La convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento

Gustavo Martínez Sierra
CICATA-IPN & UAG, México,
gustavomtzs@yahoo.com.mx

Rosa María Farfán Márquez
CINVESTAV-IPN, México,
rfarfan@mail.CINVESTAV.mx

Resumen

Este escrito es continuación a aquellas indagaciones (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez, 2000, 2002) que se han ocupado de las interacciones didácticas de las convenciones matemáticas presentes en los exponentes. Se presenta una síntesis de los resultados que permiten aislar la presencia de un mecanismo constructivo común en las diversas formulaciones del concepto exponente. Se ha denominado *convención matemática* al mecanismo y se lo ha caracterizado en tanto su función para la integración sistémica de un conjunto de conocimientos.

Introducción

En el presente escrito están contenidos algunos de los hallazgos de una investigación que contribuye a los esfuerzos de un grupo de investigadores interesados en la caracterización de la construcción del conocimiento matemático. De manera retrospectiva, a esta línea de investigación se le ha dado por llamar *perspectiva socioepistemológica*. La hipótesis teórica fundamental de tal perspectiva consiste en considerar que la construcción del conocimiento puede ser explicada y descrita a través de diferentes componentes: a) la epistemológica, b) la de la comunicación, c) la cognitiva y d) la social. En términos metodológicos esta consideración determina un *sistema de componentes* fundamental a estudiar en las investigaciones y teóricamente representa la unidad mínima del análisis socioepistemológico. Se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático. En particular en este documento se reporta una síntesis, desde la epistemología, de los elementos generales que permiten aislar la presencia de un mecanismo de construcción de conocimiento, al que hemos denominado *convención matemática*. Metodológicamente se opta por hacer un estudio de caso de su funcionamiento en los exponentes.

Primera aproximación al mecanismo

De inicio hemos de aclarar nuestra elección de la expresión *convención matemática*. La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Pero ¿qué es aquello que es conveniente para las matemáticas? De ahí que la caracterización sea *funcional*; es decir, que debe señalar las funciones de conveniencia. Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo sobre el concepto de exponente no natural muestra la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración* *sistémica de conocimientos).* Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática.* Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos. A lo anterior se debe agregar que por el carácter sistémico de una teoría es posible que la inclusión de un nuevo objeto provoque la exclusión de otro. En este sentido, es importante, para la caracterización, el tipo de consideraciones *metamatemáticas* vertidas en un proceso de construcción; las cuales se presentan bajo la forma de *argumentos* acerca de lo que se debe o no conservar en el sistema. Dicha caracterización coloca el énfasis en que las convenciones matemáticas son un instrumento teórico a fin de satisfacer ciertos requerimientos de preservación de un conocimiento anterior en una nueva organización del conocimiento. A continuación se presenta un ejemplo del funcionamiento del mecanismo en la sintaxis algebraica.

En primera instancia, el exponente natural mayor o igual a dos representa una multiplicación reiterada, que surge como una *convención simbólica* que atiende a un principio de economía en la escritura. En términos matemáticos, con dicha definición se provoca la existencia del objeto matemático llamado *potencia*, que surge de la integración de los objetos matemáticos *base* y *exponente*. La interacción que se da entre este objeto matemático nuevo con las operaciones algebraicas genera, de manera deductiva, un sistema de conocimientos sobre su operatividad que comúnmente son designados como *leyes de los exponentes*:

- $A^nA^m=A^{n+m}$,
- $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n > m + 1$, A 0
- $(A^n)^m=A^{nm}$

A continuación, se plantea la necesidad de la inclusión de un objeto matemático nuevo[1], por ejemplo A^0. Por un principio metamatemático, su inclusión debe ser de tal manera que el nuevo sistema de conocimientos conserve la coherencia y unidad del precedente. En este caso se conviene que $A^0=1$. La realización del mecanismo, en este caso, es la igualdad $A^0=1$ y en consecuencia el modelo de exponente como multiplicación reiterada carece de sentido para el nuevo objeto matemático. Esta pérdida del sentido primitivo ocasiona la emergencia de la negociación de significados y de lo que debe ser conservado en el sistema. El aspecto funcional del mecanismo, para la integración sistémica de conocimientos, puede ser constatado con el siguiente razonamiento: si únicamente se utiliza la propiedad $(A^n)^m=A^{nm}$ para convenir un valor para A^0 nada se puede decir; ya que, por ejemplo, $(A^0)^2=A^{0*2}$ entonces $(A^0)^2=A^0$ por lo que $A^0=1$ o $A^0 = 0$.

El punto central que se quiere señalar es que el argumento anterior no es producto de un razonamiento lógico en el sentido estricto del término (producto de inferencias lógicas aceptadas por el razonamiento deductivo). Para clarificar este punto se puede considerar el argumento más común, en la escuela y en los libros de texto, para el exponente cero, el cual induce la impresión de que $a^0 = 1$ se puede *deducir*: Como $1 = a^{\bullet}/a^{\bullet} = a^{\bullet-\bullet} = a^{\bullet}$ entonces $a^0 = 1$.

[1] Aquí no se consideran las causas que originan la necesidad de incluir objetos nuevos en un sistema de conocimientos. Además, se hace notar que el nuevo objeto podría ser A ; ya que este no tiene sentido en el contexto de la multiplicación reiterada.

Cuando $m > n + 1$ la igualdad $a^m/a^n = a^{m-n}$ (recuérdese que la definición de partida es: a^n es igual a multiplicad

a^n veces) puede tener el argumento *lógico* siguiente;

entonces eliminando factores queda lo que se afirma. Sin embargo el argumento: como $1 = a^n/a^n = a^{n-n} = a^0$ entonces $a^0 = 1$; no es de la misma naturaleza que el anterior; pues se apoya implícitamente en que $a^m/a^n = a^{m-n}$; la cual es indemostrable por ser la ley que se quiere conservar.

Presencia del mecanismo en el devenir del concepto de exponente

A la luz del análisis epistemológico de fuentes históricas se presenta el siguiente esquema de la construcción social del exponente no natural:

- En el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgiócon la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica,con el fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios.
- En el marco del problema de cuadraturas de curvas existió una auténtica reconstrucción de la convención; ya que emergió como organizadora de las fórmulas de cuadraturas.
- A lo anterior le acompañó una etapa de ocasiones de uso, de las reglas de trans formación[2] relacionadas con los exponentes, dentro del pensamiento variacional que permitió la total aceptación de la noción de exponente no natural: cálculo de diferenciales y primitivas en el paradigma leibniziano, el cálculo de fluxiones y momentos en el paradigma newtoniano y la construcción del binomio de Newton. Estos factores ocasionaron que el universo de "curvas algebraicas"(con fórmula) tuviera su centro en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ (donde f(x) es un polinomio).

Lo anterior puede ser esquematizado por la evolución de las siguientes etapas de conocimiento: 1) La semántica geométrica, 2) Primera sintaxis algebraica. 3) Segunda sintaxis algebraica (La aceptación de que el exponente puede ser cero y negativo), 4) Primera semántica de la cuadratura de las curvas (Índice de las curvas de Wallis) y 5) Segunda semántica de la cuadratura de las curvas (Posición relativa del área). Para que estas formulaciones fueran posibles fue necesario poner en funcionamiento diferentes principios metamatemáticos como son: 1) uniformidad en los métodos para realizar las operaciones entre monomios, 2) uniformidad en las fórmulas para determinar la cuadratura de curvas y 3) inducción para la uniformidad de las operaciones con monomios. A continuación se revisan algunas de las hipótesis epistemológicas más importantes acerca del pasaje de las etapas de conocimiento mencionadas, centrando la atención en el papel del mecanismo de convención matemática. Tomando en cuenta el devenir histórico, la emergencia de las convenciones matemáticas para los exponentes no surge de preguntarse por el significado de la expresión 2 para un valor arbitrario de . Se remarca esta aseveración debido a que en la organización escolar tradicional de los saberes (basado en la estructura de los números reales) el problema de las convenciones es reducido a un problema de extensión. Tradición comenzada por Euler y continuada por Cauchy en su programa de organizar a las matemáticas como una gran estructura hipotético-deductiva.

[2]Es decir las reglas: $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = 1/a^n$ y $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Dentro del marco de las sintaxis algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[3] La estructura operativa está basada en las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica. En la primera sintaxis algebraica se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots\}$. De esta manera se construye un símbolo especial que tiene la propiedad del neutro multiplicativo, aunque éste no sea identificado con el 1. El número 5, entonces, es representado como 5. En el marco de esta primera sintaxis algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos ya que, como remarca Marco Aurel (Meavilla, 1993) *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*. Este hecho señala una diferencia sustancial con la segunda sintaxis algebraica, en donde el progreso en la operatividad con los números negativos hace posible tal inclusión, pues se establecen los convencionalismos para incluir a los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. Al parecer, por el contexto de tal formulación debida a Chuquet (Struik, 1986), uno de los objetivos de esta inclusión era dar legitimidad a los números negativos. En resumen, se puede decir que en el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió por la intención de preservar la operatividad de los caracteres cósicos al momento de incluir objetos matemáticos nuevos, a través de un mecanismo de convención matemática. La fuente de esta convención surge de un principio metamatemático que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. En términos de la perspectiva social que se quiere atender; este principio puede ser interpretado como un consenso que establece que un conocimiento es válido si con él se atiende a cierta unidad de un sistema de conocimientos.

La aparición de una representación gráfica, que utiliza la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean revisados. Éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento útil y aceptado; por lo que es necesario, si es posible, construir interpretaciones que *no lo contradigan*. Si se abandona el conocimiento anterior, debe ser por razones poderosas o casi inevitables (como sucedió, por ejemplo, con los logaritmos de los números negativos). En este sentido, el mecanismo de convención matemática debe ser puesto en funcionamiento con el objetivo de lograr una *coordinación* o *integración sistémica* de las representaciones. Es por ello que parte de la rica semántica de los números negativos es recuperada; por ejemplo, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar al otro lado* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas, construidos por Wallis, estaban íntimamente ligados a la razón característica (una proporción entre áreas). Estas interpretaciones tenían como propósito que un *único* algoritmo funcionará para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.

[3] En el lenguaje moderno se pueden identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia... de la incógnita.

Un ejemplo ilustrativo: las semánticas de la cuadratura de las curvas

Citemos como ejemplos, que resaltan los elementos fundamentales utilizados para la caracterización del mecanismo, las formulaciones hechas por Wallis y Newton en el marco del cálculo de cuadraturas de las curvas algebraicas. En ellas se puede notar la integración sistémica de dos formas de la noción de *negatividad* con dos conceptos diferentes de operatividad algebraica y aritmética con el objetivo de utilizar una única fórmula para el cálculo de cuadraturas. En el caso de Wallis la integración de la noción de negatividad es "no tener" y el concepto de proporción da como resultado una aritmética de infinitos; en cuanto a Newton (cuya noción de negatividad es "estar del otro lado") se tiene, como resultado, una interpretación geométrica del signo negativo que surge con la operación formal de los números negativos. Como se ha dicho hay dos diferencias sustanciales entre las dos versiones de esta nueva interpretación: en la de Wallis, las razones en donde el *denominador* es negativo se puede observar que no admite la operación división, mientras que en la de Newton si se hace. Este hecho, entre otros, ocasiona que se presenten dos versiones de funcionamiento del mecanismo:

- Paráfrasis de los razonamientos de Wallis (Confrey y Dennis, 2000): La curva de índice p, $y = x^p$ (p entero positivo) tiene una razón característica[4] de $1/(1+p)$. Dado que la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x}$ (q entero positivo) es $1\text{-}1/(1+q)=1/(1+1/q)$ entonces, para preservar esta estructura, la curva *debe* tener índice $1/p$. Aunque no se sabe cuál es la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x^p}$ es de esperarse que sea $1/(1 + p/q)$. Además, puesto que la cuadratura de la curva $y = 1/x$ es infinita, su índice es -1 (usando álgebra) por lo que su razón característica es $1/(1\text{-}1) = 1/0 =$ infinito. De manera análoga se puede interpretar que la cuadratura de la curva $y = 1/x^2$ es $1/(1\text{-}2) = 1/\text{-}1$ (es decir, igual a un infinito más grande que el anterior).

- Paráfrasis de los razonamientos de Newton (1669): Sabemos que la curva $x^{m/n} = y$, tiene área $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ (m, n enteros positivos). Además, la expresión $y = 1/x^2$ puede ser rescribirse como $y = x^{-2/1}$ por lo que *se puede* decir que su área es igual a $\frac{1}{-2+1}x^{\frac{1}{-2+1}} = -1x^{-1} = \frac{-1}{x}$ El signo negativo *puede* ser interpretado como el área infinitamente extendida del lado opuesto que en los casos anteriores, ya que $1/x$ es efectivamente el valor de esa área.

[4]Proporción existente entre el área debajo de la curva y el área del rectángulo que la contiene.

A manera de conclusión

Hemos ejemplificado de manera sucinta un mecanismo, al que denominamos convención matemática, y descrito sus significados y funcionalidad en el caso de los exponentes. Con ello nuestro proyecto didáctico de *reconstrucción* del discurso matemático escolar se robustece permitiéndonos señalar objetos y mecanismos constructivos que deben tomarse en cuenta en eventuales reconstrucciones. En términos epistemológicos, a la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, añadimos un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un *escenario* centrado en una *práctica social*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. De modo que la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos. Nuestras indagaciones ulteriores apuntarán en tal dirección.

Referencias bibliográficas

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). *La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(1), 5-31.

Farfán, R. & Martínez, G. (2001). *Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero*. En G. L. Beitía (Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. & Martínez, G. (2002). *Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes*. En C. R. Crespo (Ed.) Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Martínez, G. (2002). *Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 5(1) 45-78.

Meavilla, V. (1993). *Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel*. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991. (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Newton, I. (1669). *De Analysi per equationes infinitas*. (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.) The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)(pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Struik, D. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.