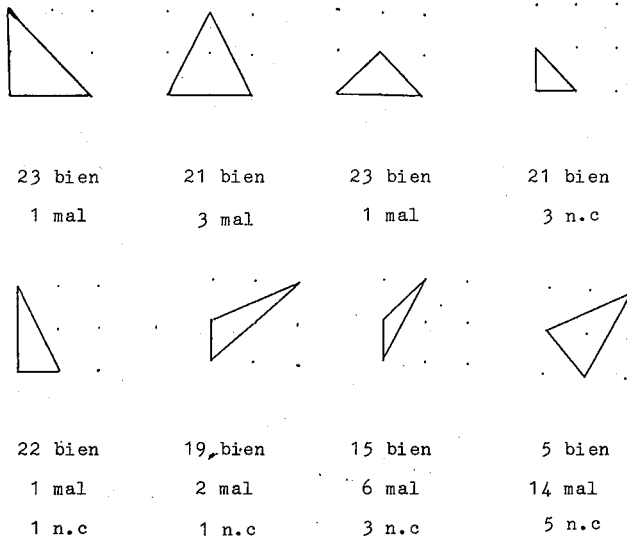


Fig.6

La revisión del ejercicio en la pizarra nos descubrió la forma en que habían procedido. En principio, ninguno de ellos utilizó la fórmula del área del triángulo. Calcularon por descomposición y complementación, métodos poco utilizados en la enseñanza. Esto nos indica, una vez más, que la intuición y los conocimientos de los niños suelen ser poco tenidos en cuenta en nuestras clases.

Expondremos a continuación de forma gráfica las resoluciones más interesantes :



$A = 2$

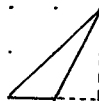


$A = 2$

Fig.7



$$A = 1$$



$$A = 1$$



$$A = 1/2$$



$$A = 1,5$$

El cálculo del área del último triángulo les resultó difícil, como puede verse en el resultado. A juzgar por las discusiones de los alumnos que la obtuvieron, dos de ellos procedieron por complementación; los otros tres aportaron una solución intuitiva.

Al repetir esta experiencia con alumnos de 2^o de Magisterio, estos llegaron a resultados correctos después de una larga elaboración de fórmulas de cálculo. Un número considerable de ellos, de la especialidad de Preescolar, desistieron, por no encontrar fórmulas que consideraran adecuadas. Es evidente, pues, la influencia de los enseñantes en el cambio de mentalidad de los alumnos, alejándolos de planteamientos sencillos y llevándolos a la búsqueda de caminos largos y laboriosos.

Insistimos en la conveniencia de introducir el cálculo de áreas por composición y descomposición de polígonos y por complementación. Debe aprovecharse la intuición y la creatividad del alumno que, por este camino, puede llegar al descubrimiento de fórmulas que utilizará, sin duda, cuando crea que simplifican la resolución del ejercicio, sin que esto constituya una obsesión y un procedimiento obligatorio.

Como complemento a esta fase de la experiencia, les presentamos una ficha resumen con el objeto de repasar e insistir en las nociones y cálculo de perímetros y áreas. Algunos de los ejercicios propuestos fueron posteriormente resueltos en la pizarra. He aquí la ficha :

Area Superior
α 4

Area 4

Area 3

NOMBRE DE LA FIGURA	Nº DE LADOS	AREA	PERÍMETRO

A large grid of dots for drawing polygons. The grid is composed of 10 rows and 20 columns of dots. The top 4 rows correspond to the 'Area Superior' section, the next 4 rows to 'Area 4', and the bottom 2 rows to 'Area 3'.

NOMBRE _____

4. ACTIVIDADES PREVIAS AL TEOREMA DE PICK

A)-Se les presentó una ficha punteada con una tabla de cuatro columnas y se les pidió :

- . dibujar 5 ó 6 figuras con un punto interior;
- . rellenar la tabla indicando nombre de la figura, número de puntos frontera, número de puntos interiores y área;
- . tratar de obtener una expresión general válida para el cálculo del área de todas las figuras dibujadas.

De los 24 alumnos, 22 encontraron la expresión pedida, aunque en formas diferentes. Sólo 3 utilizaron una expresión simbólica. Entre sacamos dos de las respuestas:

"Cuando una figura tiene un punto interior, el número de puntos frontera es doble que el del área"

"Cuando una figura tiene un punto interior, para hallar el área se divide el número de puntos frontera entre dos y da el área"

B) Similar a la anterior, pero respecto a figuras con dos puntos interiores.

En esta ocasión los resultados fueron : 16 expresiones correctas, 4 incorrectas y 4 alumnos que no escribieron ninguna.

7 alumnos contestaron así : "El área se halla sumando el número de puntos frontera y el número de puntos interiores y dividiéndolo por dos"

Otros 9 contestaron, en líneas generales, de esta forma : "El número de puntos frontera, dividido entre dos y sumándole uno, nos da el área"

Quando repasamos en la pizarra el ejercicio, constatamos la veracidad y equivalencia de las dos expresiones.

Por último, destacamos las expresiones simbólicas aportadas :

Con 1 punto interior :

$$A = P. \text{ frontera} / 2$$

Con 2 puntos interiores :

$$A = P. \text{ frontera} / 2 + 1$$

CONCLUSIONES

.. El tablero con puntos es un material válido para trabajar la geometría del plano. Suple al geoplano y tiene la ventaja de ser más asequible para todos.

.. Detectamos una serie de conceptos mal aprendidos o, por lo menos, cuyos términos no son correctamente empleados por los alumnos.

.. El cálculo de áreas nos resultó muy interesante, ya que, como ya señalamos, los chicos utilizaron métodos intuitivos que no son generalmente empleados en la metodología escolar.

.. Por último, consideramos que durante las sesiones de la experiencia se creó un agradable ambiente de investigación, que les llevó a considerar la Geometría como algo accesible y entretenido.

CONCEPTOS DE LOS PROGRAMAS DE E.G.B. UTILIZADOS

Unidades de longitud y superficie.

Vértice y lado de un polígono.

Clasificación de triángulos y cuadriláteros.

Semejanza e igualdad de figuras.

Perímetro de polígonos.

Teorema de Pitágoras.

Números irracionales.

Área de figuras planas.

Cálculo del área por complementación.

Cálculo del área por descomposición.

Expresiones algebraicas para el cálculo de áreas.