

# Reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Anatolio Reyes Reyes y Francisco Cordero Osorio.

Instituto Tecnológico de Toluca y Cinvestav-IPN, México.

reyes\_dos@hotmail.com fcordova@mail.cinvestav.mx

## Resumen

En este trabajo presentamos un proyecto de investigación cuyo propósito fundamental es establecer una reconstrucción de significados de la ecuación diferencial  $y'' + by' + cy = f$  a través de una situación de una situación de transformación. Ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la solución  $y(x)$  en relación con la función  $f$ , al variar los coeficientes  $b$  y  $c$  de la ecuación diferencial e interactuar en los contextos algebraico y gráfico.

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que el *comportamiento tendencial de las funciones* es el argumento que tendrá que construir el estudiante en la situación de transformación, el cual posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación  $y'' + by' + cy = f$  y de la propiedad de estabilidad al interactuar en los contextos algebraico y geométrico.

Nos proponemos diseñar situaciones con la intención de generar los argumentos en el estudiante. Nuestro análisis se fundamentará sobre discusiones en grupo y sobre actividades de trabajos escritos.

## Introducción

La privilegiación del contexto algebraico en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ha favorecido la creencia en los estudiantes de que existe una “receta” que permite la integración algebraica de cada tipo de ecuación. Esta preferencia es propiciada por los textos de ecuaciones diferenciales y por los cursos tradicionales que imparten los profesores de matemáticas. Sin embargo, con el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y el adelanto de la tecnología, particularmente de las calculadoras graficadoras, estos dominios han cambiado. No obstante, la enseñanza no ha sido influenciada por esta evolución, sino ha quedado centrada en el contexto algebraico.

En este artículo se presenta un avance de un proyecto de investigación que toma en cuenta la problemática mencionada, cuyo propósito es formular una reconstrucción de significados de la ecuación diferencial  $y'' + by' + cy = f$  a través de una situación de transformación. Ésta consiste en identificar patrones de comportamiento de la solución en relación con la función, al variar los coeficientes  $b$  y  $c$  de la ecuación diferencial e interactuar en los contextos algebraico y gráfico. Estudiantes de Cálculo serán la fuente para la recolección de datos de la investigación.

## Antecedentes

En la actualidad con el fortalecimiento de la matemática educativa como disciplina científica han surgido diversos marcos teóricos cuya intención es fundamentar explicaciones de la construcción del conocimiento matemático. Estas explicaciones giran en torno a la naturaleza de la construcción del conocimiento matemático y su ingreso al sistema didáctico. Así, el

foco de interés de los marcos teóricos respectivos está en la actividad matemática y la cognición de los individuos relacionados con la adquisición de los conceptos matemáticos y el desarrollo de actividades.

En ese sentido, la problemática fundamental del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas consiste en una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar. Como ambas son de naturaleza y funciones distintas, entonces la labor del matemático educativo es teorizar sobre cómo interpretar y reorganizar la obra matemática. Esto permite precisar elementos teóricos que contribuyen a la reconstrucción de significados de procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. La reconstrucción de significados es la base donde aparecen categorías que posibilitan la reorganización de la obra matemática. La fuente ha sido la producción del conocimiento, al crear epistemologías modelizadas por la actividad matemática. Sin embargo, la reconstrucción de significados compone categorías del conocimiento matemático que no sólo son resultado de la actividad matemática, sino también de la actividad humana. La fuente se transforma, por el contrario, en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. En algún sentido es la forma de hacer conocimiento el punto de interés. Para ello se requiere formular epistemologías modelizadas por la actividad humana que ayuden a habilitar esas categorías del conocimiento matemático en la matemática escolar (Cordero, 2001).

Un modelo de este tipo de categorías es la noción de *comportamiento tendencial de las funciones* que se ubica en el plano de la modelización matemática y el uso de las herramientas matemáticas. Así, por ejemplo, la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales pudiera ser reorganizada a través de una situación de transformación donde el comportamiento tendencial de las funciones sea el argumento que posibilite la reconstrucción de significados y procedimientos necesarios para tal fin.

Existen investigaciones relacionadas con el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que nos muestran cómo este objeto matemático es presentado en los libros de texto (Benítez, 1993): definición, problema de valor inicial y de frontera, clasificación, ecuación auxiliar, métodos de resolución y aplicaciones, formato que utilizan los profesores en su actividad docente. Sin embargo existen reportes recientes (Cordero y Solis, 1997, 1998, 1999) que han estudiado cómo los estudiantes pueden comprender y hacerse de las herramientas para habilitar de significado a la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

## **Problemática**

El proyecto de investigación se sitúa en la matemática universitaria, específicamente en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. La enseñanza de este objeto matemático, en la actualidad, está centrada en los contextos algebraico y analítico (Benítez, 1993), obstaculizando la transición del contexto algebraico al gráfico y viceversa.

Un curso tradicional de ecuaciones diferenciales pone atención a los métodos cuantitativos, principalmente en el tema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, donde con base en estos métodos se clasifican tipos de ecuaciones diferenciales, primero considerando coeficientes constantes y después coeficientes variables, mostrando los diferentes métodos de resolución y posteriormente enseñando las aplicaciones.

Los textos de ecuaciones diferenciales favorecen los métodos analíticos, pues presentan una estructura teórica que sustentan estos métodos sistemáticos de resolución, donde las soluciones son expresadas por medio de fórmulas algebraicas exactas, explícitas o implícitas, expansiones en serie de potencias y expresiones integrales, esta perspectiva propicia el contexto algebraico,

El privilegio del contexto algebraico ha dejado en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha imagen de este campo. Muchos de los estudiantes están convencidos que existe una “receta” que permite la integración algebraica de cada tipo de ecuación diferencial y el objetivo de investigación en este campo es completar el libro de recetas existente.

Sin embargo, desde el punto de vista epistemológico, sabemos que la naturaleza de estos dominios ha cambiado con el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y el auge de la tecnología: particularmente de las calculadoras graficadoras. Estos espacios han enfocado la atención tanto en los métodos cuantitativos como en los cualitativos. Pero, la enseñanza no ha sido influenciada por este progreso, si no que ha quedado centrada en el contexto algebraico (Artigue, 1995).

No obstante, existen elementos didácticos, fundamentados en investigaciones previas, que ponen en juego relaciones entre dos grandes contextos: *el algebraico y el gráfico*. Las relaciones se generan a través de considerar nociones de comportamiento de las funciones con cierta tendencia (de ahí la estabilidad de las ecuaciones diferenciales). Se enfatiza la atención en las soluciones cualitativas, propiciando un intercambio permanente entre ecuación y gráfica.

### **Pregunta de investigación**

En esta dirección, formulamos nuestras preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los argumentos y las construcciones mentales que requieren hacer los estudiantes para el entendimiento de la estabilidad de la ecuación diferencial  $y'' + by' + cy = f$ ?
- ¿Qué clase de problemas deben ser considerados para que el estudiante los resuelva y en qué contextos deben ser aplicados?
- ¿Qué significados es posible reconstruir con relación a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes a través de la situación de transformación, en contextos interactivos de los estudiantes?

### **Hipótesis**

Nuestra hipótesis de investigación consiste en que el *comportamiento tendencial de las funciones* es el argumento que tendrá que construir el estudiante en la situación de transformación, el cual posibilitará la reconstrucción de significados de la ecuación y de la propiedad de estabilidad al interactuar en los contextos algebraico y geométrico.

### **Marco teórico**

La investigación se basa en una aproximación socioepistemológica cuyo interés principal es estudiar las prácticas sociales, la actividad humana del conocimiento matemático. Para ello, Cordero (2001), propone formular una epistemología que modele la organización social de un grupo que interactúa para hacer conocimiento matemático. La argumentación

proporciona bases a tal formulación, de alguna manera es la expresión de la organización social, de la práctica y de la actividad humana. Es por eso que la argumentación debe componerse de significados, procedimientos y de los niveles cognitivos de los que intervienen. Y para establecer relaciones con el sistema didáctico, la argumentación tendrá que ser un marco de referencia para las situaciones de enseñanza y aprendizaje. En este último punto, nos proponemos diseñar situaciones con la intención de generar los argumentos en el estudiante. La reconstrucción de significados y los procedimientos que se desprenden de éstos dependerán de las experiencias de los que participan. Esta posibilidad obligó a mirar las teorías reificacionistas. En particular las construcciones mentales de Dubinsky, (1991 y 1996): acciones, *procesos, objetos y esquemas* (Teoría APOE). En la teoría APOE, la descomposición genética es un modelo de cognición que describe las construcciones mentales que un individuo pudiera hacer para lograr el entendimiento de un concepto matemático. Además, tiene un mecanismo que permite revisar la descomposición genética iteradamente hasta lograr una explicación satisfactoria del entendimiento del concepto, acorde a lo establecido en la investigación. Un propósito de esta teoría es entender el conocimiento matemático, es decir, *entender los aspectos constructivos del conocimiento y su contribución a los aspectos metodológicos en la instrucción, esto es, comprender las maneras en las que un estudiante construye conceptos o adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas...* (Asiala, et al,1996).

Sin embargo, por la naturaleza de la teoría APOE la descomposición genética esta compuesta de construcciones mentales que hacen referencia a un concepto matemático. Esto obliga a considerar como marco de referencia del concepto los objetos y las relaciones que entran en cuestión.

Las definiciones de los conceptos matemáticos son objetos principales que componen el marco de referencia. De alguna manera las descomposiciones genéticas son descomposiciones de las definiciones de los conceptos matemáticos que ayudan a entender cómo y de qué están construidas. Así, el marco de referencia puede ampliarse si consideramos explícitamente la reconstrucción de significados de los conceptos matemáticos que suceden en contextos interactivos del aula y de ahí formular la descomposición genética.

La reconstrucción de significados de los conceptos matemáticos que emergen en contextos interactivos del salón de clases, pueden ser un marco de referencia para formular la descomposición genética. Entonces una reconstrucción de significados en contextos interactivos pudiera ser estudiada a través de *significados, procedimientos, procesos y objetos y argumentos* que aparecen en las interacciones escolares (Cordero, 2001). En conjunto, estos cuatro elementos componen una situación del concepto y puede ser la base para una descomposición genética.

A continuación describimos estos elementos:

- Significados *son los símbolos en un sistema que se construye y se usa en la interacción,*
- Procedimientos *son las operaciones comunes inducidas por los significados.*
- Procesos y objetos *son las diferentes construcciones mentales que aparecen en los procedimientos, y*
- Argumentos *son los organizadores del contenido que entran en juego en la situación, presentado en diferentes versiones para convencer.*

La situación del concepto es una epistemología del mismo; donde los cuatro elementos que la componen están recíprocamente relacionados. Nuestro propósito es desarrollar una descomposición genética basada en esta epistemología.

## Método de investigación

Se parte de una descomposición genética con fundamento en la epistemología. Esta descomposición genética es una hipótesis. Se diseña una situación para ser puesta en escena, se analiza lo obtenido y se confronta con la hipótesis. Como conclusión se ofrece una descomposición genética revisada. Para tal fin, se establecen las siguientes etapas:

- Análisis teórico de la epistemología: Se formula la epistemología de la organización social a través de los cuatro elementos: *significados, procedimientos, procesos y objetos, y argumentos*. Se toma como base para proponer la descomposición genética inicial o hipotética.
- Diseño de instrucción: fundamentándose en el análisis anterior se diseña una situación y su tratamiento instruccional, para posteriormente recolectar datos de un análisis clínico y observar los resultados del diseño, y
- Revisión del análisis teórico: revisión y/o entendimiento más profundo de la epistemología para actualizar la descomposición genética, la cual puede desembocar en la repetición de otro ciclo.

Estas tres componentes tienen como propósitos:

- Aumentar el entendimiento propio de cómo se realiza el aprendizaje de las matemáticas,
- Fomentar una pedagogía apoyada en lo anterior para utilizarla en la enseñanza de las matemáticas en el nivel escolar universitario,
- Desarrollar una base de información y técnicas de asesoramiento de acuerdo a la epistemología y pedagogía asociadas al concepto, y
- Explicar la relación entre los tratamientos instruccionales y el análisis teórico.

### La situación de transformación

Una situación de transformación es un marco de referencia donde se presenta la reconstrucción de significados en contextos interactivos y consiste en establecer soluciones de ecuaciones diferenciales lineales con comportamiento tendencial. La construcción establece la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento es determinar relaciones entre las ecuaciones y gráficas (Cordero, 1998).

La situación de transformación está vinculada con los conceptos matemáticos que requieren de un contexto que aluda al comportamiento de las funciones cuando el comportamiento tiene cierta tendencia, así por ejemplo, la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es un concepto que hace referencia a un comportamiento de la función que tiene cierta tendencia.

Una epistemología de la estabilidad, puede desarrollarse a través de cuatro elementos, que a saber son:

- Significados: *Patrones de comportamiento de la solución de la ecuación diferencial.*
- Procedimientos: *Variación de los coeficientes de la ecuación diferencial.*
- Procesos y objetos: *Una ecuación diferencial lineal es una relación entre funciones que determina comportamientos.*
- Argumentos: *Comportamiento tendencial de las funciones*

La estabilidad de una ecuación diferencial lineal en el marco de esta epistemología obliga a estudiar:

- Los patrones de comportamiento de la solución que tiene una ecuación diferencial. Estos

patrones corresponden a fórmulas analíticas y formas específicas de las gráficas. Sobre estos patrones se construyen los significados de la estabilidad.

- Los significados producen procedimientos como variar los coeficientes de la ecuación diferencial para buscar comportamientos que coincidan con el comportamiento que significa estabilidad.
- La construcción de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales lleva a la concepción de que una ecuación diferencial es una relación entre funciones que determina comportamientos (Cordero, 1998,2001), por lo cual habrá diferentes construcciones mentales, de acuerdo a la experiencia del estudiante, como procesos y objetos.
- La construcción del argumento que ayude a construir la estabilidad de las ecuaciones diferenciales en general y a reorganizar la estabilidad de la ecuación diferencial  $y'' + by' + cy = f$ . El argumento *comportamiento tendencial de las funciones* confronta los diferentes significados y posibilita la generalidad.

La situación de transformación de la ecuación diferencial  $y'' + by' + cy = f$  pretende relacionar la solución analítica con su comportamiento gráfico, así el estudiante reconstruirá un significado de la solución  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  con relación al comportamiento tendencial de su gráfica. La reconstrucción del significado consiste de dos aspectos: *identificar la propiedad de estabilidad y establecerla como argumento*.

La estructura de la ecuación diferencial, la solución analítica y su comportamiento gráfico son un apoyo para la reconstrucción de significados de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

## Discusión

En la didáctica actual, aun encontramos énfasis en los aspectos formales y rigurosos, evadiendo los aspectos epistemológicos y cognitivos que competen a los conceptos matemáticos. Una característica de esta didáctica es que toma los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que dichos conceptos pueden ser construidos por el estudiante como una herramienta funcional que le permita debatir ante diversos tipos de situaciones. En definitiva necesitamos de una reorganización de la matemática, requerimos de rediseñar el discurso matemático escolar, y esta es la tarea de la matemática educativa.

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. P. Gómez (Ed.) pp. 97-140. México: Grupo editorial Iberoamérica.
- Asiala, M. & Brown, A. & Devries, D. & Dubinsky, E. & Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and the development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* 2(6), pp. 1 – 32.
- Benítez, L. (1993). Significación de los objetos matemáticos centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Tesis de maestría (no publicada). Cinvestav-IPN. México.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 4, Num. 2. pp. 103-128.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número 1, 56-74.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. Vol. 8, No. 3, pp. 24 – 40. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Cap. 7, pp. 96 – 126. Mathematics Education Kluwer Academic Publisher.
- Solís, M. (2000). Comportamientos gráficos y analíticos en las explicaciones de los estudiantes: situaciones con ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame. Vol. 13, pp. 110-117. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Solís, M. (1996). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales. Memoria predoctoral (no publicado). Cinvestav-IPN. México.
- Solís, M. y Cordero, F. (1999). Comportamientos gráficos y analíticos en la visualización de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Clame. Vol. 12 Tomo 1. pp. 29-33. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Solís, M. y Cordero, F. (1998). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de las ecuaciones diferenciales. En R. Farfán (Ed.). *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. pp. 69 – 73. Bogotá, Colombia: Clame. Grupo Editorial Iberoamérica.