

## “Una propuesta de enseñanza de la fracción y de los números racionales positivos implementando las figuras musicales. Experiencia de caso en una escuela indígena nasa”

Pablo Esteban Arias Vargas  
pabloestebanariasvargas@hotmail.com  
Erika Liseth Hernández Hernández  
erika-col@hotmail.com  
Estudiantes de Licenciatura en  
Educación Básica con Énfasis en Matemáticas  
Universidad Distrital Francisco José De Caldas  
Coautor Darío Pame<sup>1</sup>

### Introducción

*Durante las prácticas de enseñanza de las matemáticas y más específicamente de la fracción, surge la intención de incluir objetos musicales que permitan un entendimiento de comportamientos tanto en las matemáticas como en la música, en la que considera que las dos admiten una estrecha relación de complementación.*

*En éste sentido se pretende que ésta propuesta se incluya en las clases de matemáticas de las escuelas de Tierradentro, en las que se genera una gran admiración por la música ancestral (flautas caucanas) y por la música de los Andes.*

*La propuesta busca evidenciar la relación que existe entre la música y el concepto de fracción en las matemáticas, de esta forma se pretende que por medio la comprensión de una unidad musical como tal (en éste caso la redonda O) se entienda la reciprocidad que se da entre las equivalencias de las demás figuras musicales estrictamente relacionadas con la unidad inicial.*

*Sin embargo no solo ocurre esto con la descomposición binaria de las figuras musicales, sino también sucede lo mismo con la implementación de los compases al iniciar una obra musical.*

*Es así como se hará una propuesta la cual incluya aspectos musicales para la enseñanza de la fracción, esto se hará a partir de la interacción con un profesor indígena de matemáticas y músico, el cual facilite la implementación de susodicha propuesta.*

### Objetivos:

*General:* Crear una propuesta de enseñanza del tema fracción en el que se incluyan nociones de música tales como la descomposición binaria de las figuras musicales.

*Específicos:* Hacer evidente la relación que se suscita entre la música y las matemáticas, en el sentido de la progresión geométrica dada en la descomposición binaria y su relación con la conformación de compases.

---

<sup>1</sup> Profesor de la Escuela Cruz de Togoima. Resguardo Indígena La Cruz de Togoima. Tierradentro Cauca



### Planteamiento del problema:

Durante el proceso de entendimiento de las matemáticas y de la música, se genera un gran campo de acción entre el número racional como objeto matemático y comportamientos de aspectos musicales, en éste sentido se abren las puertas para incluir la relación entre la música y las matemáticas, dejando entre ver que la medida, el ritmo, la lectura de las notas y las figuras musicales, son las primeras impresiones con las que se debe enfrentar cualquier amante de la música, y en el sentido en el que confronte estas y genere su coordinación, ganará entendimiento del comportamiento de las mismas

En muchas ocasiones decimos que la mayoría de los músicos tienen un excelente oído, lo que obviamos es que dentro de su amplia comprensión de la música es necesario incluir y confrontar componentes relacionados con las matemáticas.

Al tener un contacto con las metodologías del proceso enseñanza-aprendizaje en las escuelas indígenas del territorio de Tierradentro, se genera una discusión con un docente de una de las escuelas del territorio; la discusión se basa en que gran parte de lo que él enseña es dado por el currículo propio (Consejo de Educación de Tierradentro) en el que se enseña de acuerdo a las necesidades de cada resguardo y de acuerdo a lo que se establece en concordancia con el P.E.C (Proyecto Educativo Comunitario).

Es en éste sentido que él afirma “es una necesidad expresar lo que sentimos, y que mejor que por medio de la música además tenemos el don de hacerlo sin dificultad”<sup>2</sup>

En esta dirección se trata de hacer que por medio la propuesta se reconozca la relación existente entre los saberes cotidianos y los saberes escolares, así como afirma Monteiro (2002) la etnomatemática en la escuela se encarga de “Entender la realidad y llegar a la acción pedagógica de manera natural mediante un enfoque cognitivo con fundamentos culturales”, es de esta forma como la etnomatemática se encarga de mediar entre los saberes cotidianos y los saberes escolares.

Es decir por medio de lo que se denomina ancestral dentro de la cultura Nasa (la música ya que fue dada por el creador), existe en gran medida un pensamiento matemático este se evidencia en trabajo de la composición musical, pues dentro de éste proceso se debe tener en cuenta:

- El concepto de divisibilidad, me refiero a las líneas divisorias de un compás.
- El compás como un espacio en el que cabe toda la descomposición de la figura inicial.
- Las unidades de medida inicial, tales como las figuras musicales (redondas, blancas, negras, etc.).

Desde una perspectiva relacionada con la etnomatemática y la educación matemática, estas prácticas cotidianas como las de composiciones musicales e interpretaciones de las mismas en la cultura indígena de los Nasa, permiten una aceptación de conceptos matemáticos en el sentido en que se puede enseñar el concepto de fracción por medio de las reglas de descomposición binaria de una figura musical.

En un mismo sentido la etnomatemática en la escuela se da para entender y evidenciar procesos de aprendizajes presentes en lo cotidiano, de esta forma se espera que el medio en el que se desenvuelva esta propuesta sea el de la comunidad indígena Nasa donde el trabajo de la etnomatemática se encargaría de mediar las prácticas cotidianas que se dan entre la cultura mediante la creación de nuevas obras musicales y los procesos aritméticos que implícitamente se generan dados en la noción de fracción de figuras musicales (descomposición binaria), es decir, por medio de la propuesta se enseñará el concepto de la fracción el cual partirá desde elementos musicales tales que permitan una aproximación a la comprensión de dicho concepto.

a Se entiende por figuras musicales aquellas que son tomadas como unidad de medida dentro de un compás musical.

2 Palabras del profesor Darío Pame. Escuela la Cruz de Togoima. Tierradentro. Cauca.

**Marco teórico:**

Al igual que las matemáticas la música siempre ha estado durante el desarrollo del ser humano, es de esta forma como la segunda (la música) se ha concebido como una actividad artesanal apoyada por la escucha y por la interpretación, en la que composición es tanto una actividad como una forma de pensar y engloba todos los sentidos de la música.

Existen dos maneras de pensar que nos pueden ayudar mucho y que se ven reflejadas en el trabajo de numerosos compositores contemporáneos, entre ellos Stravinsky y Messiaen, estas formas de pensar musicalmente son simplemente:

- Dividir y
- Sumar

El tiempo puede dividirse, seguramente lo asociamos a la división que se hace del tiempo en un reloj. Sin embargo lo nuevo es saber que al dividir el tiempo se están creando ritmos, es en este sentido como al iniciar con la división de una redonda (O) podemos crear ritmos sencillos y pasar poco a poco a ritmos más complejos. En la gráfica 1 se aprecia la división de forma binaria que se le da una nota inicial, es decir, por medio de divisiones sucesivas entre dos llegamos hasta la figura fusa que es la división de la redonda en 32 partes iguales, o sea 32 pulsos en un tiempo (fusa) comprenden un solo pulso en un tiempo (blanca).

**Figuras Musicales:**

O	<b>redonda como unidad (1)</b>
	<b>blanca, unidad dividida en 2 partes iguales</b>
	<b>negra, unidad dividida en 4 partes iguales</b>
	<b>corchea, unidad dividida en 8 partes iguales</b>
	<b>semicorchea, unidad dividida en 16 partes iguales</b>
	<b>fusa, unidad dividida en 32 partes iguales</b>

Gráfica 1

Se llama compás a cada uno de los periodos de tiempo iguales en que se divide una frase musical, su tiempo lo determinan dos, tres o cuatro movimientos simétricos que se pueden basar en direcciones de la mano para simular el tiempo de cada compás.

El compás sirve para concretar la duración de las notas y se indica con su signo respectivo al principio de cada parte musical a que se refiere; las figuras y silencios correspondientes a un compás son las comprendidas entre dos líneas verticales que atraviesan la pauta, estas se llaman líneas divisorias.

Sumar es también una forma de interesante de crear ritmos, por ejemplo consideremos lo que ocurre si se convierte la siguiente secuencia de números en duraciones de notas musicales:

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + 1 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{4}) + (\frac{2}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + 1$$

Gráfica 2



Desde una perspectiva enfocada hacia lo cultural y hacia lo cosmogónico del sentido de la música en el pueblo Nasa, el profesor Darío Pame hace un acercamiento del por qué es tan importante éste aspecto en la convivencia de los indígenas Nasa, es de esta forma como él contextualiza dicha relevancia.

*“Cuentan los abuelos Nasa, que “êekathê” era algo así como el espíritu mayor de nuestra madre naturaleza. Alrededor, estaban dos seres que eran los más cercanos a “êekathê” y vivían en el espacio, uno era “Tay” (representante del señor sol) y “Uma” (representante de la luna). Dicen que alguna vez, estos seres cosmogónicos (Uma y Tay”) pensaron en la humanidad y comenzaron a invocar a êekathê, el ser supremo. Se dice que la naturaleza era verde como en el paraíso, y en la naturaleza había unas plantas muy sagradas llamadas “êsx”, que en español se conocen como “coca”, entonces una noche comenzaron a hacer rituales masticando coca con aguas cristalinas.*

*Allí ellos comenzaron a hacer unos soplos divinos, y con estos soplos tocaron unas flautas, que en nasa yuwe les dicen “nasa kui” que pues están en las montañas. Con los soplos divinos comenzaron a crear a los nasa, por eso se dice que la música es una expresión que viene de lo alto, de los vientos divinos de la madre naturaleza, por eso para el nasa es muy importante la flauta transversa, como también el tambor, instrumento que los ellos inventaron tratando de imitar al trueno, porque se dice que êekathê se manifestaba por medio del sonido del trueno.*

*Después de esto, se dice que en algún tiempo comenzaron a abundar los Nasa y se comenzaron a pelear entre ellos. Tay y Uma se preocuparon por esto, entonces una noche se fueron para las montañas y comenzaron a hacer nuevamente el ritual con la coca y las aguas, y con soplos divinos comenzaron a tocar nuevamente la flauta, los nasa escucharon eso y comenzaron a contentarse a sentirse felices, por eso cuando se escucha la flauta es la máxima expresión del nasa”.*

Es importante la música tradicional por que se habla de legados ancestrales. *“Por ejemplo, el bambuco es nuestro, salió del seno de la cultura nasa, sino que lo han ido acomodando en varias partes de la región, por eso representa la región andina. Para nosotros los Nasa actuales, la música es una convivencia, por ejemplo estas cuerdas (refiriéndose a las cuerdas de la guitarra) nos las dieron nuestros ancestros europeos, la percusión nos la dieron nuestros ancestros africanos y nuestros abuelos y ancestros aportaron con la flauta, el tambor y melodías. Hoy en día, gracias a la unión de eso, queremos llevar un mensaje promocionado un sonido integral, que reúna todas las razas y defienda la alegría de los pueblos, tratando de compartir tanto con el occidental, como con el africano y nosotros la raza amarilla de América, entonces para nosotros todo esto se resume en la música latina, que en otros lugares se conoce como música amerindia”.*<sup>3</sup>

En cuanto a la didáctica del objeto matemático número racional, Godino (2003) hace una clasificación de las situaciones de uso de fracciones y razones, en esta dirección se clasifica la división de forma binaria de las figuras musicales en la situación de reparto, **partición de un todo**, Godino (2003, Pág. 161) en la que un todo está dado por una unidad y esta se divide en partes iguales de las que se toman o se consideran algunas de estas partes. De acuerdo a Godino. *“Cuando decimos que una parte es  $a/b$  del total queremos decir que el total se ha dividido en  $b$  partes iguales y que el trozo al que hacemos referencia está formado por un número  $a$  de dichas partes. Si el todo está compuesto por un número de elementos iguales, que a su vez es múltiplo de  $b$ , la partición consiste en formar  $b$  subconjuntos disjuntos del mismo número de elementos y tomar  $a$  de ellos”.*

Es de esta forma como si tenemos la unidad (redonda O) y la dividimos en 2 partes iguales obtenemos una nueva figura musical (la blanca); y si tenemos la unidad inicial (redonda O) y la dividimos en 4 partes iguales obtenemos una nueva figura musical (la negra), y así sucesivamente.

3 Palabras del Profesor Darío Pame, docente de la escuela indígena Cruz de Togoima, Tierradentro, Cauca.

Desde una mirada de las Fracciones equivalentes. Se puede asociar esta caracterización a cada una de suma de las fracciones que se tiene en la grafica 2, pues cada una de estas dentro un compás comprende una unidad como tal, es decir que si se hiciera las operaciones correspondientes en cada compás, todas las cantidades dentro del mismo compás sumarían 1, que es la unidad representada por una redonda (O).

Esto es: “Dos fracciones  $a/b$ ,  $c/d$  son equivalentes si se cumple “la igualdad de los productos cruzados”, o sea:  $a.d = b.c$ .

*En efecto, si  $a.d = b.c$ , dividiendo ambos miembros por  $b.d$  y simplificando se obtiene,*

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d}; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y viceversa, si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

*multiplicando ambos miembros por  $b.d$  y simplificando se obtiene que  $a.d = b.c$*

*Esta relación cumple las tres condiciones exigidas a las llamadas relaciones de equivalencia, o sea:*

- *Reflexiva: toda fracción es equivalente a sí misma;*
- *Simétrica: si una fracción  $x$  es equivalente a otra fracción  $y$  y  $y$  es equivalente a  $x$ , entonces  $x$  e  $y$  son la misma fracción;*
- *Transitiva: si una fracción  $x$  es equivalente a otra fracción  $y$  y  $y$  es equivalente a otra fracción  $z$ , entonces  $x$  y  $z$  son equivalentes”<sup>4</sup>.*

En éste sentido se tiene que existe correspondencia entre las fracciones equivalentes y la unidad como medida inicial (redonda O)

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$$

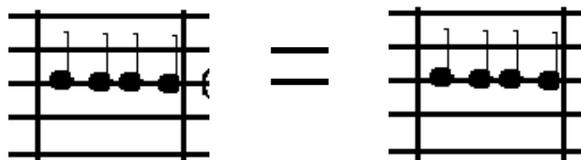


De acuerdo a algunas propiedades de las fracciones se tiene que *Las fracciones con numerador igual al denominador son equivalentes y representan al número racional 1*

Es decir, si una cantidad de magnitud mide  $b/b$  unidades representa que la unidad se divide en  $b$  partes y se toman esas  $b$  partes y esto es igual a la unidad.

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4})$$

$$4/4$$





## Metodología

Siendo la música un aspecto tan importante dentro de la cultura Nasa, se pretende crear correspondencias entre la música y las matemáticas, de esta forma se fragmentará la metodología en varios momentos que pueden tardar el tiempo que sea necesario. La propuesta se basa en incluir dentro de las clases de matemáticas aspectos musicales como la división de las figuras musicales, por medio de las cuales se pueden hacer diferentes ritmos y completar compases en frases musicales y que de una u otra forma admiten las fracciones en su interpretación teórica.

En éste sentido, la propuesta es básicamente que el docente por medio de su gestión y de su experiencia con las matemáticas incluya la música en las clases de matemáticas y para que esto sea posible es necesario que el docente además de ser de profesor de matemáticas deba tener conocimientos en el área de la música.

El docente siempre debe estar en constante acompañamiento del proceso que lleve el estudiante, pues por medio de la música es posible llegar a un entendimiento de las fracciones, y así se hace cierta correspondencia al decir que este caso se puede emplear en los dos sentidos, o sea por medio de las matemáticas se puede llegar a un entendimiento de la música.

### *Primer momento:*

- Enfrentamiento por parte de los estudiantes con la unidad inicial de medida en la música (redonda O):

El docente por medio de gestión como músico, tomará la unidad redonda (O), como una serie de golpes (solamente un golpe), esta consta de cuatro tiempos, por la que él solo hará un acento explícito (nombrará y acentuará el primer golpe) en el primer tiempo de los cuatro que comprenden la unidad inicial.

- Enfrentamiento por parte de los estudiantes con la unidad inicial de medida dividida en 2 partes iguales (blanca d):

El docente por medio de gestión como músico, tomará la unidad redonda (O), como una serie de golpes y la dividirá en 2 partes iguales, de esta forma él hará dos acentos explícitos (nombrará y acentuará en el primer y en el tercer golpe) de los cuatro que comprenden la unidad inicial.

- Enfrentamiento por parte de los estudiantes con la unidad inicial de medida dividida en 4 partes iguales (negra 

El docente por medio de gestión como músico, tomará la unidad redonda (O), como una serie de golpes, y la dividirá en 4 partes iguales, de esta forma él hará cuatro acentos explícitos (nombrará y acentuará en el primer, en el segundo, en el tercer y en el cuarto golpe) de los cuatro que comprenden la unidad inicial. Es decir, por cada uno de los golpes dado el la figura de las blancas ahora habrá un par de golpes, que se representa por las negras, o sea cada blanca (d). se divide en dos partes iguales.

- Enfrentamiento por parte de los estudiantes con la unidad inicial de medida dividida en 8 partes iguales (corchea 

El docente por medio de gestión como músico, tomará la unidad redonda (O), como una serie de golpes, y la dividirá en 8 partes iguales, de esta forma él hará ocho acentos explícitos en el cual por cada uno de los acentos de la figura de la negra hará dos acentos, de esta forma como había cuatro golpes de negra respecto a la unidad inicial (redonda O) ahora habrá 8 golpes dentro de la misma unidad inicial.

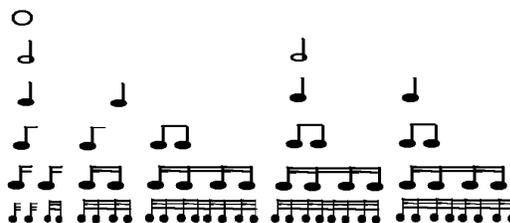
- Éste proceso se da sucesivamente y con cada una de las figuras musicales.
-

*Segundo momento:*

- Descomposición de la figura inicial (redonda O) por medio de divisiones pares sucesivas (divisiones entre 2):

De esta forma se tendrá en cuenta la misma división que se hace en la gráfica 1, donde además de mostrar la descomposición de las figuras musicales, se muestra textualmente lo que sucede con cada una de estas después de haberlas dividido sucesivamente por dos.

De esta forma se debe estar ubicando constante a los estudiantes en el sentido de las relaciones que se dan entre las divisiones de cada figura musical y las respectivas cantidades fraccionarias, para que de éste modo ellos puedan evidenciar la reciprocidad que se da entre las figuras y las cantidades fraccionadas.

	<p><b>redonda como unidad (1)</b></p> <p><b>blanca, unidad dividida en 2 partes iguales</b></p> <p><b>negra, unidad dividida en 4 partes iguales</b></p> <p><b>corchea, unidad dividida en 8 partes iguales</b></p> <p><b>semicorchea, unidad dividida en 16 partes iguales</b></p> <p><b>fusa, unidad dividida en 32 partes iguales</b></p>
---	--

*Tercer momento<sup>5</sup>:*

- Complementación de un compás:  
Para éste momento los estudiantes ya habrán entendido las relaciones de correspondencia que se dan entre cada una de las figuras, esto por medio de las divisiones dadas entre cada una de las figuras musicales.  
Ahora surge la idea de complemento de cada uno de los compases, en la que de acuerdo a la implementación de fracciones obtenidas por medio de las respectivas divisiones, se hace sumas de estas cantidades en las que sea posible completar la unidad inicial del compás (1). Reiterando que estas sumas no deben superar la unidad, y que deben ser exactas.

*Cuarto momento*

- Escritura de algunas fracciones (las comprendidas en el ejercicio) y la respectiva relación entre las figuras musicales, haciendo las correspondientes simulaciones con los sonidos (golpes) correspondientes.

*Quinto momento*

- Implementación de diferentes instrumentos musicales dentro de los capases inventados por los estudiantes en el tercer momento:  
Con esto es posible dar un primer acercamiento de lo que se conoce como ritmo, y composición, pues por medio de éste ejercicio se están dando las primeras nociones de lo concerniente al sentido musical.

*Sexto momento*

- Primer encuentro con el proceso de composición y respectiva utilización de los momentos anteriores, esto por medio de la gestión del docente como profesor de matemáticas y profesor de música.  
Por medio de la gestión del docente, y como es sabido que éste es músico, se espera que durante el proceso de aprendizaje y enseñanza de la música, él enseñe la interpretación de la partitura

5 El docente se encarga de enseñar que un compás es un espacio que admite únicamente figuras musicales representadas en las cantidades numéricas (fracciones) y que por lo tanto en éste (compás) sólo cabrán cantidades fraccionadas que sumadas den 1, pues esta es la unidad inicial.



como un sistema de interpretación musical, y que marchando a la par con dicha interpretación logre utilizar lo adquirido en los momentos anteriores. Creando con esto una serie de bases para el entendimiento de la composición y además un acercamiento al ejercicio de composición hecho por cada uno de los estudiantes.

### **Análisis de datos**

Se espera que por medio de la aplicación de cada uno de los momentos, los estudiantes logren crear bases para la comprensión del objeto matemático números racionales (dado por las fracciones), y su respectiva relación con elementos básicos de la música. Además de esto, se espera que logren tener un acercamiento de la composición musical (dada en un primer momento por el entendimiento de ritmo, y complemento de un compás) y su fuerte relación con las matemáticas.

### **Conclusiones**

- Las matemáticas y la música tienen una estrecha relación de correspondencia, que no solamente se da entre los fraccionarios y las figuras musicales sino también entre otros aspectos como la afinación temperada de los instrumentos musicales.
- Nuestra labor como profesores empieza cuando podemos dar forma a las ideas de las personas sean cuales sean sus afinidades musicales.
- Se hará parte de la formación de estudiantes indígenas Nasa en el campo de las matemáticas por medio de lo que ellos consideran ancestral y cosmogónico como lo es la música.

### **Referencias bibliográficas**

- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). Fracciones. Madrid: Síntesis
- E. Cid, J. D. Godino y C. Batanero (2003) Sistemas Numéricos y su Didáctica para Maestros. Fracciones y números racionales positivos.
- Modesto, S. Gonzáles, T. García, A. Gonzáles, M. (1998) Divisibilidad. Madrid: Síntesis
- Howard, J. (2002) Aprendiendo a Componer Barcelona: Akal/ entorno Musical
- De Luz, G. (1995) Método Práctico para Guitarra. Zaragoza: Mariano Bui
- Hohmann`s. (1962) Método Práctico Para Violín. New York: Schirmer, G.
- Monteiro, A. (2005). La Etnomatemática En Escenarios De Escolarización. Brazil: Revista "Relecao E Acao Do Departamento De Educacao Da Universidad De Santa Cruz De Sul"
- Knijnik, G. (2002) "Itinerarios De La Etnomatemática: Cuestiones Y Desafíos En Lo Cultural, Lo Social Y Lo Político En La Educación Matemática". Brazil: Revista "Educacao Em Revista Da Faculdade De Educacao Da Universidade Federal Da Minas Gerais"
- Bolaños, G. Ramos, A. Rappaport, J. (2004) ¿Qué pasaría si la escuela...? Treinta años de construcción de una educación propia. Popayán, Colombia: Consejo Regional Indígena del Cauca.
- Caicedo N. Parra A. et al. (2009). Las Matemáticas en el mundo nasa, Nasa fxi'zenxite', isa wejxa's na' tha'w atxaja'. Bogotá. CIIT.