

EXPERIMENTOS DE GEOMETRIA (I I)

(Notas sobre un seminario impartido
 por el profesor MIGUEL DE GUZMAN con
 ocasión de las VII Jornadas de la Socie-
 dad Canaria de Profesores de Matemáticas)

Redacción, dibujos y

añadidos (en cursiva) : M. Fernández Reyes

7. ¿SE CONSERVA LA FORMA AL CORTAR UN RECTANGULO POR LA MITAD?

Aclaremos previamente que entendemos por "conservar la forma" - no sólo que las figuras resultantes tengan también forma rectangular, lo cual es obvio, sino que sean semejantes a la primitiva, esto es, que se conserve la razón lado mayor/lado menor.

Haremos siempre los dobleces por el lado mayor y sólo reproduciremos una de las mitades resultantes.

1ª experiencia:

Partiremos de una hoja de papel de 32,6 cm x 22,7 cm (dimensiones de los originales de imprenta de NUMEROS), que denominaremos "hoja 0". Llamaremos "hoja 1" y "hoja 2", respectivamente, a las mitades resultantes del primer y segundo cortes.

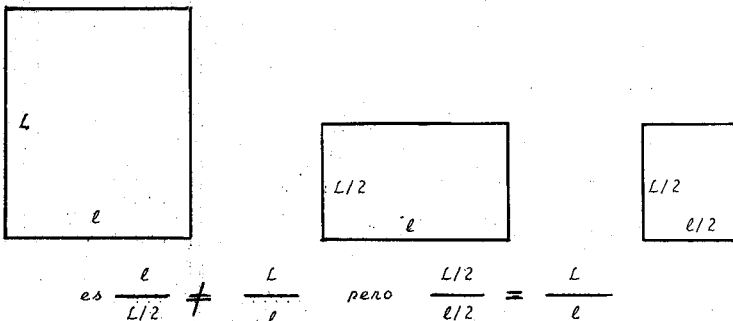
La razón lado mayor(L) / lado menor(l) es $32,6 : 22,7 = 1,43...$
 En la hoja 1 es $L/l = 1,39...$, es decir, no se conserva la forma.

¿La conservará la hoja 2 respecto a la 0? Veamos.

Ahora es $L=16,3$ y $l=11,35$ y obtenemos de nuevo $L/l = 1,43....$,

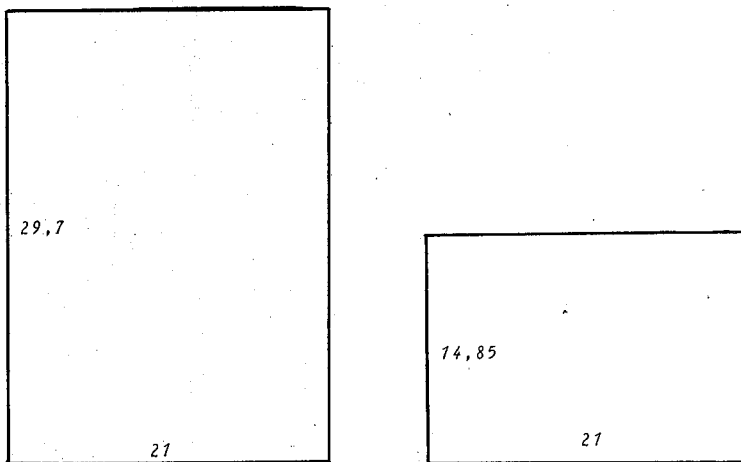
es decir, las hojas resultantes de hacer la segunda división sí que conser-
van la forma de la hoja primitiva.

Es fácil demostrar que esto ocurre siempre, cualesquiera que sean las dimensiones del rectángulo dado. En efecto,



2ª experiencia:

Reproducimos aquí, a escala, una hoja del tamaño denominado DIN A4 (29,7 cm x 21 cm) y su correspondiente mitad.



En este caso, la relación L/l permanece constantemente igual a -
1,4142135... Es éste un número conocido: el valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Puede pensarse entonces que cualquier rectángulo en el que la razón entre sus lados sea $\sqrt{2}$, conserva la forma. Veamos si en efecto es así.

$L / l = 1 / (L/2) \Rightarrow L^2 / 2 = 1^2 \Rightarrow L^2 / 1^2 = 2 \Rightarrow L / 1 = \sqrt{2}$
y también

$L / l = \sqrt{2} \Rightarrow L L / l l = 2 \Rightarrow L L = 2 l l \Rightarrow L / l = l / (L/2)$

Podemos, pues, afirmar que: Un rectángulo conserva su forma si y sólo si sus lados están en la relación $\sqrt{2}$.

Creemos que estas actividades, como tantas otras planteadas en las siempre interesantes charlas del profesor De Guzmán, son algo más que curiosidades. La que nos ocupa, por ejemplo, puede ser de gran utilidad en clase para el estudio de la proporcionalidad geométrica. Son, además, fuentes inspiradoras de otros "juegos" que, sin restarle rigor a la enseñanza de la Geometría, la hacen más entretenida y accesible.

He aquí algunos problemas en torno al "principio de conservación de la forma rectangular" que, además, obligan a efectuar mediciones y a manejar conceptos y cálculos importantes:

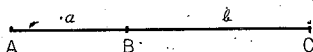
1. Averigua si la cubierta de tu libro de Matemáticas es o no "conservadora".
2. ¿Lo es una hoja del formato DIN A5 (21 x 14,8)?
3. Los siguientes pares representan las dimensiones de dos láminas rectangulares : (7,071 , 5) , (3 / $\sqrt{32}$, 3/4) . ¿ Conservan ambas la forma?
4. Pedro sostiene que ha dibujado un rectángulo que conserva siempre su forma. Un amigo desea comprobarlo. Obtiene la relación $2 / \sqrt{2}$. ¿ Es cierto lo que afirma Pedro?
5. Halla la hipotenusa de un triángulo tal, que si se construye otro igual sobre ella, resulte un rectángulo de área 24 y que conserve la forma.
6. El perímetro de una lámina de aluminio (2,65 g/cm³), cortada para que conserve la forma, es de 2,41 m. Tiene 1 cm de espesor. Calcula su volumen y peso.
7. Demuestra que "en todo rectángulo que conserve la forma, la diagonal es igual al producto de $\sqrt{3}$ por el lado menor".

8. EL RECTANGULO AUREO

En atención al lector no iniciado en el fascinante mundo de lo armónico, y con el propósito de animarle a traspasar sus fronteras, voy a esta breve introducción que le hará ver la relación íntima entre la Matemática y la Armonía, esa "especie de música atribuida a las cosas bien ordenadas y especialmente a la naturaleza", "conveniente proporción y concordancia de unas cosas con otras", "acorde perfecto entre las partes de un todo". (Descansa, lector amigo. Lo que sigue no va a ser de esta guisa).

La división de un segmento en "media y extrema razón" interesó ya a los matemáticos griegos anteriores a Euclides. Este la describe en su Proposición VI, 30 y, 2000 años después, empezó a denominarse "sección áurea de un segmento".

Veamos esto con terminología y notación modernas.



Se dice que un punto B divide a un segmento AC en extrema y media razón, si la razón entre el segmento menor resultante y el mayor, es igual a la razón entre éste y el dado, esto es, si $a/b = b/(a + b)$.

De esta igualdad resulta

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \implies b^2 - ab - a^2 = 0 \implies$$

$$b = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$$

Tomando la raíz positiva es

$$\frac{b}{a} = \frac{(a + a\sqrt{5}) / 2}{a} = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1,618034\dots, \text{ que suele}$$

designarse por Φ (phi) o τ (tau), y es llamado "número de oro". (Algunos autores llaman así a $1/\Phi = 0,618\dots$).

A la proporción que engendra a Φ la denominó Paccioli "divina proporción"; Kepler, "sección divina" y Leonardo da Vinci, "sección áurea".

Decía Kepler: "La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de

ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya".

¿Por qué tan delirante entusiasmo? ¿Qué justifica tan bien sonantes calificativos?

Antes de comentar algunas de las razones de tal ϕ -delirio, recordemos algunas de las propiedades del Número de Oro que, por sí solas, hablan de su notable interés matemático:

- La serie ϕ .- En una progresión geométrica creciente (decreciente) de razón ϕ , un término cualquiera es igual a la suma de los dos precedentes (siguientes).

- ϕ como límite.- Nathan Altshiller demostró en 1917 que

$\lim \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}}$ es igual a la raíz mayor de la ecuación

$$x^2 - x - a = 0, \text{ lo que permite demostrar que}$$

$$\phi = \limite \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

- Puede demostrarse también que

$$\phi = 1 + \limite \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

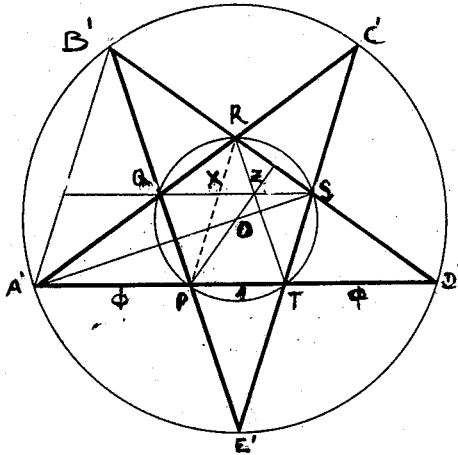
$$\frac{1}{\phi} = \limite \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

- ϕ y la sucesión de Fibonacci.- La razón entre dos términos consecutivos de esta serie tiende hacia ϕ .

- Hay, por último, relaciones entre ϕ , la serie de Fibonacci y la espiral logarítmica que, por no alargar excesivamente este punto, no tratamos.

Pasamos ya a enumerar casos en que nuestro número dorado es el determinante de la armonía de formas, del equilibrio, de la belleza. E, incluso, de la conveniencia, de lo útil.

* Aparece repetidamente en el PENTAGRAMA (pentágono estrellado, triple triángulo o estrella de cinco puntas), que los pitagóricos usaban como símbolo de salud y vida.



Tomando PQ como unidad de medida y llamando R y r respectivamente a los radios de los círculos circunscritos, estas son algunas de las propiedades fácilmente verificables:

- . Los segmentos PA' y TD' tienen por medida ϕ .
- . La razón entre una apotema del pentágono interior y el radio r es $\phi/2$.
- . El cuadrado de ϕ es igual al cociente entre $OA' = OB' = \dots$ y r .
- . La razón OA' / OA y sus equivalentes dan el doble de ϕ .
- . Los segmentos XZ , RX , RS , $B'R$, $B'S$ y $B'D'$ forman una serie ϕ .
- . ϕ es la medida de las diagonales del pentágono.
- . El lado del pentágono exterior $A'B'C'D'E'$ es ϕ^2 .
- . También tiene este valor la razón R/r .
- . Si X es la intersección de dos diagonales, por ej., PR y QS , es $SX/XQ = \phi$

* Ha sido conscientemente empleado como canon en los grandes momentos de la Pintura, Arquitectura y Escultura. Sirvan de ejemplos la fachada del PARTENÓN, las obras de FIDIAS, el DORÍFORO de Policleto, la SAGRADA FAMILIA de Miguel Angel y LAS HILANDERAS de Velázquez. Y, en nuestros días, las construcciones de LE CORBUSIER.

En el caso particular de las estatuas clásicas, el ombligo divide su altura total según la sección áurea (dist. ombligo suelo entre dist. ombligo punto más alto de la cabeza igual 1,6....)

* En los niños recién nacidos el ombligo divide al cuerpo en dos partes iguales. Esta relación va aumentando hasta la adultez y, en las personas sanamente desarrolladas, alcanza una media de 1,625 en los varones y de 1,6 en las hembras. ¡Otra vez!

Esta división por el ombligo es la manifestación más conocida del número de oro respecto al cuerpo humano, pero aparece también en las demás proporciones. Por ejemplo, entre la punta de la nariz y el final del mentón, y éste y la comisura de los labios.

Y no es esto privativo del hombre. Se da también en muchas partes de otros animales. En las patas delanteras de un caballo aparece una sucesión de tres términos consecutivos de una serie ϕ .

* En el reino vegetal es también protagonista un pariente de ϕ . - Se trata en este caso del denominado "ángulo ideal" (α), relacionado con el "dorado" así: $\alpha = 360^\circ / \phi^2 = 137^\circ 30' 27''$,95

Dicho ángulo proporciona la exposición solar vertical óptima, es decir, es el ángulo constante que deben formar entre sí las hojas para asegurar un máximo de luz. Y no es ésta la única presencia de nuestro ϕ en Botánica.

Vemos, pues, que no sólo en la creación humana, donde el artista se vale de la "sección divina" deliberadamente, con base en su sentir de que engendra formas armoniosas, sino también donde el hombre no ha puesto su mano, aparece aquella. Los que creen en un Creador, a Él se lo atribuirán.

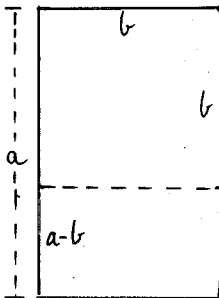
A los que sólo hablamos de Naturaleza, nadie podrá nunca desvelarnos este gran misterio.

Espero, lector, que esta introducción, que en vano prometi brevemente, te aliente a adentrarte, si es que no lo has hecho ya, en este campo casi mágico de la Matemática. Por mi parte, quiero agradecer aquí a la profesora Adela Salvador el haberme dado a conocer.

Y, sin más, volvamos al punto concreto que titula este apartado :
EL RECTANGULO AUREO.

Se denomina así a un rectángulo tal que cortándole un cuadrado de lugar a otro rectángulo que conserve la forma del primitivo. Los griegos pensaban, no sin razón, que un rectángulo así es particularmente agradable a la vista y, por ello, lo utilizaron con profusión en sus construcciones. Averiguemos cuál ha de ser la relación entre sus dimensiones:

Como hemos visto, ha de conservarse la razón lado mayor/lado menor o, lo que es igual, la razón lado menor/lado mayor. Trabajaremos en esta ocasión con esta última. Será



$$b/a = (a-b)/b \Rightarrow b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$b^2 + ab - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

y tomando la raíz positiva, resulta

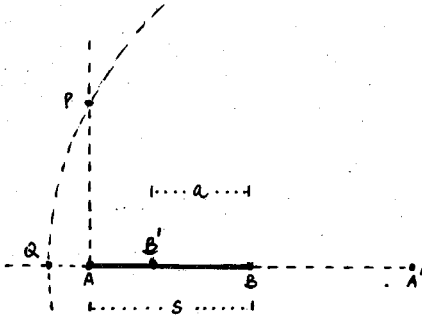
$$b/a = \frac{(a\sqrt{5} - a)/2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1/\phi = 0,618033..$$

o bien, $a/b = \phi$.

En conclusión, "el lado menor ha de ser la sección áurea del lado mayor". En otras palabras, a efectos prácticos, "el lado mayor ha de ser 1,618034... veces el menor".

Veamos ahora cómo construir geoméricamente la sección áurea(a) de un segmento dado(s).

Puede seguirse este proceso:



- 1º Se prolonga el segmento dado $s=AB$ en una longitud igual, con lo que resulta el AA' .
- 2º Se levanta una perpendicular a AA' por su extremo A .
- 3º Sobre ella, se marca un punto P tal que resulte $AP=s$.
- 4º Haciendo centro en A' , se traza un arco que pase por P y corte a la prolongación hacia la izquierda de s . Sea Q el punto de corte.
- 5º Se marca el punto medio B' del segmento QB . Entonces, la sección áurea buscada es $a=B'B$

Justificación:

$$PA'^2 = s^2 + (2s)^2 \Rightarrow PA' = \sqrt{5s^2} = s\sqrt{5}$$

$$QB = QA' - NP = s\sqrt{5} - s = s(\sqrt{5} - 1)$$

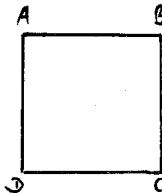
Como, por definición, es $a = s(\sqrt{5} - 1) / 2$, es

$$a = QB / 2 = B'B \text{ c.q.d.}$$

Para construir geoméricamente un rectángulo áureo conocido su lado mayor, podemos seguir el camino anterior. ¿Cómo hacerlo si nos dan el lado menor?

¿Y cómo construirlo partiendo del cuadrado que es parte de él?

Veamos :

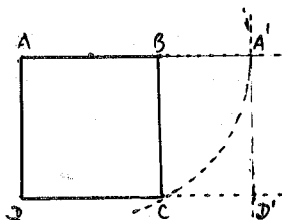


Determinamos el punto medio M del lado AB .

Con centro en M y radio MC , trazamos un arco que parte de C y -
conta a la prolongación del lado AB , a la derecha de B . Llamamos A' al pun-
to de intersección.

Por A' trazamos una perpendicular a la derecha del lado BC . Lla-
mamos D' al pie de dicha perpendicular.

A, A', D' y D configuran el rectángulo búneo que pretendíamos.



Para terminar propondré algunos más de los problemas que se me-
han ido ocurriendo al paso de la redacción de este trabajo. Tal vez resul-
ten interesantes a alumnos de 8^o. de Básica y/o 1^o de Medias. Aunque, claro,
cabe la posibilidad de que exclamen "armónicamente", a coro: ¡No te enro-
lles, tío!

8. Un profesor entregó a cada uno de sus alumnos una colección-
de 6 láminas rectangulares de diferentes tamaños y les pidió que cada cual
averiguara si había o no rectángulos semejantes en su colección. Les hizo
saber que disponían del tiempo que necesitaran y podían usar el cálculo e
instrumentos de dibujo y medida.

Uno de los alumnos le pidió una hoja igual en tamaño a la ma-
yor de las que poseía y, sin utilizar ni siquiera un lápiz, dijo, a los po-
cos segundos, que en su colección tenía una pareja y un trío de rectángu-
los semejantes y otro no semejante a ninguno de los demás. Era cierto.

¿Cómo lo averiguó?

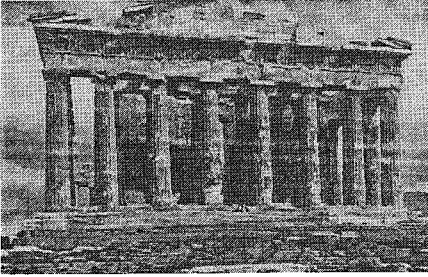
9. Utilizando solamente un compás, comprobar que un rectángulo-
dado es búneo.

10. Demostrar que dos rectángulos búneos cualesquiera son seme-
jantes.

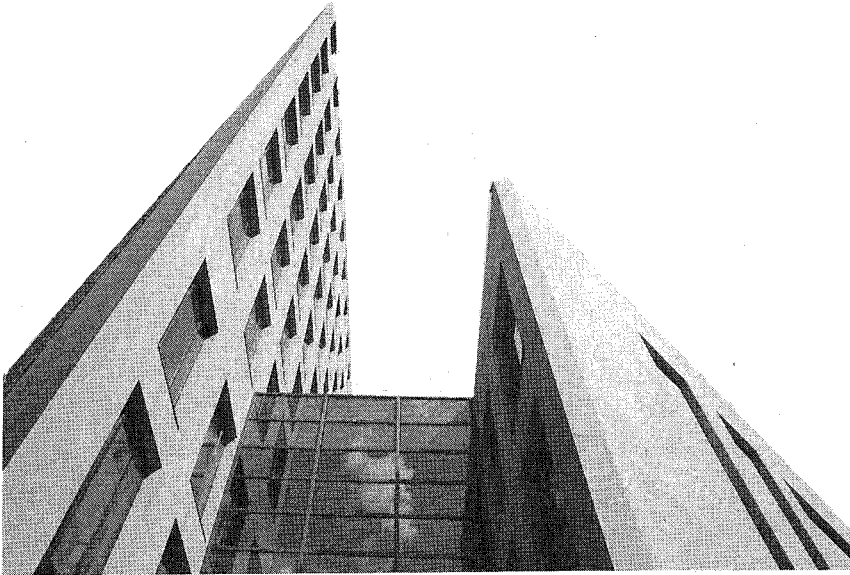
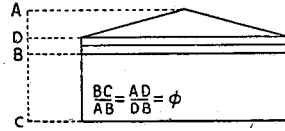
11. Demostrar que $1/\phi = -\phi$.
12. Demostrar que el número de oro es el único número que disminuido en una unidad da su inverso.
13. Busca el número dorado en tabletas de chocolate, cajetillas de cigarrillos, marcos de cuadros, barajas, Seguro que lo encontrarás. En la página siguiente aparece ; compruébalo.
14. Búscalo en el cuerpo de un compañero(a) .
15. Ingéniate las para dibujar con la mayor precisión posible los perfiles de varios huevos de gallina. Encuádralos en rectángulos e investiga.
16. Justifica la construcción de la página anterior.

LA ÚLTIMA PARTE DE ESTE TRABAJO INCLUIRÁ :

- 9 . LA MEJOR IDEA DE ARQUÍMEDES.
- 10 . UNA CINTA MÁGICA.
- 11 . RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS
y, si contamos con la amabilidad de los lectores,
- 12 . PROBLEMAS ORIGINALES PROPUESTOS POR LOS LECTORES DE "NUMEROS".



EL PARTENON



VISTA DE LA SEDE CENTRAL DE LA
CAJA DE AHORROS DE CANARIAS