# ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS MATEMATICO ENCUADRADO EN UN MODELO EDUCATIVO

*Pedro Pérez Carreras*

*E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Valencia, ESPAÑA*
*Ceta-Upv, Cujae, CUBA*
pperezc@tesla.ispjae.edu

## RESUMEN

En un modelo cognitivo, la estructura cognitiva asociada con un determinado concepto matemático incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones, así como propiedades y procesos asociados(que llamaremos **concepto-imagen**, siguiendo a Vinner, Tall y Dreyfus y “estructuras elaboradas” o “esquemas” según los científicos cognitivos) y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura e influyéndose por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones conflictivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. Su coincidencia o no con lo que podríamos llamar **concepto-definición** (la formulación convencional lingüística que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto) es fuente de muchas disfunciones en el aprendizaje.

## 1. Objetivo

Nuestro objetivo es el tratamiento de los **conceptos** básicos del Análisis Matemático en sus concepto-definiciones actuales, no el de resultados concretos o cuerpos de resultados. Todos los conceptos básicos tratados descansan en la idea de convergencia que posee distintas manifestaciones, según el problema a tratar, pero la dificultad de comprensión en cualquiera de estas situaciones estriba en (a) cómo explicar que un proceso que no termina puede producir un resultado final finito y exacto y (b) cómo traducir el dinamismo inherente a ese proceso en estados estacionarios y, por lo tanto, manipulables algebraicamente.

## 2. Estrategia

Nuestra estrategia consiste en (1) respetar el objetivo de implantar el entendimiento de los concepto-definiciones del Análisis (es decir, no buscar alternativas simplistas, falaces o parciales a las mismas), (2) buscar ese entendimiento a base construir un concepto-imagen adecuado al concepto-definición objeto del estudio encuadrando esa búsqueda en un modelo educativo conocido, (3) diseñando una metodología apropiada que, por un lado, confirme la plausibilidad del modelo y, por otro, haga evidente su eficacia a la hora de garantizar el progreso hacia el entendimiento, (4) que permita el diseño descontextualizado de una propuesta metodológica a ser implementada por un profesor en un tiempo razonable (una o dos clases habituales)

## 3. Obstáculos

La motivación que hace necesaria la estrategia antes mencionado proviene tanto de los obstáculos cognitivos existentes en la docencia de las Matemáticas, en general, y del Análisis, en particular, que son fruto de su evolución histórica y de las corrientes de pensamiento filosófico de la disciplina que han conformado lo que podríamos llamar la enseñanza tradicional del Cálculo, como de la formación previa del alumnado que accede a esta disciplina.

**3.1 Dificultades que provienen de la propia disciplina:**

(a) **la propia naturaleza de las Matemáticas**: que es una forma de pensamiento que requiere una concentración considerable. Las ideas que se manejan no son, en modo alguno, triviales y requieren de un tiempo de asimilación. Las Matemáticas son intrínsecamente difíciles (probablemente porque la arquitectura de nuestro cerebro no está bien adaptada a largas cadenas de operaciones simbólicas), no siempre divertidas, y éste es un aspecto que no debe ser olvidado.

(b) **sus raíces antiguas y su crecimiento acelerado**: los resultados clásicos han ido evolucionando a lo largo de los siglos y la forma habitual de presentarlas no es genética, sino a través de la visión filosófica del momento: en nuestro caso (aunque ya cambiando), a través de una rígida jerarquía de secuencias lógicas que establecen demostraciones formales de hechos más generales que los que inicialmente se estudiaron y que son el producto de una sistematización muy posterior al momento de su descubrimiento. Las innegables ventajas de poseer un edificio lógico, tienen su contrapartida en hacer difícil simplificar la exposición de alguna idea profunda eludiendo los puntos claves: en este tipo no ambigüo de presentación lógica rige lo que podríamos llamar el principio de conservación de las dificultades, que hace que tarde o temprano se tenga que lidiar con ellas, algo que debiera tenerse en cuenta a la hora de diseñar alternativas a las tradicionales a nivel universitario.

(c) **el divorcio entre la actividad matemática y la práctica docente**: pues las actividades primordiales del pensamiento matemático avanzado (la formulación de conjeturas, el alumbramiento de pruebas o refutaciones convincentes y el uso constante de diagramas) está ausente de la presentación docente: se presenta un producto acabado donde "todo está en calma y en certidumbre" y las pruebas se desarrollan a lo largo de las lineas deductivas tradicionales. El ansia de producir pruebas formales tiene aspectos particularmente problemáticos:

(c.1) **estilo de presentación**: el estilo de presentación docente de las pruebas es esencialmente el mismo que el utilizado para comunicar resultados de investigación a través de artículos en revistas científicas, en donde se abunda en detalles sobre las definiciones dadas y las pruebas empleadas, sin referencia alguna a por qué el problema es interesante en sí y su relación con los orígenes del mismo. Puede ser descrito como el código mínimo de entendimiento necesario para transmitir el conocimiento matemático. Su carácter mínimo hace que, incluso en artículos de investigación, se pierda parte de la información vital para su entendimiento. La razón aducida para evitar diagramas es que éstos incorporan más información que la estipulada por el problema y una prueba válida no puede hacer uso de hipótesis distintas de las estipuladas. Sin embargo, los diagramas nos proporcionan representaciones extraordinariamente poderosas y ricas de la información y, aunque, ese poder pueda ser fuente de errores y malas interpretaciones, su uso es casi indispensable para el matemático creativo, pues ¿qué es un diagrama sino una concesión a la intuición geométrica? Así pues, la epistemología (entendimiento de la estructura del conocimiento) que produce esa práctica docente (insistencia en sistemas axiomáticos expresados en lenguaje de Teoría de Conjuntos y eliminación de toda evidencia intuitiva y visual) basada en el divorcio al que aludíamos, es diametralmente opuesta a la realidad cotidiana de la comunidad matemática creativa.

(c.2) **énfasis en aspectos sintácticos**: Un subproducto de esta praxis es el énfasis en aspectos sintácticos, más que en los aspectos semánticos (control del significado), lo que nos lleva a otro obstáculo serio (c.3) **su lenguaje de comunicación**: Observemos que el uso del idioma corriente ya entraña una competencia especial, al depender éste del uso de formas gramaticales elaboradas, de la relación entre términos y de la aplicación de esos términos a la descripción de situaciones. Además, el idioma corriente es rico en reglas, significados y convenciones matemáticas implícitas que, últimamente, es lo que nos permite sentar las bases del conocimiento matemático, al permitir la elaboración de un lenguaje más refinado que abstrae y extiende las reglas y significados de las Matemáticas y que, en última instancia, proporciona teorías axiomatizadas. Incluso el uso de conceptos lógicos claves siguen reglas lingüisticas. Así, el conocimiento matemático implícito en el lenguaje corriente es la base de todo el conocimiento matemático. A pesar de todo ésto, el lenguaje empleado en la docencia de las Matemáticas (formal o informal) asigna un grado de precisión a los términos matemáticos y lógicos que no es siempre el del idioma corriente. Dado que uno de los objetivos de la docencia es fijar al alumno en contexto, un paso previo al desarrollo de la disciplina debiera ser aclarar que se utiliza un semidialecto del idioma: términos habituales en Análisis como "límite" evocan en el idioma corriente una barrera que no puede ser sobrepasada y así podríamos poner muchos ejemplos.

**3.2 Dificultades de que provienen del desarrollo histórico**:

A finales del XVII Newton y Leibniz (1646-1716), independiente y simultáneamente, consiguieron un cuerpo de doctrina cuyos logros conjuntos pueden sumarizarse en (a) la invención de los conceptos generales del Cálculo Infinitesimal, como el cociente de diferencias y la integral, (b) el diseño de una notación que convirtiera el Cálculo en un algoritmo que permitiera resolver las ecuaciones infinitas, como el Algebra lo hace con las ecuaciones finitas y © la constatación de que los procesos de hallar tangentes y áreas (diferenciación e integración) son mutuamente inversos (Teorema Fundamental del Cálculo).

Las dos escuelas (continental e insular) a que dieron origen ambos investigadores difieren sustancialmente en el método empleado para desarrollarlo.

(a) **Cálculo de diferencias**: La tradición continental era guiada por la visión que de las Matemáticas tenía Descartes: poder del simbolismo (no debates sobre fundamentos) y justificación de su interés por su capacidad de resolver problemas concretos (no la creación de sistemas axiomáticos y pruebas largas). Leibniz resolvería problemas como el de la loxodrómica (trayectoria descrita por un navío), la catenaria y problemas de optimización. Sus éxitos le convencieron de la importancia crítica de elegir símbolos apropiados y hallar las reglas de manipulación de los mismos. Así, y una vez definidos los nuevos instrumentos de trabajo, entendidas sus propiedades y creados unos símbolos apropiados, Leibniz y sus seguidores (los Bernoulli, Euler, Huygens, etc..), persiguiendo la creación de un lenguaje en el que todo razonamiento correcto se convirtiera en un cálculo sencillo, procederían pragmáticamente desarrollando el llamado "cálculo de diferencias" como un álgebra en donde se daban como válidas ecuaciones como $x+dx=x$, sin interpretar $dx$ como una magnitud constantemente decreciente (y, por lo tanto, ajena al concepto de límite) para evitar nociones filosóficamente peligrosas como el infinito. Una técnica crucial en integración, como es el método de substitución es virtualmente automática en este nuevo lenguaje. El cálculo de diferencias transformaría el uso de procesos límite de un método sólo apto a un número pequeño de especialistas en un cálculo sencillo

que, posteriormente, sería susceptible de ser enseñado en libros de texto a miles de personas. La extraña algebrización propuesta no sería aceptada por todos. La primera exposición organizada de los logros de la escuela continental fue el "*Analyse des* *infinitement petits*" (1696) del Marqués de L'Hopital con asistencia de Johann Bernoulli (1667-1748). Esta obra provocaría la denominación "Análisis" para referirse al Cálculo Diferencial e Integral aunque el término "análisis" ya había sido utilizado por Vieta para designar lo que hoy día llamamos Algebra *en "In Artem Analyticem Isagoge*", 1591. Observemos que el Cálculo continental derivaría su nombre de su uso como instrumento para calcular aunque, en su nivel más básico, sería una colección de técnicas algebraicas que producen producen respuestas numéricas exactas a problemas geométricos.

(b) **Los Principia**: Por contra, la escuela insular (Newton, Maclaurin, etc….) desarrollaría el concepto de "magnitud constantemente decreciente", primer prototipo del concepto de límite entendido de una forma más restrictiva que hoy día: la estabilización de un conjunto de valores que se acercan más y más al valor deseado, pero no lo sobrepasan. La idea sería proporcionar las reglas operativas de la diferenciación e integración, resultados que aparecen implícitos en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que desarrolla un modelo del mundo de profunda importancia: vivimos en un planeta sujetos a sus leyes. Así como Leibniz era fundamentalmente un algebrista, Newton era fundamentalmente un geómetra. Para Newton, el Cálculo era un intento matemático de describir las leyes de la Naturaleza: si uno quiere entender cómo funcionan las cosas, hay que pensar en términos del mundo físico y, por lo tanto, en términos geométricos. Al desarrollar el Cálculo intentaría hacerlo de forma que se mantuviera lo más cerca posible del contexto físico que quería explicar. El intento de Leibniz de convertir el Cálculo en una máquina algebraica sería completamente ajeno al espíritu newtoniano: si uno pasa a la manipulación algebraica, esencialmente deja de pensar geométricamente, es decir, deja de pensar sobre el sentido que tiene lo que está haciendo. Dado que los lectores de la obra de Newton estaban familiarizados con la Geometría de Euclides y Apolonio, sería la introducción de los métodos infinitesimales lo que causaría la mayor sorpresa pues, a pesar de que éstos métodos tenían una larga historia en la Geometría (habría que remontarse a Arquímedes en su " Método", en donde comparaba dos áreas fijándose en el número de "lineas" de las que estaban compuestas o comparando dos sólidos en función del número de "planos" que los constituían), esta obra sólo se conocería en Occidente en el siglo XX.

**(c) Fusión de ambas aproximaciones:** Al no poder algebrizar el concepto de límite (habría que esperar a Cauchy), los continuadores de la obra de Newton decidieron basar el edificio conceptual en la Geometría clásica de los griegos, produciéndose la monumental obra de Maclaurin "*Treatise of fluxions*". Así, esta primera idea de límite debida a Newton, sería elaborada por Maclaurin, entroncada en la tradición continental por d'Alembert y sistematizada por Lacroix en *su "Traité de calcul différentiel et du calcul intégral*" (1797) para ser finalmente algebrizada por Cauchy. En el Continente la fundamentación geométrica de Maclaurin era conocida (Maclaurin recibiría dos veces el premio de la Académie des Sciences y sus libros se traducirían rápidamente al francés) pero, para cada prueba geométrica que presentaba en su tratado, los matemáticos continentales elaborarían su propia prueba algebraica. La ventaja de esa idea de Newton es que poseía un atractivo intuitivo y geométrico y, aunque no era entendida de forma muy precisa, permitiría el desarrollo de una serie de métodos capaces de resolver numerosos problemas aplicados ("*data aequatione quoteinque fluentes quantitoe involuente fluxions invenire et vice versa*" o, en castellano, resolver ecuaciones diferenciales).

(d) **Rigor en el Cálculo**: Podemos argumentar que, si tanto se pudo avanzar utilizando el Cálculo sin necesidad de rigorizar la disciplina ¿porqué hacerlo a nuestros alumnos? Ya hemos mencionado que, como lo que contaba eran los resultados (que establecieron la dinámica de las partículas, cuerpos rígidos, fluidos y sólidos), nadie se preocupó de establecer unos fundamentos sólidos, porque rara vez cometían errores}, lo que era debido, básicamente, a dos razones: (a) las funciones de variables reales, series de potencias o funciones derivadas de la realidad física raramente producen situaciones que lleven a error y (b) matemáticos como Newton, Euler o Lagrange tenían una comprensión muy profunda de los problemas que trataban, lo que les llevaba a elegir intuitivamente los métodos más potentes y evitar errores y esta última cualidad esta fuera del alcance de la mayoría de nuestros alumnos.

A principios del siglo XIX se dieron las tres circunstancias siguientes existía un álgebra de desigualdades bien desarrollada, el rigor empezaba a considerarse importante y se darían cuenta que los conceptos relacionados con la convergencia (límites, series, derivadas, integrales) podían ser descritos precisamente en el lenguaje de desigualdades. Analicemos estas tres circunstancias:

(d.1) El álgebra de las desigualdades: Durante el siglo XVIII una de las prioridades era desarrollar técnicas que permitieran aproximar} con una estimación del error cometido: para una ecuación no resoluble exactamente, había que buscar una aproximación (en forma de suma finita sencilla) y luego calibrar el error cometido para saber si era aceptable. La herramienta más poderosa para resolver este problema era la fórmula de Taylor que permitía calcular el valor de una función en un punto, supuesto conocidos los valores de la función y de sus derivadas sucesivas en un punto cercano, en la forma de una serie infinita (Brook Taylor desarrollaría sus series estableciendo analogías entre diferencias finitas y fluxiones). Considerando solamente la suma de los n primeros términos de esta serie (polinomio de Taylor), los valores de una función determinada podían ser calculados por hombre (o máquina) con la precisión requerida (dependiendo del n elegido), estimando el error cometido mediante la acotación superior "de la cola de la serie" (o término complementario). La acotación del término complementario para una gran variedad de expresiones analíticas, al no existir un método de acotación universal para cualquier término complementario, produjo toda una serie de técnicas que se agruparon en un cuerpo de doctrina nada trivial llamado el álgebra de las desigualdades. Dado un entero positivo n, los matemáticos del XVIII estaban entrenados para hallar un error, es decir, un épsilon.

(d.2) Varias circunstancias concurrieron para que la rigorización del Cálculo se considerara importante y deseable: razones de índole filosófica: (a) ganas de rebatir los ataques de matemáticos como George Berkeley, obispo de Cloyne, que mencionamos (de hecho, la fundamentación geométrica de Maclaurin tenía el objetivo colateral de contestar a las críticas de Berkeley), (b) la percepción de que había un límite al número de resultados que podían ser atacados con las técnicas del Cálculo y la conveniencia de no seguir avanzando y consolidar las ganancias obtenidas, (c) la existencia de un matemático prominente, Lagrange (1736-1813), que sí estaba interesado en cuestiones de fundamentos, pues deseaba proporcionar una base puramente algebraica al Cálculo, afirmando explícitamente que había que liberarlo de la idea foránea del "movimiento" y, dada la inconsistencia del concepto de infinito, se preguntaba cómo tantos resultados correctos pueden derivarse de una noción inconsistente. En 1784, cuando todavía se encontraba en Berlin, promocionaría un premio de la Academia para áquel que pudiera proporcionar una fundamentación satisfactoria del Cálculo. Lazare Carnot (1753-1823) y Sylvestre

Francois Lacroix (1765-1843) producirían esfuerzos en este sentido, sin conseguirlo. El propio Lagrange en su *Théorie des fonctions analytiques* trataría de basar el Cálculo en la noción de series de potencias (convergentes o no); este intento estaría también condenado al fracaso, pero produciría nociones como la de función derivada y resultados como la expresión para el término complementario en el desarrollo de Taylor que quedarían tal y como las trabajó y (d) la necesidad de muchos matemáticos prominentes de enseñar a grupos cada vez más numerosos de alumnos en las nuevas instituciones surgidas de la Revolución Francesa y del Imperio Napoleónico, que estimó que la creación de cuerpos de científicos e ingenieros podrían ser útiles al estado moderno. La necesidad de escribir libros de texto para estas instituciones (Cauchy, Lacroix, Charles Sturm, Jean-Marie-Constant Duhamel) obligó a repensar y estructurar el Cálculo: el establecimiento de las academias militares y la école Polytechnique en 1795 creó una forma de explicar Matemáticas que se convertiría en el modelo de la educación universitaria.

(d.3) Aparte de los tres volúmenes de la obra *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797-1800)} de Lacroix, no existían textos de referencia, por lo que Cauchy comenzaría la escritura sistemática de sus notas de clase. En 1821 *aparecería Cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique*, tratando los preliminares del Análisis e incluyendo la teoría de las funciones continuas y la teoría de la convergencia de series reales y complejas. Esta obra sería seguida en 1823 por *Résumé des lecons données á l'école Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Sin embargo, el objetivo último de Cauchy no sería el entrenamiento de principiantes, sino la investigación científica y su obra escrita resultaría en una reformulación drástica del Análisis al iniciar la eliminación del pensamiento algorítmico y su substitución por el pensamiento conceptual, iniciando, así, la transición del Análisis algebraico (en el sentido de Euler y Lagrange) al Análisis aritmético (en el sentido de Weierstrass). Su obra sería entendida con dificultad, incluso por sus colegas, y muchas innovaciones importantes contenidas en ellos serían redescubiertas más adelante. Dado el poco éxito entre alumnado y colegas de las obras antes mencionadas, el propio Cauchy publicaría versiones más accesibles en 1829 y 1833. Tanto el libro de Lacroix como los que seguirían a los de Cauchy en las instituciones francesas evitarían el estilo conceptual de Cauchy (aunque no sus resultados sobre series convergentes): por ejemplo, la continuidad sería descrita más que definida; la integración sería vista como la antidiferenciación;....El principal objetivo del profesorado francés sería la preparación de estudiantes de ingeniería y ciencias para trabajos útiles al Estado. Teniendo a mano las expresiones decimales, nadie (salvo Cauchy) se preocuparía de proporcionar teorías para los números irracionales.

¿En qué basarse para lograr esa rigorización? El Algebra de Desigualdades sería la clave. La necesidad de basar todos los métodos y resultados conseguidos en definiciones claras (noción de convergencia, continuidad, diferenciablidad e integrabilidad) y pruebas rigurosas, llevaría a Cauchy (1789-1857), en el siglo XIX, a una primera etapa de rigorización de la disciplina. El hecho de que expresiones como "una variable que se aproxima a un valor fijo" y la visualización de los números reales como puntos de una recta aparezcan profusamente, nos indica que el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, en esta primera etapa, fue presentado en términos de matemática infinitesimal y no en lenguaje épsilon-delta (sólo utilizado por Cauchy verbalmente y probablemente la causa de algunos resultados incorrectos que obtuvo). Estas llamadas a la intuición geométrica, además del descrédito que sufriría la visualización de conceptos importantes como continuidad y diferenciabilidad harían necesaria una segunda etapa de "rigorización", liderada por Weierstrass (1815-1897) y Dedekind (1831-1916), que tendría las auténticas características de una revolución, eliminando el contenido geométrico-intuitivo de los razonamientos analíticos, al basarlos en una estructura aritmética: primero en los números reales (Dedekind) y, posteriormente, en los números naturales (Cantor), estructura ésta que estaría controladada por unos pocos axiomas (axiomas de Peano), que son, esencialmente, un conjunto de entidades generadas a partir del 0 por aplicación reiterada de la operación “sucesor”. La axiomatización de Peano, a su vez, abriría el camino a la teoría de funciones recursivas, la teoría de los algoritmos y de la computación, entendida en sentido moderno. La construcción del continuo a partir de los naturales requeriría la introducción de unos nuevos entes matemáticos: los conjuntos infinitos. Además, la aritmetización del Análisis serviría a la consolidación de la Matemática Pura como disciplina practicada por un grupo específico de profesionales, creándose unos requerimientos especiales de formación para ganar aceptación dentro de este grupo.

(e) Las dos etapas de rigorización diferirían en la explicación de la noción de infinito que subyacía en sus construcciones: mientras que Cauchy se sustentaba en la noción de infinito potencial, Weierstrass se basaría en la noción de infinito actual y eliminaría los infinitesimales del Análisis. En un primer paso, el soporte natural de la teoría (el continuo de los números reales) debía ser rigorizado. En la historia del Análisis desde Leibniz hasta Weierstrass existían dos teorías rivales del continuo. Por un lado, la teoría Weierstrassiana hoy día aceptada y, por otro, la teoría Leibniziana (el continuo arquimediano extendido al no arquimediano producto de añadir los infinitesimales e infinitamente grandes). Esta segunda teoría fue la dominante hasta la revolución de Weierstrass y Cauchy se movería completamente en esta tradición. La revolución a la que aludíamos consistió en poder explicar satisfactoriamente el Análisis conocido en términos de los números reales (tal como los definió Weierstrass) y desarrollarlo más allá, eliminando del Analísis todas las magnitudes variables, todo cambio, movimiento y reduciéndolo todo a estados estacionarios, es decir, a magnitudes constantes (Luzin). Observemos que un real para Cauchy era una variable que podía correr a través de los reales de Weierstrass, los infinitesimales y todos aquellos “números” que diferían de los reales de Weierstrass en números infinitamente grandes o infinitesimales. Siguiendo a Lakatos, las variables de Cauchy eran sucesiones de reales de Weierstrass; sus números infinitamente grandes eran sucesiones no acotadas y sus infinitésimos, sucesiones que convergían a cero. Aunque Cauchy no menciona explícitamente la noción de sucesión, la idea está implícita (una de las dificultades pedagógicas en la exposición del Análisis es que, para la mayoría de alumnos, la visión del continuo que tienen está más próxima a Cauchy que a Weierstrass). Weierstrass construiría los números reales a partir de los racionales mediante la introducción de una algebraización satisfactoria de la noción de convergencia y la admisión del infinito actual de Cantor al considerar conjuntos infinitos de racionales positivos con sumas parciales acotadas para construir reales.

(f) Durante el siglo anterior los matemáticos se habían dedicado a buscar orden y regularidad en el Análisis. Las nuevas definiciones construidas con sumo cuidado y con fines profilácticos resultaron ser alarmantemente complejas y traerían más consecuencias que las previstas inicialmente haciendo la disciplina más precisa, pero más compleja, exigiendo una revisión de todas las pruebas conocidas y propiciando que, en el siglo XIX, el énfasis pareciera estar en la búsqueda de la excepción y la irregularidad. Dirichlet hallaría una función que no es continua en ningún punto (función que no sería integrable). Riemann (en su Habilitationsschrift de 1854) produciría el primer ejemplo de función integrable con una infinidad de discontinuidades. Este ejemplo sería de trascendencia en el desarrollo del Análisis, pues, desde Cauchy, la teoría de la integración sería una serie de intentos de extender el concepto de integral a tantas funciones discontinuas como fuera posible, intentos que sólo tendrían sentido gracias a la existencia de funciones altamente discontinuas, como la producida por Riemann. Así, con Fourier como precursor, los trabajos de Riemann colocarían a las funciones discontinuas como objetos de estudio en el paisaje matemático. Weierstrass sorprendería a la comunidad matemática con el primer ejemplo de una función continua que no es diferenciable en ningún punto, ejemplo que era contrario a toda intuición: de hecho todos los libros de Análisis de la época “probaban” que toda función continua era diferenciable salvo, quizá, en un número finito de puntos, probablemente influidos por los trabajos de Ampére (1775-1835 y creador de la Electrodinámica) que aseguraba haber probado este resultado. ¿Hay algo menos intuitivo que una función continua en un intervalo que no tenga derivada en ninguno de sus puntos? Observemos que la no-diferenciabilidad en un punto puede entenders intuitivamente como que la gráfica presenta un ángulo (vértice) en ese punto. La existencia de una función como la planteada sería algo así como una curva continua toda ella constituida por vértices (más tarde este descubrimiento se encarnaría en la descripción del movimiento browniano que describe el desplazamiento de las moléculas de un gas, como el aire que respiramos). Así, el concepto de función introducido por Dirichlet (que establece simplemente la función como una correspondencia arbitraria) y la noción de serie funcional como generadora de funciones como las de los contraejemplos anteriores, haría abandonar la visión geométrica de función (es decir, funciones y curvas serían ya conceptos distintos). El ejemplo anterior fue también el responsable de la separación entre las nociones de continuidad y diferenciabilidad en el estudio del Análisis.

Gracias a la existencia de contraejemplos a las nociones intuitivas más comúnmente aceptadas, los trabajos de Weierstrass tuvieron un efecto más duradero que ya hemos apuntado: la necesidad de proceder a una nueva etapa de rigorización (entendida como aritmetización) en los Fundamentos del Análisis al ser capaz de construir contraejemplos a las nociones más comúnmente aceptadas y plausibles (como la construcción de curvas antiintuitivas, como la de Peano, que desacreditarían la intuición visual).

> **Our own job is not entirely easy:...we have to explain the ideas of Newton in the notation of Leibniz to pupils who may not be quite so apt as Cauchy**
>
> Gilbert Strang

## ENCUADRE EN UN MODELO EDUCATIVO

La frase anterior de Strang resume las dificultades cognitivas a las que un profesor se enfrenta cuando quiere que sus alumnos entiendan las ideas básicas del Cálculo Infinitesimal y de las que debe ser consciente. Las consideraciones anteriores hacen patente también la necesidad por parte del docente de conocer la génesis de los conceptos matemáticos y sus ulteriores transformaciones. Es nuestra fuerte intuición que, como estrategia educativa, no hay nada mejor que hacer vivir al alumno la aventura intelectual que supone la propia historia de las Matemáticas relativa al concepto cuyo entendimiento perseguimos.

Para buscar un modelo que se adapte a lo que pretendemos, debemos buscar uno que imite, en su esencia, el proceso de cómo discurrió la génesis de los conceptos matemáticos desde la idea naive inicial hasta la formulación rigurosa. Fijándonos, por ejemplo, en la evolución del concepto de grupo abstracto, éste ocurrió en fases o niveles que podrían ser descritas como (1) el descubrimiento de fenómenos aislados (nivel visual), (2) el reconocimiento de ciertas características comunes a todos ellos (nivel de reconocimiento), (3) búsqueda de nuevos objetos, su estudio y clasificación (nivel de clasificación y relación) y (4) la emergencia de principios generales y la formulación de postulados, cristalizando en abstracción de la estructura investigada (nivel de deducción). Aceptando que este esquema jerarquizado puede ser útil para la comprensión de cualquier otro concepto del Cálculo, recordemos qué es el

**Modelo de van Hiele**

Una línea de investigación prometedora es el estudio y aplicación del llamado modelo de van Hiele, que proporciona una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de niveles de pensamiento, que no se identifican con niveles de habilidad computacional y formación previa, y que, además de un Nivel 0 (predescriptivo), podríamos clasificar como: Nivel I (de reconocimiento visual), Nivel II (de análisis), Nivel III (de clasificación y relación) y Nivel IV (de deducción formal). Así, la aplicación de este tipo de modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permita la detección de los mismos, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: (i) los niveles deben ser jerárquicos, recursivos y secuenciales, (ii) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual, (iii) los instrumentos (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos y (iv) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Más precisamente, la detección de los niveles anteriores en una investigación concreta debe ser posible atendiendo a las seis propiedades siguientes:

> *Secuencialidad fija*: Un aprendiz no puede estar en un nivel n sin haber superado el nivel n-
>
> *Adyacencia*: El objeto de percepción del nivel n-1 se convierte en el objeto de pensamiento de nivel n.
>
> *Distinción*: El nivel n requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido al nivel n-1, ésto es, la percepción de una nueva estructura completa.
>
> *Separación*: Aprendices que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse en lo que al objeto de su razonamiento se refiere.
>
> *Cada nivel tiene su lenguaje*: Cada nivel posee un lenguaje característico. Podemos encontrar en diferentes niveles las mismas expresiones con diferentes significados.
>
> *Consecución*: El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual.

Las raíces de este modelo hay que buscarlas también en la obra de Piaget, aunque con diferencias relevantes: admitiendo la existencia de varios niveles de pensamiento, Piaget piensa que el paso de un nivel de pensamiento a otro es función del desarrollo, van Hiele del aprendizaje. La preocupación de van Hiele estriba en cómo estimular el progreso de un nivel al siguiente, Piaget no veía la existencia de estructuras en un nivel superior como resultado del estudio de un nivel inferior. En el modelo de van Hiele sólo se alcanza el nivel superior si las reglas que gobiernan el nivel inferior han sido hechas explícitas y estudiadas, convirtiéndose así en una nueva estructura Piaget no da importancia al lenguaje en el paso de un nivel al otro. En van Hiele, cada nivel desarrolla su propio lenguaje característico de ese nivel.

## 4. Pautas de trabajo (Entrevista Clínica, Test de Respuesta Múltiple, Tratamiento Estadístico Robusto y Elaboración de la Propuesta Metodológica)

Elegido, pues, el modelo de van Hiele como marco de nuestra experiencia educativa por sus indudables conexiones con la aproximación genética que preferimos en Matemáticas y elegido un concepto concreto, la experiencia educativa pretende **crear un concepto-imagen** adecuado su concepto-definición. Adecuado hay que entenderlo en el sentido que la formulación verbal del concepto-imagen que se persigue debe producir automáticamente el concepto-definición, cuando el alumno disponga de la madurez de manipulación algebraica y lógico-deductiva que comporta el concepto-definición, por lo que, de ser exitosa, puede aplicarse a alumnos preuniversitarios o a alumnos de primer curso universitario que están cursando precisamente la materia de Cálculo Infinitesimal.

### 4.1 Entrevista Clínica

Dada la importancia capital que el lenguaje exhibido por los aprendices tiene en el modelo de van Hiele, la experiencia discurrirá como un diálogo socrático entre profesor y aprendiz: la investigación consiste primordialmente en diseñar el diálogo como una entrevista clínica semi-estructurada cuyo devenir (i) debe hacer aflorar los tres niveles I,II y III de van Hiele de razonamiento, (ii) debe ceñirse a una duración razonable y (iii) debe conseguir el objetivo propuesto, que es la la formulación verbal por parte del aprendiz de la definición del concepto que se persigue correspondiente al concepto-imagen adecuado al concepto-imagen del concepto que se estudia.

Naturalmente, debemos partir de algún tipo de información aceptada por entrevistador y entrevistado: así, nuestro nivel Predescriptivo obliga a partir de conceptos y hechos simples **geométricos** (pues perseguimos la creación progresiva de un concepto-imagen con fuerte componente visual-geométrica) de fácil aceptación por parte del aprendiz y establecer una reglas de juego verbales aceptables por ambas partes (profesor y aprendiz). Nuestra autoimposición de poder pasar la experiencia a alumnos preuniversitarios, obliga a la no utilización de terminología o habilidades algebraicas. A partir de ellos, construiremos una **primera imagen** que sea **manipulable** mediante un solo **mecanismo** (que deberá ser accesible al aprendiz para su ejecución), preferiblemente utilizando asistentes matemáticos y dando entrada en nuestra experiencia educativa a las nuevas tecnologías cognitivas (cuyo manejo no es requerido al aprendiz). Su utilización sobre ejemplos preseleccionados de dificultad creciente deberá ir detectando los niveles I,II,III de van Hiele (para los que habrá que establecer una lista de descriptores de reconocimiento) tanto en las manifestaciones del aprendiz sobre cómo afianzan o alteran sus convicciones como en el uso del lenguaje que emplee, progresivamente más refinado, conceptualmente hablando.

Por nivel detectado, la batería de preguntas que conlleva la experiencia consiste en un ciclo de aceptación-confianza-crisis, crisis que es producida por una nueva percepción que altera el concepto-imagen creado en ese nivel y obliga a un nuevo ciclo de aceptación-afianzamiento-crisis y así en espiral hasta alcanzar el nivel III.

El hallarse en nivel III se caracterizará por que

1.- el aprendiz exija una definición, que procuraremos establezca él mismo

2.- satisfacción del aprendiz al comprobar que “su” definición resuelve los casos problemáticos que le han dado problemas a lo largo de la entrevista

3.- Nueva crisis al ser confrontado con situaciones que su definición no resuelve, para hacerle ver las limitaciones de nuestra propuesta y la necesidad de proceder al concepto-definición en contextos más precisos que el puramente visual (algebraico y lógico) y a perseguir con coraje todas aquellas implicaciones que se sigan (necesidad de las teorías matemáticas). Nuestra experiencia tiene como objetivo producir al alumno la sensación de haber dominado un determinado concepto y hacerle ver que, si requiere certeza, debe proceder al nivel IV.

### 4.2 Ejemplo Ilustrativo

Concepto: Continuidad de una función en un punto

Manipulación: Mediante DERIVE®

Primera Imagen: Curva deformable

Mecanismo: Estiramiento (escalamiento horizontal)

#### 4.2.1 Consideraciones previas

La presentación habitual del concepto de continuidad en el sentido de Cauchy-Weierstrass (la formulación "épsilon-delta")

(i) requiere no basarla en todas aquellas consideraciones visuales habituales que la palabra continuidad pueda sugerir, al ser esta definición esencialmente una consideración sobre controlabilidad local de errores y, aunque pueda tener un equivalente visual (eso es precisamente lo que buscamos bajo el término concepto-imagen), ese equivalente no corresponde a posibles levantamientos de lápices a la hora de plasmar la gráfica de la función correspondiente (Propiedad del Valor Intermedio) u otras imágenes de no rotura de la gráfica.

(ii) suele sustentarse en una visualización estática (para una función f concreta y un punto a de su dominio de definición, dado un distanciamiento vertical de la recta y = f(a) , encontramos un pedazo de gráfica que, conteniendo al punto del plano (a,f(a)), se halla localizado dentro de los límites marcados por ese distanciamiento vertical). Al no transmitir la esencia del concepto de límite como un proceso indefinido, no es adecuada y sólo nos sirve como punto de partida de construcción de nuestro concepto-imagen dinámico.

(iii) requiere de una madurez *algebraica* en tres vertientes: algebraica es la traducción de efectos visuales en símbolos, algebraica es la manipulación de símbolos (como, por ejemplo, módulos y sus manipulaciones) y algebraica también es la explicitación de las leyes lógicas inherentes al condicionamiento de las desigualdades: "para todo....., existe....."

No es habitual que las dos primeras vertientes estén presentes en alumnos preuniversitarios y la tercera, aunque disponible, necesita de entrenamiento más largo que el que habitualmente se proporciona (no basta poner los cuantificadores en su posicionamiento correcto y tirar para adelante). Nuestra propuesta metodológica **no** requerirá madurez algebraica, por lo que será fuertemente visual y la vertiente lógica se deberá plasmar en el condicionamiento verbal de unas imágenes a otras, lo que lograremos vía el programa DERIVE® como asistente matemático. Supondremos que

(i) los alumnos sometidos a la propuesta metodológica reconocen objetos como curva y punto con sus propiedades matemáticas elementales: una curva está constituida por puntos y los puntos no tienen dimensión. Debemos cerciorarnos de que ésto es así y, caso de notar dificultades en esta concepción "ideal" de entes geométricos, debemos lograr su aceptación.

(ii) aunque alumnos puedan tener asociado el concepto de curva al de función, evitaremos la mención del término “función” a lo largo de la propuesta, dada la enorme cantidad de obstáculos cognitivos asociados a este término (como han probado numerosas experiencias investigadoras) y presentaremos solamente representaciones gráficas de funciones y no las expresiones algebraicas de las que provienen, para evitar todo tipo de manipulación algebraica.

(iii) el concepto-imagen que de una curva posee un alumno es de carácter estático.

Buscamos una propuesta metodológica que transmita la esencia de la definición de continuidad funcional: sustituiremos “función” por “curva” (pero no la imagen de (iii), sino algo dinámico y deformable que precisaremos) y todo el proceso de creación de imágenes adecuadas nos llevará al concepto-imagen de “curva controlable localmente”, cuya formulación verbal por parte del alumno será el paso inmediatamente anterior a la formulación algebraica de continuidad de una función en un punto.

### 4.2.2 ¿Cómo construir la entrevista clínica?

***Primer Objetivo: curva deformable***

Nuestro primer objetivo es la creación de un concepto-imagen dinámico y deformable de curva, en la que podremos ver más o menos alejados los puntos que la constituyen, lo que es imprescindible para realizar las aproximaciones sucesivas que involucra encubiertamente el concepto de límite subyacente a la definición de continuidad. Trabajando con hilos y gomas, comparando la propiedad de elasticidad que tiene la goma con el hilo y marcando dos puntos en colores distintos, podremos observar que la distancia entre los puntos aumenta al estirar la goma, volviendo ésta a la forma original cuando dejamos de tensionarla. Esta imagen nos deberá servir para introducir el concepto de curva matemática como una goma ideal que nos permite estirarla todo lo que deseemos.

***Construcción del estiramiento horizontal.***

¿Cómo provocar un estiramiento horizontal semejante al anterior sobre una figura plana sobre papel o pantalla, figura que deberá exhibir las características de lo que entendemos por curva, es decir, la “goma ideal”? Primero, trabajaremos con una lupa sobre ejemplos de curvas presentadas en papel, con la intención de ver sus puntos más separados (para lo que las curvas llevarán pintados dos puntos de diferentes colores). La lupa permite separar los puntos horizontalmente, al mismo tiempo que también tiene el efecto no deseado de verlos separados verticalmente, así que la lupa no produce el efecto de separación que realizábamos con el estiramiento de la goma y no es el instrumento adecuado para reproducir el estiramiento. Un asistente matemático puede producir en pantalla el efecto deseado con un escalamiento de abscisas, dejando inalterable la escala de ordenadas. Ya sobre pantalla, compararemos el efecto Zoom (similar a la lupa) y el estiramiento horizontal sobre distintas curvas y haremos observar como actúa incidiendo en la separación de los puntos de la curva.

***Trozo controlado***

Necesitamos introducir lo que entendemos por “trozo controlado”: primero en el contexto del lenguaje cotidiano, introduciendo ejemplos de situaciones que el alumno entienda como “controladas” (no necesariamente en el ámbito geométrico) para incidir en la idea de control como la no superación de unos límites establecidos. Posteriormente, introducimos la idea de trozo controlado de curva pasando por la noción de distanciamiento vertical: introducimos parejas de rectas horizontales para identificar el "trozo controlado" con la búsqueda de las intersecciones entre rectas y curva.

***Utilización adecuada de las deformaciones***

Debemos de evitar que el alumno se sitúe en una situación mecánica, en la que utilice el estiramiento horizontal por sistema para determinar el trozo de curva controlado. Para evitarlo, proponemos situaciones en la que no se aprecien claramente las intersecciones entre las rectas horizontales y la curva, para producirle la necesidad de utilizar las deformaciones de forma adecuada: combinaciones de Zoom estiramientos. Al mismo tiempo vamos cambiando la pareja de rectas horizontales para que observe el dinamismo del proceso: lo más adecuado es ir acercándolas al punto y así observará la dependencia existente entre la variable "pareja de rectas horizontales" y el trozo controlado. El alumno habrá cambiado sus objetivos de buscar un trozo de curva controlado (fijándose en las intersecciones con las rectas) a observar la dependencia del trozo controlado con la variable pareja de rectas horizontales.

***No existencia de trozo controlado***

Cuando el alumno se desenvuelva con la suficiente seguridad en el paso anterior, presentaremos situaciones en las que no es posible encontrar el trozo controlado, junto con situaciones donde sí es posible, dependiendo de la pareja de rectas horizontales dada. No incidiremos en las discontinuidades de salto o evitables, ya que estas reforzarían la imagen intuitiva y errónea de que una función continua como, exclusivamente, aquella que sin roturas. Por ello, buscaremos nuestros ejemplos en funciones oscilantes. Este paso suele representar una dificultad seria para el alumno, ya que anteriormente le estábamos pidiendo que buscara la intersección que permitiera identificar el trozo controlado y, ahora, pasamos a pedirle que determine si existe o no el trozo controlado para la curva y la pareja de rectas horizontales correspondiente. Para ello, el alumno en principio realizará estiramientos horizontales hasta que observe que el posible proceso indefinido de acercamiento no le va a permitir observar las intersecciones entre la recta y la curva, por lo que deberá concluir la no existencia de trozo controlado.

***Para cualquier par de rectas horizontales***

Hasta ahora hemos abundado en la situación estática correspondiente a *"dado un épsilon concreto encontrar un delta apropiado*", pero debemos dar el paso de ir practicando con cualesquiera épsilons, para lo que recurriremos a presentarle al alumno una curva con una variedad de parejas de rectas horizontales cada vez más próximas preestablecidas y pedirle el trozo controlado que corresponda. Una vez pasado satisfactoriamente este paso, preguntaremos, en ausencia de rectas horizontales, como procedería para cualquier pareja de rectas horizontales.

***Distinción entre comenzar por parejas de rectas horizontales o comenzar por parejas de rectas verticales.***

Vamos a pasar a estudiar el delicado aspecto **lógico** de la encubierta definición de límite funcional como es la diferencia entre "dado un épsilon encontrar un delta" y la definición que obtendríamos si diéramos un delta y quisiéramos encontrar un épsilon, sólo como una verificación de que entiende el posicionamiento de los cuantificadores lógicos y las diferencias que se producen al alterarlo. Para ello presentamos la situación que se obtiene al comenzar por parejas de rectas verticales, buscando el trozo controlado y las rectas horizontales correspondientes. Presentamos situaciones que hayamos observado anteriormente comenzando por parejas de rectas horizontales, y evaluamos la reacción de los alumnos: ¿Considera que es diferente el resultado al comenzar por rectas horizontales que el de comenzar por rectas verticales? ¿Observa que comenzando por rectas verticales siempre podrá encontrar un trozo controlado? ¿Concluye que son dos conceptos distintos los que se obtienen?

***Método de clasificación.***

Ya estaríamos en condiciones de solicitarle la definición de continuidad entendida como controlabilidad local de curvas, para lo que proponemos la idea de "curva controlable localmente" como aquella que, para cualquier pareja de rectas horizontales, siempre podemos encontrar un trozo controlado. Se le propone la búsqueda de un método de clasificación y su aplicación a un conjunto de curvas, pasando antes por ejemplos que le permitan observar que las curvas controlables tienden a quedarse planas ante la realización de estiramientos, propiedad que no se da en las curvas no controlables. Esperamos que el alumno ofrezca el método "*de estirar la curva y aquellas que tiendan a quedarse plana será controlable*"

***Algebrización***

La explicitación verbal del método por parte del alumno conlleva una evolución de razonamiento desde premisas muy elementales a la idea de controlabilidad con su manejo implícito de los cuantificadores lógicos y por tanto, habrá asimilado la idea de continuidad, aunque no la reconocerá con ese nombre. Haciéndole saber que el fenómeno estudiado hasta ahora también se le conoce con el término "continuidad", será conveniente enfrentarle con contraejemplos a su concepto-imagen del término verbal continuidad como "no rotura de la curva".

### 4.2.3 ¿Cuáles serían los descriptores de los niveles de van Hiele?

A modo de ilustración, ofrecemos cuáles serían los descriptores de cada nivel obtenidos por Pedro Campillo en su tesis doctoral (así como la elaboración de la entrevista clínica anterior, de la cual sólo hemos mostrado las ideas subyacentes y no las preguntas concretas):

**NIVEL 0 (Predescriptivo)**

0.1 El mero reconocimiento de los objetos a estudio (puntos, curvas, rectas) constituye lo que consideramos nivel 0 o predescriptivo: se reconocen los objetos con sus propiedades matemáticas elementales: un punto no tiene dimensión y una curva esta formada por una infinidad de puntos sin "agujeros" entre ellos.

**NIVEL I (de reconocimiento visual)**

1.1 La construcción del estiramiento por el alumno será una característica de nivel I, estiramiento entendido como separación horizontal de los puntos de una curva, dejando fijo el distanciamiento vertical entre ellos.

1.2 El reconocimiento del trozo de curva controlado localmente, fijánndose para distinguirlo en los puntos de corte entre la curva y la recta.

1.3 Una característica del nivel I es una primera apreciación de lo que luego vendrá a constituir el dinamismo del concepto: una pareja de rectas horizontales más cercanas al punto provocan una reducción del trozo de curva controlado localmente; comprende que el resultado depende de la variable "pareja de rectas".

1.4 (Diferenciación del nivel II) El alumno de nivel I que no ha llegado a nivel II no recurre a las deformaciones, cuando tiene dificultades para apreciar cuál es el trozo de curva controlado localmente, al no ser capaz de utilizar herramientas anteriores ante un problema nuevo.

**NIVEL II (de análisis)**

2.1 La utilización de las deformaciones de forma adecuada para poder decidir el trozo de curva controlado localmente es una característica del nivel II: la utilización de nuevos medios para resolver un problema que hasta ahora no se le había presentado.

2.2 Fijado un distanciamiento vertical, la apreciación de que una curva no tiene trozo controlado localmente para esas rectas dadas, proporciona una distinción con el nivel I, siempre que llegue a esa aseveración tras hacer realizado las deformaciones adecuadas y haya generalizado que, en el teórico proceso infinito de posibles deformaciones, no podría apreciar el trozo controlado. Así como la apreciación de trozo de curva controlado es un proceso finito y realiza deformaciones hasta poder

apreciar los cortes de las rectas con la curva con claridad, la conjetura de la no existencia de control local, supone un paso más en la calidad de razonamiento.

2.3 El alumno en nivel II avanzado también podrá desenvolverse en este tipo de problemas, aunque no se le explicite un distanciamiento vertical de entrada.

2.4 La separación entre los niveles II y III, seríaa la capacidad de distinguir que no se obtiene el mismo concepto de control local comenzando por distanciamientos verticales en lugar de horizontales.

**NIVEL III (de clasificación o relación)**

3.1 Es capaz de ejemplificar situaciones en donde la distinción mencionada en 2.4 es patente.

3.2 Proporciona el método adecuado para saber si una curva es controlable localmente y es capaz de aplicarlo correctamente, siendo esta actitud un diferenciador claro de nivel III.

**Test de Respuesta Múltiple**

La realización, en número suficiente de entrevistas clínicas previas permitirá la confección de un test de respuesta múltiple. Procederemos a la elaboración de esa prueba escrita con los condicionantes que se derivan de ajustarse al modelo educativo (al igual que la entrevista) y con aportes de información, que suplan sus deficiencias frente a la riqueza informativa que se proporciona en la entrevista. Diseñaremos cuatro opciones de respuesta cerradas por pregunta (que habrán sido escogidos de entre las respuestas más representativas de la entrevista, acertadas o no), dejando una opción de respuesta "e", abierta para dar libertad de expresión, en el caso de que las otras cuatro opciones no se correspondieran con el pensamiento del alumno y, siendo la elección de esta ultima opción, nuestra única posibilidad de indagar sobre el lenguaje empleado por el entrevistado, aspecto este que nos venía dado de forma natural en la entrevista.

## 4.3 Tratamiento Estadístico

Se plantea la dificultad de asignar un nivel de razonamiento respecto al concepto que investigamos a cada uno de los tests (los descriptores conseguidos en la entrevistas son la clave), para lo que utilizamos un algoritmo de K-medias con la asistencia del Programa SPSS©. En dicho algoritmo, los casos se asignan a su vez al centro de conglomerado más próximo. La localización del centro, en el caso de que hayamos seleccionado utilizar las medias actualizadas, se actualiza después de añadir cada dato. Se asignan todos los datos y el proceso se van repitiendo hasta que la solución converja. Entonces se clasifican todos los casos, asignándoles el centro de conglomerado más próximo. Antes de comenzar el análisis de conglomerados con el algoritmo de K-medias, nos planteamos elegir el número de conglomerados, que según nuestra clasificación de niveles, debería de ser de tres. Pasamos, en una segunda fase, a buscar unos centros iniciales, para lo que hicimos una preclasificación de las pruebas a las que claramente podíamos asignarle un nivel, que no será definitiva, sino útil para encontrar los centros iniciales (para arrancar con el algoritmo) y que irían cambiando a medida que avanzamos. Para poder realizar esta preclasificación, agrupamos las preguntas de la prueba escrita en tres bloques y elegimos un criterio de clasificación "del experto". Calculamos los porcentajes de aciertos de cada pregunta, según el nivel de razonamiento asignado a la entrevista, utilizando estos porcentajes como centros iniciales ya que, de no introducir unos centros iniciales, el algoritmo no tiene capacidad para encontrar una clasificación coherente, debido a la diversidad de las respuestas. Consideramos otro criterio distinto de clasificación, pero también acorde con nuestros resultados experimentales previos y con la opinión del experto. El algoritmo arroja también una clasificación en tres centros, que coincide esencialmente con la obtenida con el criterio del experto, lo que deber a confirmar la estabilidad del análisis estadístico realizado. Resumiendo, el tratamiento estadístico empleado deber a confirmar (a) la existencia de tres esquemas bien diferenciados de respuestas, correspondientes a los niveles cuya existencia quer iamos demostrar (b) que los descriptores propuestos son los adecuados a la descripción de cada nivel y (c) que su detección ha sido también posible mediante el test de respuesta múltiple.

El algoritmo deber a ofrecer una clasificación de los tests realizados que concuerde con nuestra experiencia previa vía la entrevista. Observándolos por grupos, deberán poder apreciarse diferencias entre alumnos universitarios y alumnos no universitarios, además de poder afirmar que los niveles no se correspondan con niveles educativos, es decir, garantizar la existencia de alumnos universitarios con un nivel bajo de razonamiento, aunque encontrando previsiblemente entre estos más porcentaje de alumnos con un nivel de razonamiento más alto.

### 4.4 Propuesta Metodológica

Las conclusiones obtenidas deberán permitir la elaboración fiable de una propuesta metodológica, siendo la entrevista clínica la base de la elaboración de esta propuesta. Para su utilización en alumnos de secundaria, se elaborará un software interactivo que permita reproducir el fluir de la entrevista. Para su utilización en alumnos universitarios, su implementación ideal será el diseño de una clase por debate científico.