NUMEROS, 16 - 1987

EXPERIMENTOS DE GEOMETRIA (1.)

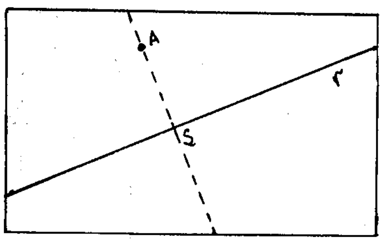
(Notas sobre un seminario impartido por el profesor MIGUEL DE GUZMAN con ocasión de las VII Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas)

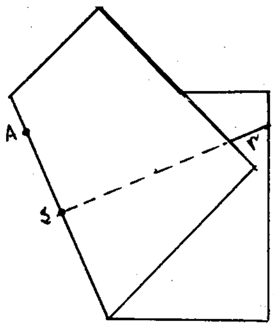
Redacción y dibujos : M. Fernández Reyes

1. GEOMETRIA DEL PLIEGUE

1. Trazado de la perpendicular a una recta por un punto A

Señala en un papel una recta r y un punto cualquiera A. Pliega el papel de modo que el pliegue pase por A , y r venga a coincidir consigo misma. Los ángulos en S resultantes al desplegar , son rectos.





2. Trazado de una paralela

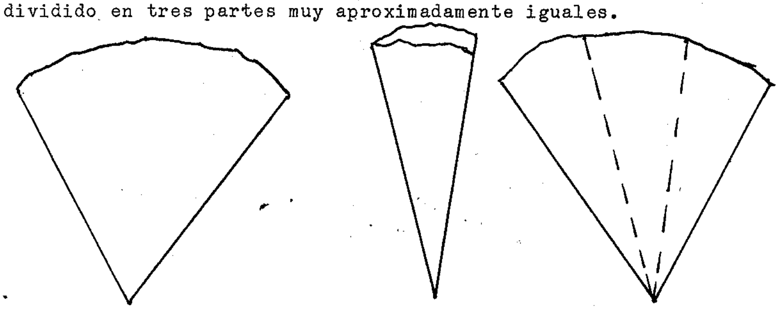
Repite la construcción anterior, pero ahora, respecto a la recta AS. La línea de pliegue es paralela a r.

3. Punto medio de un segmento AB

Pliega haciendo coincidir A con B. La intersección de la línea de pliegue y el segmento, es el punto medio pedido. Dicha línea es la perpendicular al segmento por su punto medio.

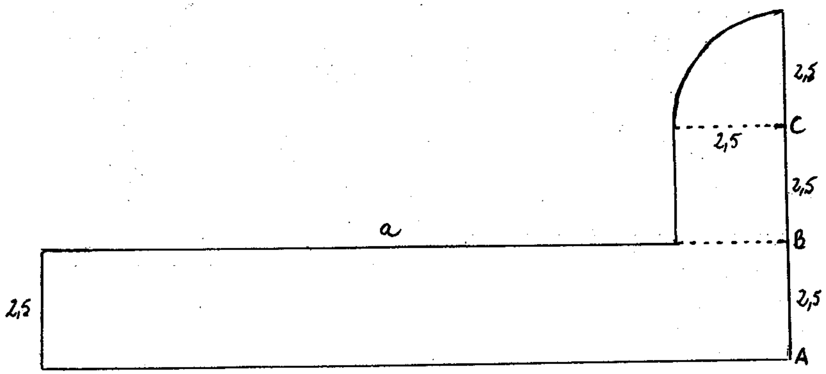
4. Trisecar un ángulo

Dibújalo y recórtalo. Forma un cucurucho tal que, al aplastarlo, resulten dos pliegues coincidentes con los lados del ángulo. Aplástalo con cuidado, despliega, remarca las líneas de pliegue, y tendrás tu ángulo dividido en tres partes muy aproximadamente iguales.



A los matemáticos griegos, grandes geómetras, les trajo de cabeza el problema de la trisección de un ángulo de cualquier amplitud, utilizando sólo el compás y la regla (ésta, sólo para trazar; no para medir) Muchos siglos después, en el XIX, se demostró que tal construcción es, en general, imposible.

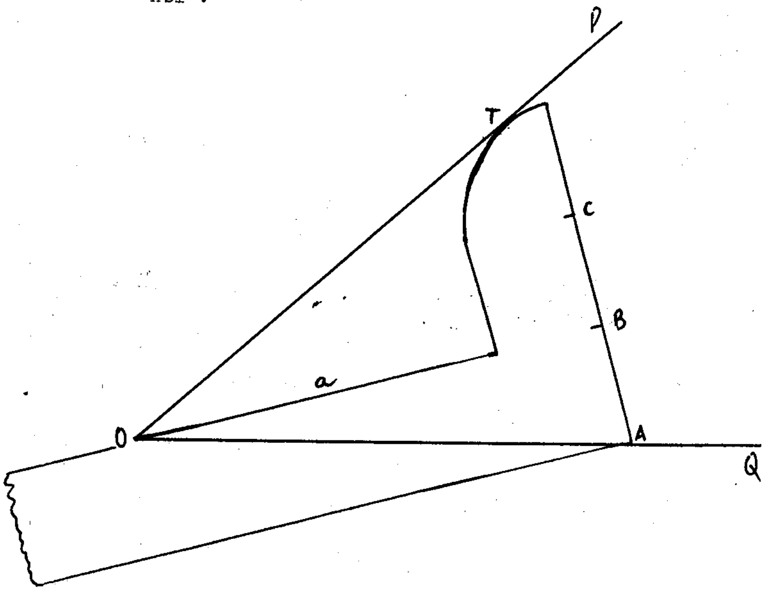
Pero, mientras, construyeron ingeniosos instrumentos de trisección. Exponemos a continuación la forma de hacer y usar uno de ellos.



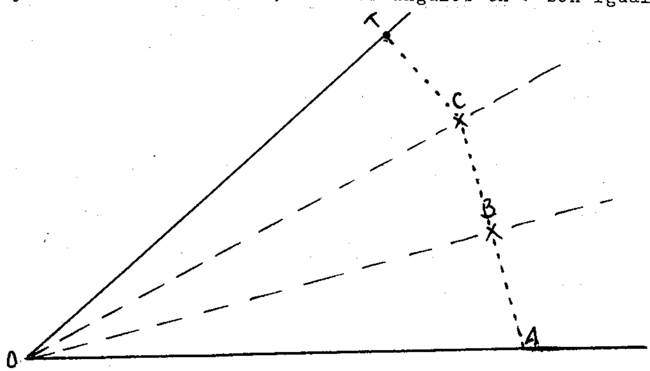
Vamos a trisecar el ángulo *POQ* de la figura. Para ello, colocamos el instrumento de forma que :

- su borde *a* pase por el vértice del ángulo;
- su esquina *A* quede sobre el lado *OQ*;
- su borde en arco resulte tangente al lado *OP*.

Así :



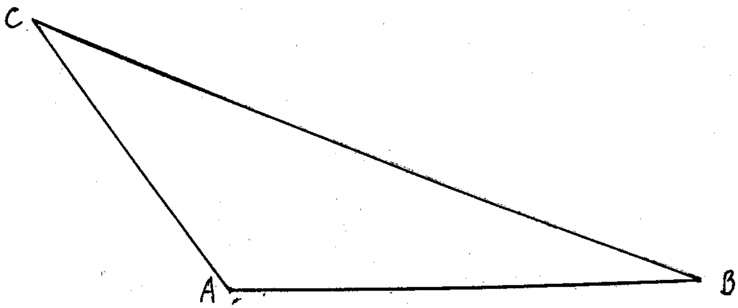
Marcando los puntos donde quedan situados *B* y *C* y el punto de tangencia *T*, resultan iguales (¿por qué?) los triángulos rectángulos *OTC*, *OCB* y *OBA*. En consecuencia, los tres ángulos en *O* son iguales.



2. PLEGANDO UN TRIANGULO

1. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES

Reproduce el triángulo adjunto y recórtalo.(Hemos elegido un- triángulo obtusángulo y escaleno,para que ningún alumno pueda creer que la propiedad que vamos a deducir es exclusiva de un tipo determinado de triángulo;esto es importante).

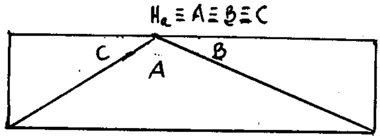


Traza,por plegado,la altura del lado BC. Llama H_a a su pie.

Pliega el triángulo de manera que el vértice A llegue a coin cidir con H_a.

Efectúa otros dos pliegues,uno a la derecha y el otro a la iz quierda,para llevar,respectivamente,los vértices C y B a coincidir con - el punto H_a.

Al final,tiene que quedarte así :



Observa que los tres ángulos en H_a son los tres ángulos interiores del triángulo dado. Y,como sumados dan un llano,podemos asegurar que *"la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°"*

2. RELACIÓN ENTRE EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO Y EL ÁREA DEL REC - TÁNGULO OBTENIDO PLEGÁNDOLO SOBRE SÍ MISMO...SIN DEJAR HUECOS.

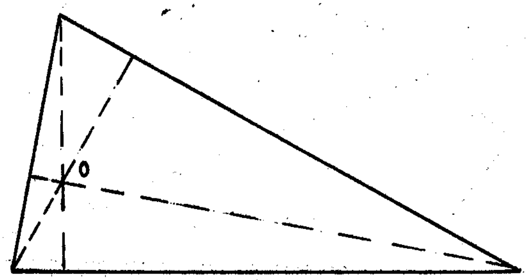
Es evidente que *"el área del triángulo de partida es doble - del área del rectángulo engendrado"*.

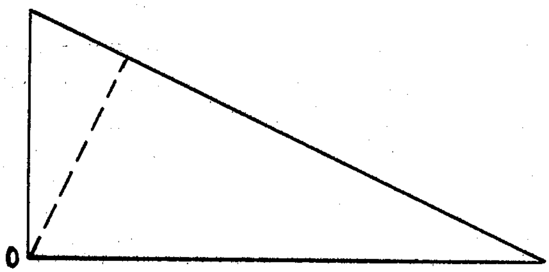
Si el triángulo está cuidadosamente recortado y has hecho los dobleces con esmero, podrás comprobar que si lo apoyas sobre la punta de un lápiz bien afilado, de forma que el baricentro coincida con ella, queda en equilibrio horizontal.

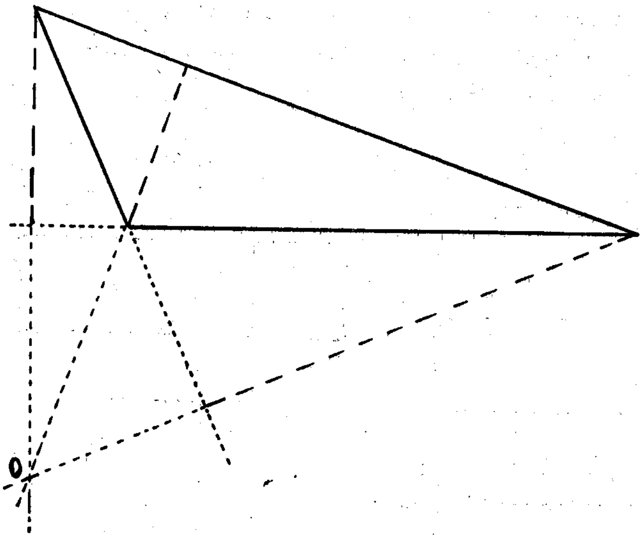
Teniendo en cuenta que el vocablo griego βάρος (báros) significa "pesadez", se explica que el punto en cuestión se denomine "baricentro", esto es, centro del peso o de gravedad.

5. EL ORTOCENTRO O PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LAS ALTURAS

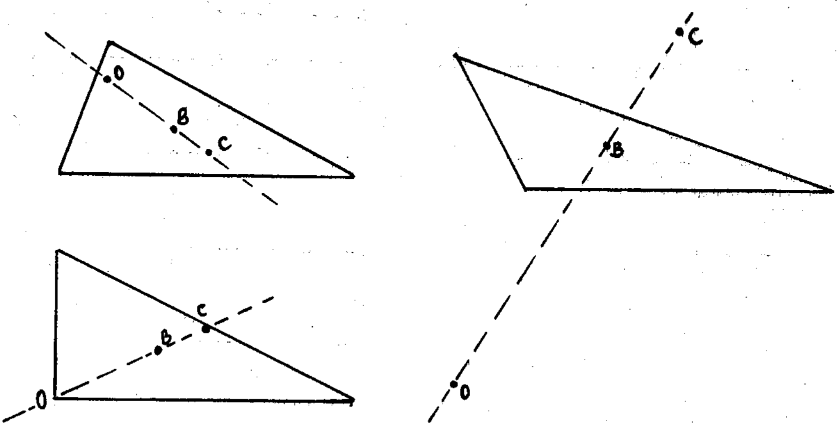
Con la misma técnica del plegado, que ya tienes que dominar, podrás comprobar que también las alturas, o sus prolongaciones, concurren en un punto y que, según el tipo de triángulo, lo hacen así :







6 . EL "CIRCUNS", EL "BARI", EL "ORTO" Y *LEONARD EULER*



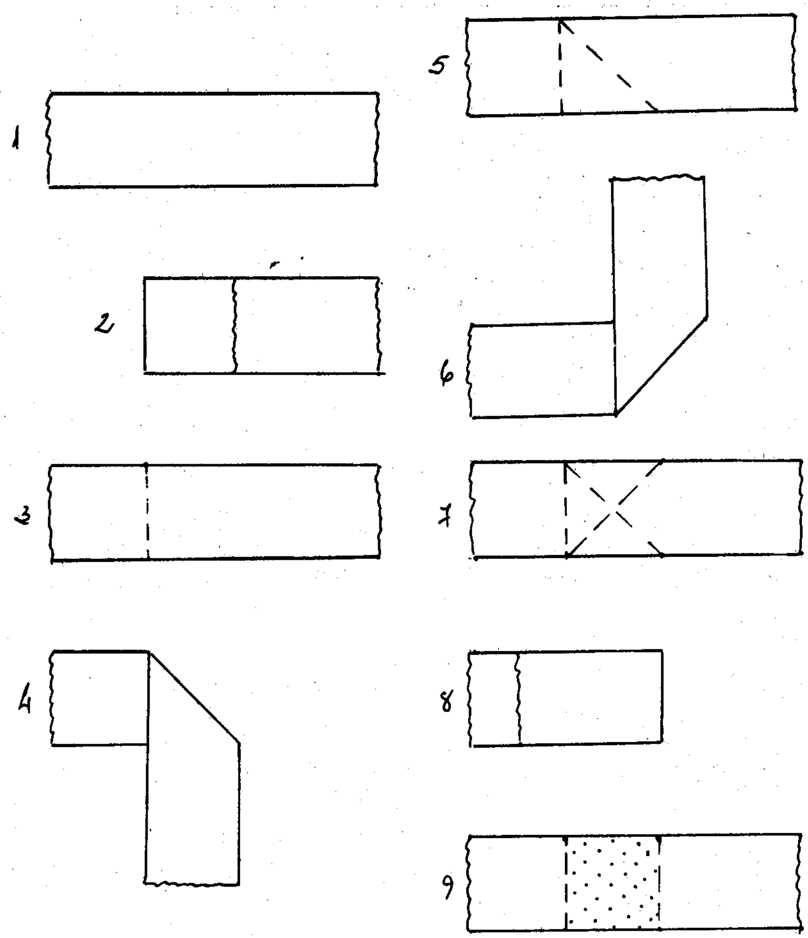
Utiliza una vez más la técnica del plegado y comprobarás lo que, al parecer, descubrió EULER (1707-83) : *los tres puntos están alineados.* Se denomina *recta de Euler* a la que los contiene.

3. CÓMO OBTENER POLÍGONOS REGULARES CON UNA TIRA DE PAPEL

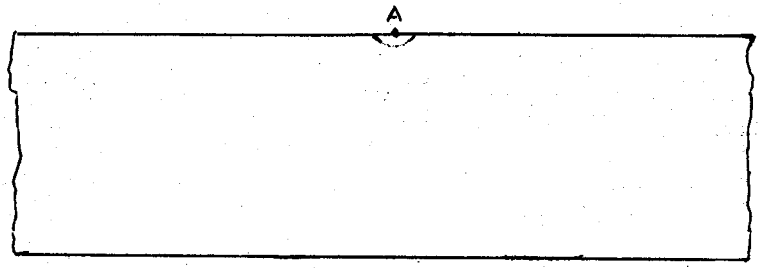
Si consigues unos metros de papel de registradora, te resultará más fácil realizar las construcciones que vamos a indicar. Si no, recorta tiras rectangulares de unos 4 cm de ancho.

1. El cuadrado

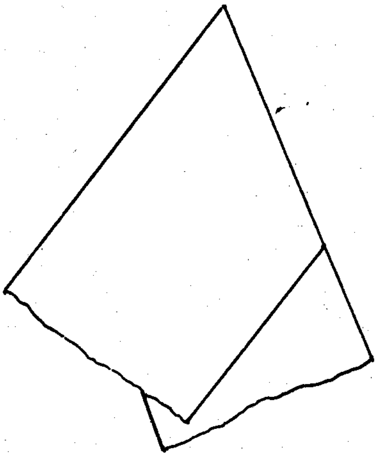
Pliega y despliega siguiendo el orden de las figuras. Los trazos discontinuos señalan las líneas de pliegue.

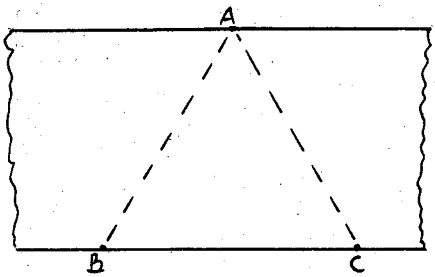


2. El triángulo y el exágono regulares

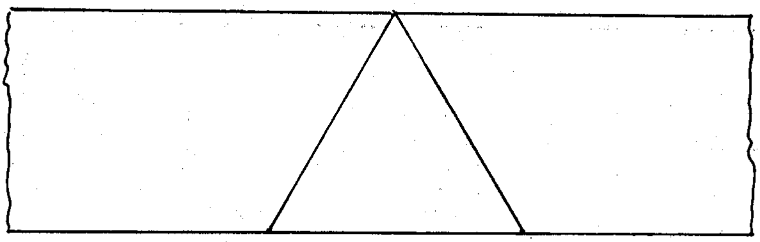


Trisecamos el ángulo llano en *A*, desplegamos y marcamos las líneas de pliegue. Así :



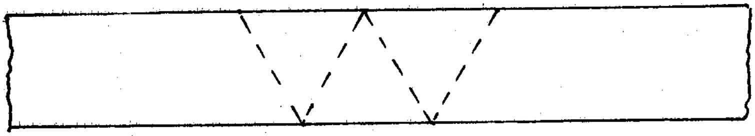


Al ser paralelos los bordes horizontales de la tira, los ángulos *B* y *C* resultan también de 60°.

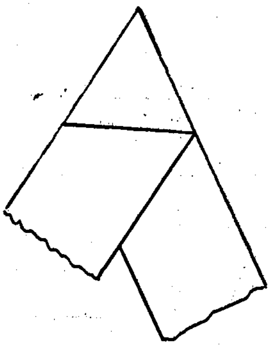


Y, a partir de nuestro triángulo equilátero, vamos a obtener el exágono regular :

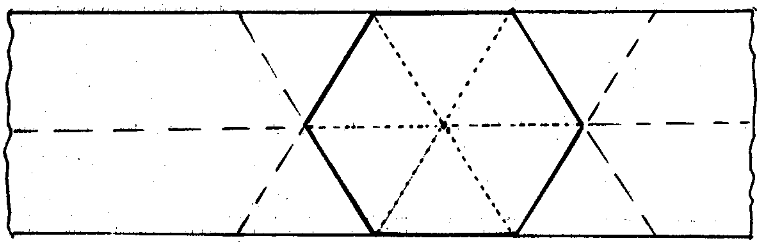
Si doblas por la mitad y marcas los pliegues que se transpa - rentan, queda así:



Dobla ahora por cada uno de los pliegues y obtendrás esto:

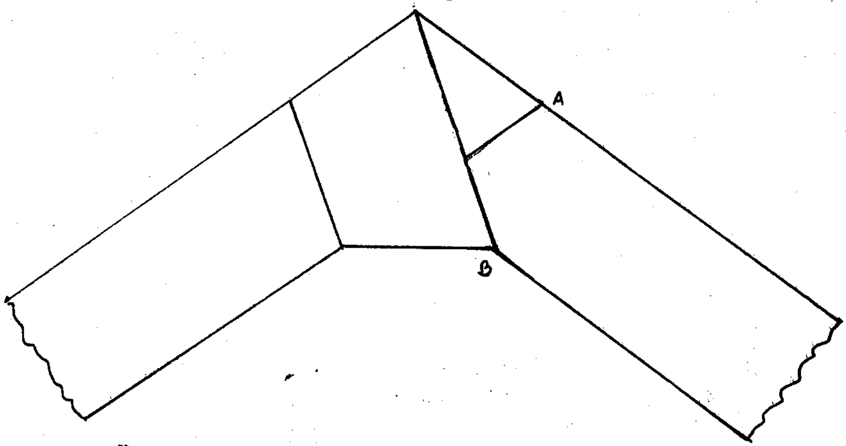


Al desplegar, se obtiene el exágono con sus radios y centro marcados.



3. DE UN NUDO AL PENTÁGONO REGULAR

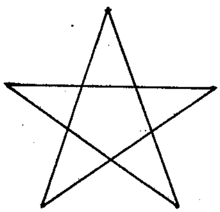
Usa ahora una tira más estrecha, de unos 3 cm, y unos 30 cm de largo. Con ella, haz un nudo normal (como si de un hilo se tratara). Si pliegas con cuidado, sin arrugar el papel, obtienes esto :

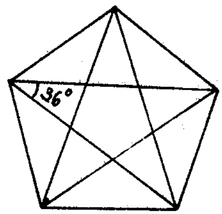


Y, uniendo los puntos señalados con letras, un pentágono regular. Esto es lo que querías, ¿no?

4. EL PENTAGRAMA PITAGÓRICO

Trazando las diagonales de un pentágono regular se obtiene el *pentagrama pitagórico*, que los seguidores de Pitágoras utilizaban para reconocerse y como símbolo de salud.





Es de observar que:

- El pentágono central también es regular.
- Todos los ángulos son múltiplos enteros de 36^{o}.

El afán de encontrar proporciones exactas entre magnitudes geométricas, llevó a los pitagóricos a uno de los descubrimientos matemáticos más importantes, el de la inconmensurabilidad de ciertos segmentos.

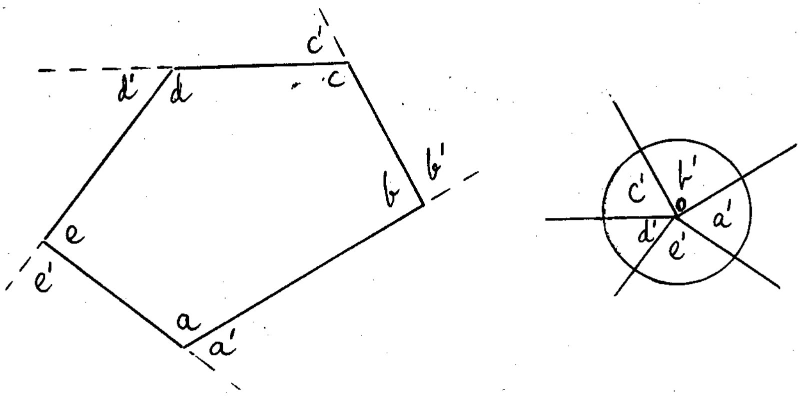
4. NUMEROS EN POLÍGONOS CONVEXOS

1. SUMA DE LOS ÁNGULOS EXTERIORES

Dibuja un polígono convexo cualquiera. Prolonga sus lados en un mismo sentido. Haz centro en cada uno de los vértices y, con un mismo radio, traza los arcos correspondientes a cada ángulo exterior.

Si trasladas ahora paralelamente todos los arcos, de forma que tengan por centro un punto común *O*, cada uno empezará donde termina otro y formarán entre todos una circunferencia.

En consecuencia, *la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es 360°*.



2. SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES

$$\left.\begin{array}{l} a = 180^\circ - a' \\ b = 180^\circ - b' \\ c = 180^\circ - c' \\ d = 180^\circ - d' \\ e = 180^\circ - e' \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a + b + c + d + e = 5 . 180^\circ - (a' + b' + c' + d' + e') = \\ 5 . 180^\circ - 360^\circ = \\ (5 - 2) . 180^\circ \end{array}$$

Y, en general, si es n el número de lados :

Suma de los ángulos interiores $= (n - 2) \, . \, 180^\circ$

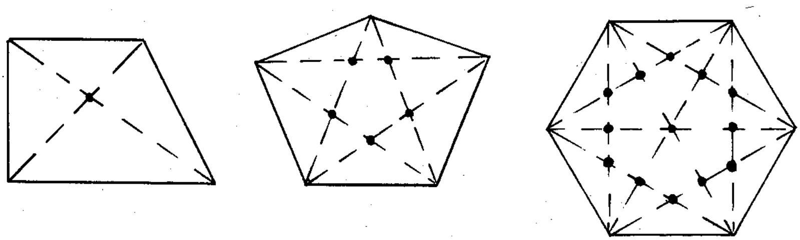
3. NÚMERO DE DIAGONALES

Sea, por ejemplo, un heptágono. De cada vértice parte una diagonal hacia los vértices que quedan al descontar el propio vértice y sus dos adyacentes, esto es, de cada uno de los siete vértices salen 7-3 diagonales. ¿Tiene, entonces, 7x4 ? No, porque, pongamos por caso, la que une *A* con *D*, une *D* con *A*. Hay que considerar, por tanto, sólo la mitad, es decir, 7x4 / 2 = 14

Generalicemos esto, repitiendo el razonamiento anterior para un polígono de *n* lados, es decir, de *n* vértices :

- Restando 3, resulta $n-3$
- Multiplicando por el número de vértices, es $n(n-3)$
- Dividiendo entre 2 : $n(n-3) / 2$

4. CÁLCULO DEL NÚMERO DE PUNTOS INTERIORES DE INTERSECCIÓN DE LAS DIAGONALES



Hasta aquí, como ves, es fácil. Pero, a partir del heptágono, las cosas empiezan a liarse. Vamos a buscar un camino más cómodo y general.

Un punto de intersección interior es determinado por 2 diagonales y, cada una de éstas, por 2 vértices. Por tanto, *cada punto viene determinado por 4 vértices.*

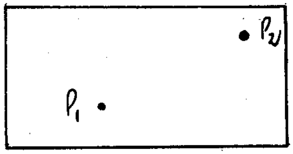
Se trata, pues, de calcular *el número de combinaciones de n elementos tomados 4 a 4.*

En el caso del heptágono, es : $C_{7,4} = \dfrac{7.6.5.4}{4.3.2.1} = 35$

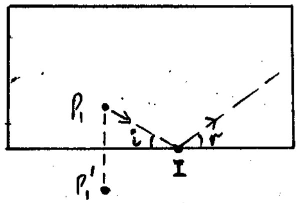
En un decágono, $C_{10,4} = \dfrac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$

5. JUGANDO AL BILLAR

1. ¿A QUÉ PUNTO DE UNA BANDA HAY QUE APUNTAR PARA QUE, JUGANDO SIN EFECTOS, UNA BOLA REBOTE Y SIGA EN DIRECCIÓN A OTRA?



Jugar "sin efectos" significa que el ángulo de rebote r resulte igual al de incidencia i. O, lo que es lo mismo, que al rebotar la bola en un punto cualquiera I de una banda, la dirección de rebote pase por el punto P_1' simétrico del punto P_1 en donde estaba situada.



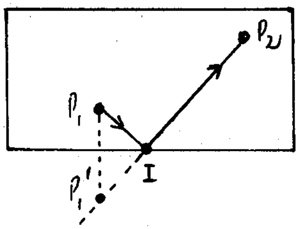
La otra condición es que la línea de rebote pase también por el punto P_2 en el que reposa la segunda bola.

¿Qué tenemos que hacer para que ambas condiciones queden satisfechas? Simplemente esto :

1º. Ingeniárnoslas para señalar el punto P_1' fuera de la mesa.- Por ejemplo, pidiéndole a un amigo que se sitúe a la distancia precisa y, agachadito, se coloque una bola sobre su testa.

2º. Trazar la visual P_1' P_2 .

Así, el punto de incidencia I buscado vendrá determinado por la intersección de la línea de banda con la visual.

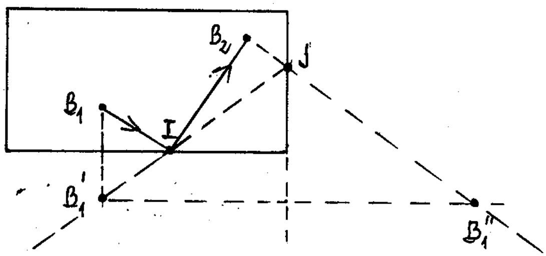


2. Un poco más complicado: rebotando en dos bandas

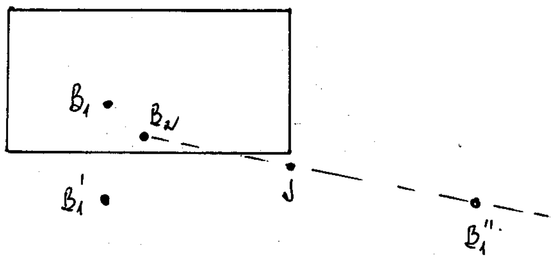
Sabemos ya que si es B_1 el punto donde está situada la primera bola, ésta saldrá de la primera banda como si viniera del simétrico B_1'.

Por la misma razón, al incidir en un punto J de otra banda, será rechazada como si partiera del punto simétrico de B_1', que llamaremos B_1''

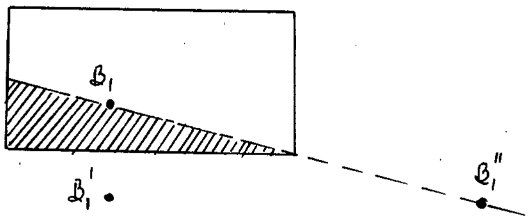
Entonces, la visual $B_1''\ B_2$ en su intersección con la segunda banda, determina el punto de contacto J. Y la dirección $B_1'J$, localiza el punto de primera incidencia I al atravesar la primera banda.



Pero hay una pega: que la visual $B_1''B_2$ determine un punto J *fuera de la mesa*. Así :



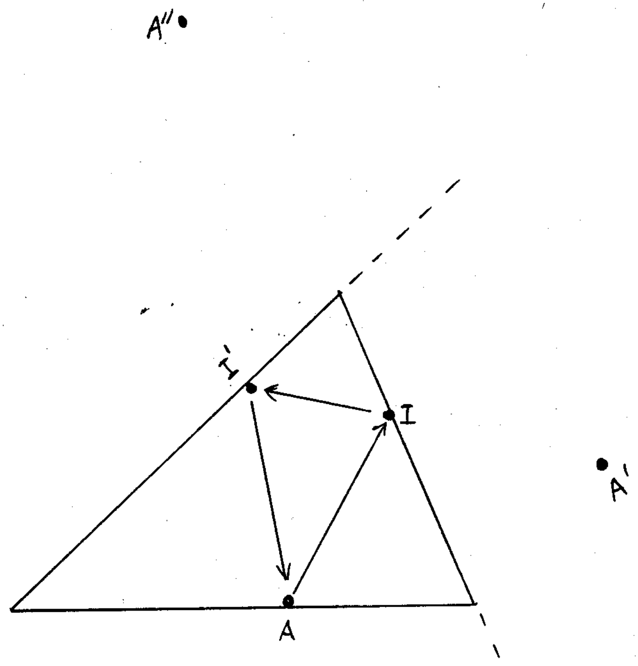
En otras palabras: para una determinada situación B_1 de la primera bola, hay una zona del billar en la que la segunda no puede estar. Es la rayada en el siguiente gráfico:



3. ¿Y SI EL BILLAR ES TRIANGULAR?

Supongamos una mesa de billar con forma de triángulo acutángulo. ¿En qué dirección debe tirarse una bola, situada junto a una banda, para que, después de rebotar en las otras dos, regrese al punto de partida?

Cabe aplicar aquí la misma técnica de los simétricos:



1º) Determinamos el punto A', simétrico del de salida A.

2º) Hallamos A'', simétrico de A'

3º) Trazamos la visual desde A'' hacia la bola. Su intersección con la banda de la izquierda nos da el segundo punto de contacto I'

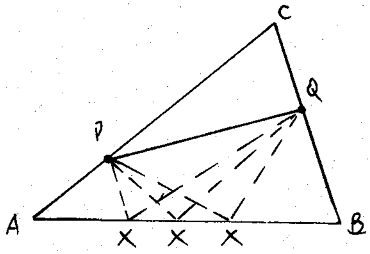
4º) Por último, trazamos la visual desde A' a I'. La intersección con la banda de la derecha determina el punto I al que hay que dirigir la bola.

Siempre que el triángulo sea acutángulo, el problema tiene solución. ¿Por qué?

6. RESOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS GEOMETRICOS APLICANDO LA ESTRATEGIA DEL BILLAR

1. DADOS DOS PUNTOS P , Q DE DOS LADOS DE UN TRIÁNGULO ACUTÁNGULO, INSCRIBIR EN ÉSTE OTRO TRIÁNGULO, CON VÉRTICES EN P, Q, Y CUYO PERIMETRO SEA MÍNIMO.

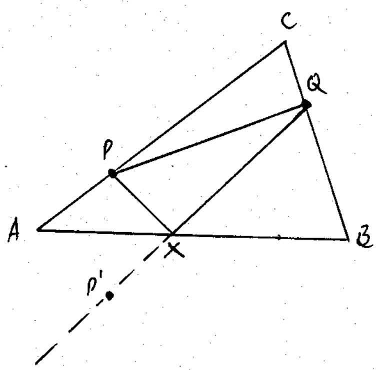
Se trata de determinar la situación del tercer vértice X. Veamos :



1º) La suma de $\overline{PX}$ y $\overline{XQ}$ ha de tener el mínimo valor posible.

2º) Para que esto se cumpla, X ha de ser la intersección de la visual dirigida desde el simétrico P' de P respecto al lado AB, con éste. (Recuerda que "la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado").

Por tanto, como si de un problema de billar se tratara, localizamos el simétrico P' de P y trazamos la visual $P'Q$. Su intersección con el lado AB nos da el vértice buscado.



2. El triángulo órtico

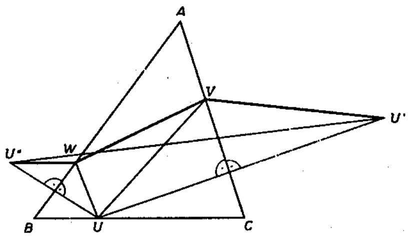
Consideremos el problema anterior pero, ahora, sin prefijar ninguno de los vértices del triángulo interior. ¿Dónde han de situarse éstos para que resulte el mínimo perímetro?

La solución es construir el que suele denominarse *triángulo órtico*, que tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo circunscrito.

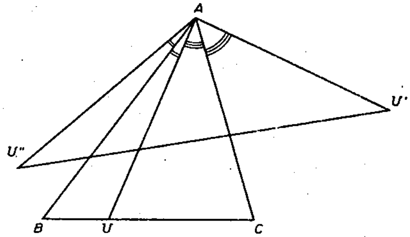
Tomamos del libro del profesor De Guzmán "MIRAR Y VER" (Alhambra, 1976) lo que sigue :

" El triángulo órtico resuelve también el problema siguiente : Dado un triángulo acutángulo ABC, hallar el triángulo de perímetro mínimo que tiene sus vértices sobre los lados de ABC.

Consideremos un triángulo inscrito cualquiera UVW y hagamos reflejar U sobre AB y AC, obteniendo U' y U''.



Es claro que siendo WU y WU'' de la misma longitud, así como VU y VU', resulta que el perímetro del triángulo UVW es igual a la suma de las longitudes de los segmentos U''V , WV y VU', y, así, mayor o igual que la longitud del segmento *U''U'. Pero la longitud del segmento U''U' se calcula fácilmente.*



Obsérvese que el ángulo U''A U' es el doble del ángulo A y que AU'' y AU' son iguales en longitud a AU. Así, U''U' mide 2 AU senA.

- ¿Cuándo será mínima esta medida? Claramente, cuando AU sea mínima, es decir, cuando U coincida con H_a. Así sabemos que cualquier triángulo inscrito tiene un perímetro mayor o igual que 2 H_a senA . Pero observemos que para el triángulo órtico la longitud U''U es igual ahora al perímetro (la línea quebrada anterior U''WVU' no es ahora quebrada, sino recta), y así su perímetro es precisamente 2 H_a senA. Esto demuestra que el triángulo órtico es un triángulo inscrito en ABC de perímetro mínimo. Fácilmente se ve que no puede haber otro triángulo inscrito con el mismo perímetro. "