

LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: PROCESOS COGNITIVOS Y METACOGNITIVOS FAVORECIDOS POR LA INCLUSIÓN DE AMBIENTES DINÁMICOS

Camilo Sua Flórez; jcsuaf@pedagogica.edu.co ; Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)

Resumen: se presenta una propuesta de investigación cuyo objetivo es indagar por los procesos cognitivos y metacognitivos que tienen lugar en el marco de la resolución de problemas, cuando esta corresponde a la demostración de enunciados geométricos, que involucra ambientes virtuales que integran representaciones geométricas. Se presenta la pregunta de investigación que orientará en desarrollo de la investigación, algunos aportes desde la literatura que soportan la misma y una conceptualización frente a los elementos involucrados.

Abstract: we present a research proposal aimed to investigate the cognitive and metacognitive processes taking place in the context of problem solving, when this corresponds to the proof of geometric statements, involving virtual environments that integrate geometric representations. We present the research question to guide in the development of research, some contributions from literature and a conceptualization from the elements involved.

Introducción

El campo de la educación matemática [EM] ha sido testigo del vertiginoso crecimiento y la formulación de propuestas para la enseñanza y el aprendizaje en diferentes niveles de formación. El desarrollo de ambientes virtuales que representan y permiten interactuar con objetos matemáticos ha sido un aspecto que considerablemente ha favorecido su conceptualización. Su potencial radica en el distanciamiento de representaciones en ambientes de lápiz y papel [ALP], donde los objetos involucrados son dotados de propiedades no necesariamente ciertas y se favorece la mecanización de procedimientos; realizando ahora una apertura a un conjunto de representaciones dinámicas que por su naturaleza promueven procesos matemáticos -v.g. visualización, argumentación y conceptualización- (Sandoval & Moreno, 2012; Valencia, Sanabria, & Ibáñez, 2012). La investigación desarrollada en este campo donde se involucran ambientes tecnológicos, particularizando la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ha privilegiado el uso de ambientes de geometría dinámica [AGD] y con ello procesos como visualizar, conjeturar y argumentar. Sin embargo, autores como Guven, Baki y Cekmez (2012) manifiestan que aun cuando la investigación en esta línea se ha enfocado en analizar estos procesos, se han dejado de lado asuntos como las estrategias para la resolución de problemas [RP]. Diversas investigaciones (Jurdak, 2000; Kuzle, 2013; Santos-Trigo & Cristóbal-Escalante, 2008) han estudiado la relación entre los AGD y la RP, mostrando que las estrategias que tienen lugar en la RP se favorecen a partir del uso de estos recursos, convirtiéndolos en algo más que simples herramientas para la resolución; es decir, los AGD median, proporcionan y favorecen estrategias particulares (v.g. corroborar invariantes, manipular objetos, explorar situaciones) no presentes en ALP.

En la investigación relacionada con los procesos de la geometría que se favorecen al incluir AGD, aquellos que guardan relación con la demostración de enunciados condicionales han sido objeto de estudio (Beeson, 2013; Leikin & Grossman, 2013; Robotti,

2012; Yang, 2012). Autores como Matsuda y Vanlehn (2004) y Lárez (2014) señalan la estrecha relación que hay entre la RP y la demostración de enunciados geométricos. Sus ideas atienden a la concepción de problema, caracterizado como un enunciado donde se declaran condiciones iniciales y se enuncian otras a obtener a partir de la operacionalización de la información con la que se cuenta, concepción coherente con la forma en que se concibe la demostración de una proposición. Las ideas de estos autores permiten en situar la demostración como instancias de RP. Luego, considerando la investigación en esta última línea, tiene sentido enfocarse en la demostración en geometría, vista a través de la RP y el rol que los AGD juegan en su desarrollo.

En esta línea, la investigación se ha enfocado en el desarrollo de ambientes computacionales con AGD para favorecer el aprendizaje de la demostración (Matsuda & Vanlehn, 2004; Narboux, 2007; Wong, Yin, Yang, & Cheng, 2011). Los resultados reportados han planteado la necesidad de involucrar los AGD en su enseñanza con condiciones particulares: respetar la individualidad de los estudiantes y el progreso en sus procesos cognitivos, ofrecer múltiples representaciones de los objetos involucrados y con ello la comprensión de las relaciones entre ellos, retroalimentar las acciones de los estudiantes al abordar la demostración de un enunciado, entre otras. Estas consideraciones conducen a evaluar la forma en que los AGD intervienen en la clase de matemáticas. Narboux (2007) señala que los AGD que en la actualidad existen favorecen principalmente la construcción robusta de objetos geométricos y su manipulación con el fin de proveer conjeturas y verificarlas; sin embargo, considera que el software debe ayudar también al estudiante en la demostración, considerando para ello lo anteriormente planteado anteriormente.

La literatura exhibe aproximaciones para la enseñanza de la demostración que contemplan AGD, tal como la desarrollada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría -*Æ.G*- (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013), pero estas no permiten analizar las estrategias de RP que tienen lugar al momento de abordar la demostración de un enunciado geométrico. Para Garofalo y Lester (1985), la RP involucra operaciones complejas que necesitan ser manejadas y coordinadas. Ellos aseguran que esto involucra seleccionar estrategias y monitorear y evaluar los procesos cognitivos involucrados; según los autores, las explicaciones cognitivas se quedan cortas ante tal panorama, dando lugar a explicaciones de orden metacognitivo en la RP. La demostración de un enunciado geométrico no es ajena a estas operaciones dado que conlleva a formular en primer lugar una ruta que para determinar los aspectos centrales sobre los cuales versa la demostración (estrategias) y luego desarrollar cada uno con base en hechos geométricos, revisando su aproximación a las metas trazadas (monitoreo y evaluación).

El panorama presentado permite situar los procesos metacognitivos que tienen lugar en la RP que involucran la demostración de enunciados geométricos, cuando esta es asistida por AGD, como un asunto de interés que aporta al campo de investigación al cual se adscribe. Aun cuando los ambientes virtuales desarrollados son ya un aporte, limitaciones como las ya mencionadas abren un asunto de investigación centrado en analizar los procesos metacognitivos que tienen lugar en la resolución de este tipo de

problemas. Este asunto es importante en cuanto abordar la demostración involucra contar con una cantidad de recursos y representaciones dentro de un ambiente virtual, así como poder reconocer caminos afortunados que permitirán entrelazar distintos dominios de conocimiento, de forma tal que se pueda proyectar y evaluar una ruta tentativa que conducirá a la demostración. Sobre este asunto se pretende realizar una investigación en el marco del programa *Maestría en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación* de la Universidad Pedagógica Nacional [UPN] (Colombia). A través de la investigación se quiere indagar por los procesos cognitivos y metacognitivos que tienen lugar en la RP que involucra la demostración de enunciados geométricos cuando estos son asistidos por AGD así como cuando estos escenarios computacionales no integran tal dinamismo. Para ello se involucrarán estudiantes de primer año de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la UPN que cursan espacios académicos donde tiene lugar una aproximación metodológica para la enseñanza de la demostración (Perry et al., 2013).

Estado del arte y referentes conceptuales

Presentamos una revisión bibliográfica que permite situar el asunto de investigación y caracterizar los elementos involucrados. Se conceptualizan los AGD, sus características y potencialidades; luego se adopta una postura frente a la RP y aportes teóricos que sobre este asunto se han desarrollado; finalmente, se ofrece un panorama frente a la cognición y metacognición, así como propuestas de intervención que apoyan el aprendizaje de la demostración.

Sistemas de geometría dinámica

Los AGD (v.g. Cabri Géomètre, Geogebra, CaRmetal, Sketchpad) han revivido las construcciones geométricas (Mariotti, 2000). La posibilidad de construir objetos geométricos a partir de elementos primitivos como rectas, puntos y circunferencias (Hoyle & Jones, 1998; Valencia et al., 2012), junto a la posibilidad de manipularlos sin que las propiedades con las que fueron construidos se alteren (Abdelfatah, 2011; Özen & Köse, 2013), han hecho que estén fuertemente vinculados con el aprendizaje de la geometría (Guven et al., 2012; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). La naturaleza de los objetos y la posibilidad de manipularlos ofrece, según Goldenberg (1995; citado en Leung & Lopez-Real, 2002), el desarrollo de estilos de razonamiento no presentes en la geometría sintética, aspectos de orden didáctico más que axiomático (Hölzl, 1996; citado en Leung & Lopez-Real, 2002). Estas particularidades hacen que los AGD, a través de la interacción del usuario, verifiquen conjeturas y patrones invariantes de figuras, donde a través de la inducción, se puede avanzar desde casos particulares hasta casos generales (Guven et al., 2012).

Los AGD corporeizan la geometría euclidiana, particularmente las construcciones con regla y compás (Hoyle & Jones, 1998; Mariotti, 2000). Para Mariotti (2000) esta relación permite que tenga lugar una correspondencia entre las construcciones en este ambiente y los teoremas de la geometría euclidiana. Sin embargo, una distinción de estas construcciones con aquellas realizadas

en ALP es la posibilidad de manipular los objetos en la pantalla bajo la función de arrastre y recibir una retroalimentación a estas acciones (Abdelfatah, 2011; Hoyles & Jones, 1998; Vincent, 2002) a partir de una jerarquía de propiedades que atiende a una lógica condicional (Mariotti, 2000; Sandoval & Moreno, 2012). La variación de parámetros dentro del ambiente permite descubrir invariantes y la generalización de casos particulares, lo cual conlleva a generar evidencia empírica de algunos teoremas, aspecto difícil en ALP (Hoyles & Jones, 1998). La facilidad de medir ángulos y distancias entre puntos ha favorecido un enfoque empírico al momento de justificar, por encima de una necesidad de generar demostraciones, lo cual se justifica por el poder de convencimiento que se da al verificar alguna propiedad a través del arrastre, el cual es mayor al generado por una demostración (Mariotti, 2000; Vincent, 2002). Este panorama ha generado debate entre los profesionales de la educación dado que no promueve el aprendizaje y desarrollo de la demostración (Laborde, 2000). Sin embargo, Hoyles y Jones (1998) mencionan que a través de situaciones cuidadosamente diseñadas se puede favorecer la explicación a los resultados evidenciados en la pantalla.

Resolución de problemas

En las últimas décadas se han dado esfuerzos para establecer una definición de problema y lo que significa su resolución (Carlson & Bloom, 2005; Dettori, Greco, & Lemut, 1998), dada la diversidad de interpretaciones al respecto, entre las cuales algunas llegan a ser contradictorias (Duffield, 1991; Pochulu, 2010; Schoenfeld, 1992). Autores como Schoenfeld (1992) sitúan la RP como un asunto cuya definición va desde la RP rutinarios, hasta la construcción de matemáticas en un nivel profesional. Yimer y Ellerton (2006) señalan la presencia de la RP en la literatura y el crecimiento de esta tendencia desde los años ochenta, aun cuando es el área menos estudiada dentro del currículo en matemáticas y demanda una atención particular por su naturaleza.

Orígenes

Duffield (1991) concibe *problema* como una triada que involucra *condiciones dadas* (información y operaciones disponibles), *obstáculos* (condiciones que impiden ir de las *condiciones dadas* a las *metas* del problema) y *logros o metas* (estado que se debe lograr al utilizar las *condiciones dadas*). Schoenfeld (1992) menciona que un *problema* es *cualquier cosa que requiere ser hecha*, definición que involucra problemas rutinarios, para los cuales se ilustra un procedimiento, solicitando que se repita en otros problemas, lo cual conllevará a dominar una estrategia de solución y configurar un conjunto de habilidades que conformarán el conocimiento del estudiante. Ellos consideran que cuando una clase de problema ha sido resuelta, aquellos similares son rutinarios, se convierten en ejercicios y dejan de ser un problema dado que no hay aprendizaje que tome lugar al resolverlos.

En la EM los problemas han estado presentes a lo largo de la historia (Schoenfeld, 1992), pero este panorama no es similar para la RP, donde apenas en las últimas décadas se ha aportado a su conceptualización (Dettori et al., 1998). Carlson y Bloom (2005) aseguran que la comunidad de EM ha mostrado un interés por conocer la naturaleza de la RP, iniciando por Polya, quien en 1957

estudió el proceso involucrado allí, continuando por investigaciones recientes que estudian las características de quien resuelve problemas adecuadamente. Algunas investigaciones permiten situar aspectos que intervienen en la RP, como lo es Lester (1994; citado en Carlson & Bloom, 2005) quien menciona factores asociados (conocimiento, control, creencias y contexto social), Schoenfeld (1992) quien menciona factores como la planeación y el monitoreo, y otros como Krutetskii (1969; citado en Carlson & Bloom 2005) para quien los factores son características de individuos novatos y expertos que resuelven problemas.

¿Qué es la resolución de problemas?

Para Duffield (1991) la RP se entiende como un *proceso dirigido de aprendizaje cognitivo*. Este nombre se da por el uso de conocimiento o destrezas previamente adquiridas *–proceso–* que tienen como fin alcanzar un logro particular *–dirigido–* dejando nuevo conocimiento ligado a las operaciones desarrolladas *–aprendizaje–* y que tiene lugar en la mente del individuo *–cognitivo–*, motivo por el cual debe ser inferido por el comportamiento del mismo. Una definición alterna es la planteada por Dettori et al. (1998) al señalar que la RP es un procesamiento de información que involucra estrategias y depende del dominio donde estas tengan lugar, por lo cual no pueden ser llevadas a un rango amplio de dominios. Para el caso de la clase de matemáticas, la RP no corresponde solo a proponer una situación y preguntar por su resultado; es un enfoque de aprendizaje donde conceptos teóricos son introducidos durante la solución a un problema, donde se aplican y fortalecen conceptos previamente aprendidos.

Santos-Trigo (2007) retoma las ideas de Lester y Kehle (2003; citado en Santos-Trigo, 2007), para él la RP es una actividad en la que el estudiante se compromete en una variedad de acciones cognitivas, accediendo a conocimiento y experiencias previas. Esta definición es similar a la considerada por Bjuland (2007), para quien la RP es un proceso cognitivo, metacognitivo, afectivo y socio cultural que pretende solucionar un problema. Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2013) retoman ideas de otros autores, incluyendo la de Santos-Trigo (2007) para caracterizar la RP. Esta es para ellos una actividad que conceptualiza la disciplina a través de conjuntos de problemas que requieren ser explorados y resueltos en términos de recursos y estrategias, lo cual promueve acciones cognitivas que engranan diversos conceptos y procedimientos que permiten construir aprendizaje con comprensión.

Resolución de problemas: estrategias y habilidades

La RP ha sido objeto de estudio también en relación a las estrategias que convocan y las habilidades que deben tenerse para que el resultado obtenido sea afortunado (Erbas & Okur, 2012). Bjuland (2007) retoma algunas ideas de Schoenfeld y menciona que cuando un estudiante no cuenta con habilidades para la RP, la forma en que aborda la solución de una situación problema corresponde a realizar exploraciones no estructuradas y avanzar por un camino de solución sin revisar su progreso o reconsiderar el mismo; a diferencia de los expertos, quienes optan por comprender el problema inicialmente y proceder a resolverlo cuando tienen total seguridad sobre el camino elegido. Adicionalmente, los expertos se caracterizan por tener un comportamiento que

involucra un dominio alto de conocimiento y conexiones entre los elementos de este dominio; ellos monitorean y regulan su desempeño al resolver el problema, producen elegantes soluciones y se enfocan en las relaciones involucradas (Carlson & Bloom, 2005). Goos y Galbraith (1996; citados en Bjuland, 2007) señalan que los estudiantes al resolver problemas optan por realizar una lectura rápida del enunciado e implementar de inmediato una ruta para su solución sin ser conscientes de la fiabilidad de la misma. Retomando las ideas de Lester (1994; citado en Bjuland, 2007), en la RP exitosa un factor primordial es la seguridad metacognitiva, aun cuando reconoce que es difícil enseñar a los estudiantes cómo monitorear su proceso y comportamiento.

Respecto a las habilidades que intervienen en la RP, autores como Guven et al. (2012) y Carlson y Bloom (2005) retoman las ideas de Schoenfeld (1992) sobre cuatro factores que afectan las habilidades de los estudiantes en este proceso: *recursos*, *heurísticas*, *control* y *sistema de creencias*. Los *recursos* son el conjunto de conocimientos, procedimientos y competencias de un dominio específico; las *heurísticas* corresponden a las reglas, estrategias y técnicas del individuo al abordar problemas; el *control* corresponde al monitoreo empleado en el proceso de RP que desarrolla, el cual permite evaluar y modificar su proceder; y el *sistema de creencias* hace alusión a la visión o perspectiva del mundo de las matemáticas. Para Guven et al. (2012), considerando que los AGD afectan el proceso de la RP, así como amplían o limitan el conjunto de heurísticas de los estudiantes para resolver problemas, el significado de *recursos* debería ser ampliado para que además de lo mencionado arriba se incluyan también las habilidades con las herramientas tecnológicas. Autores como Özen y Köse (2013) ofrecen una amplia revisión respecto a la RP y los AGD, proponiendo como principales fases en el proceso de resolución en estos ambientes la construcción, exploración y validación (Mogetta, Olivero y Jones, 1999; citado en Özen y Köse, 2013).

Metacognición y cognición

Autores como Cai (1994) han estudiado y sustentado la influencia que tienen los comportamientos metacognitivos en la RP y su relevancia en el éxito de este proceso, por encima incluso del conocimiento o las estrategias involucradas. Mayer (1998) asegura que los estudiantes aprenden a resolver problemas rutinarios pero no pueden responder a situaciones novedosas, asunto que lo lleva a indagar sobre un mecanismo que promueva en los estudiantes habilidades en ambos campos. Para él, el desarrollo de problemas no rutinarios involucra que los estudiantes posean habilidades, meta-habilidades (metacognición) y motivación. Igualmente, Yimer y Ellerton (2006) adoptan la postura de Schoenfeld para asegurar que el análisis de la RP, enfocándose únicamente en la cognición, es incompleto; reconociendo la necesidad de involucrar la metacognición.

La metacognición como objeto de estudio ha tenido lugar hace varias décadas en investigaciones que pretenden conceptualizarlo. Una propuesta reconocida y adoptada por varios autores fue formulada por Flavell (Cai, 1994; Garofalo & Lester, 1985; Goos & Galbraith, 1996; Schoenfeld, 1992). La definición de este autor considera la metacognición como el conocimiento de una persona

acerca de su proceso cognitivo y productos o cualquier asunto relacionado al mismo; igualmente, esta corresponde a la actividad de monitorear, regular y orquestar distintos procesos en relación a objetos cognitivos sobre los cuales estas actividades yacen, usualmente cuando hay un logro o meta que los involucra. Garofalo y Lester (1985) retoman estas ideas, para ellos la cognición y la metacognición deben distinguirse, entendiendo la primera como el hacer mientras que la segunda corresponde a escoger y planear qué hacer a la vez que se monitorea lo que se está haciendo.

Cai (1994) considera de que el desempeño cognitivo en la RP depende no solamente del conocimiento y los esquemas asociados sino de saber cómo y cuándo usarlos, motivo por el cual la RP debe ser explicada con base en factores cognitivos, metacognitivos y afectivos. Este autor adopta también la definición de metacognición propuesta por Flavell. Él señala que el modelo de análisis cognitivo-metacognitivo propuesto por Garofalo y Lester (1985) involucra las categorías cognitivas presentes en la RP propuestos por Polya –llamados procesos cognitivos- y las variables metacognitivas propuestas por Flavell y Wellman. Aunque estos dos componentes juegan distintos roles, interactúan en el proceso de la RP. Con el fin de provocar la actividad metacognitiva, el autor menciona que Borkowski (1985; citado en Cai, 1994) determinó que esta tiene lugar en problemas complejos, nuevos y retadores que involucren la toma de decisiones para establecer caminos de acción.

Propuestas de intervención

En esta línea de investigación se reportan asistentes o tutores de demostración, los cuales apoyan la demostración de enunciados condicionales geométricos. Encontramos inicialmente la propuesta (*GPTutor*) de Wertheimer (1990). Este software atiende a la necesidad de apoyar la diferencia de los estudiantes. Considera el autor que muchos estudiantes, generalmente aquellos con menos habilidades, no son atendidos y no se sabe si su proceso de aprendizaje es bueno respecto a otros estudiantes. Dada la complejidad en la enseñanza y aprendizaje de la demostración, se desarrolla un software que promueva en cada estudiante habilidades y aprendizajes respecto a este asunto, sin que sea sustituto del profesor, más bien, que le permita trabajar con aquellos estudiantes que requieren una atención especial. El software involucra un ambiente gráfico donde se representan objetos y relaciones inmersas en un enunciado condicional, un listado de hechos geométricos disponibles para el usuario y la posibilidad de conformar un mapa conceptual que ilustre el cuerpo de la demostración, entre otras posibilidades.

Matsuda y Vanlehn (2004) presentan una propuesta (GRAMY) para asistir la demostración dada la dificultad que los procedimientos ligados a este tipo de problemas llegan a tener para las personas que intentan resolverlos. Los autores consideran que la demostración como un problema, en el cual se dan algunas premisas y se solicita obtener una proposición a partir de procedimientos desconocidos por el usuario. Los autores manifiestan el amplio espacio de posibilidades que se pueden generar y la dificultad que esto puede provocar en una persona que enfrente este tipo de problemas. En tal sentido, el software está diseñado

de forma tal que cuando una construcción se realiza, se evalúa su pertinencia y retroalimenta al usuario. Esta retroalimentación atiende a la generación de todas las posibles rutas de demostración que pueden tener lugar para determinado enunciado. Estas rutas se elaboran sobre un diagrama que considera los objetos y relaciones geométricas con las que se cuenta en determinado momento y la proyección de aquellos objetos que podrían ser útiles para involucrar un enunciado condicional adicional, con el que ya se cuenta, que permita establecer la demostración. Esta estrategia se considera importante en cuanto no priva al usuario al momento de ofrecer alguna estrategia, por el contrario orienta y promueve su desarrollo.

Narboux (2007) presenta GeoProof, el cual integra una interfaz gráfica a través de geometría dinámica, un verificador de teoremas y un sistema interactivo de demostración que verifica las demostraciones construidas por el usuario. El autor señala que los AGD que existen favorecen principalmente la construcción robusta y exploración de objetos geométricos con el fin de proveer conjeturas y verificarlas. El software debe ayudar también al estudiante en la demostración en sí misma y al respecto menciona un conjunto amplio de programas que atienden a esta necesidad. Sin embargo, estos programas distan de GeoProof en cuanto no incorporan la demostración de teoremas automatizada e interactiva simultáneamente. El autor reconoce que la representación diagramática de la demostración puede llegar a tener un alto nivel descriptivo de la misma; igualmente, que algunos hechos difícilmente pueden ser visualizados gráficamente, pero sí simbólicamente, así como otros no se favorecen sin el recurso visual, de ahí que se incorporen ambos ambientes en el software. El autor concluye que esta propuesta debe involucrarse de la misma forma que lo hacen los AGD, en cuanto permiten atender la demostración de enunciados geométricos condicionales.

Discusión

Los campos de investigación presentados ofrecen un panorama acerca del interés respecto a los asuntos que se movilizan en esta propuesta de investigación. Respecto a la RP se involucran los procesos cognitivos y metacognitivos que tienen lugar en este proceso y consideraciones generales frente a los AGD así como su potencialidad. Sobre los asistentes de demostración se involucran características en el diseño de estos ambientes, así como la estrecha relación entre la RP y la demostración de enunciados geométricos. La revisión bibliográfica presentada sitúa a los AGD como un recurso con grandes potencialidades para trabajar la RP, destacando la forma en que estos ambientes promueven tanto procesos cognitivos como metacognitivos. La revisión también permite situar los asistentes de demostración como un recurso relevante para su aprendizaje. Las propuestas mencionadas permiten caracterizar los asistentes a partir de: una interfaz gráfica que involucre AGD; la representación de la demostración tanto a dos columnas, como a través del diagrama de árbol, lo cual permitirá comprender la estructura de la demostración cuando esta no se corresponde con una estructura lineal; la retroalimentación en tiempo real que debe ser ofrecida al usuario; finalmente, el conjunto de posibles demostraciones que deben ser consideradas por el asistente para determinado enunciado, aspecto que permitirá responder a la ruta de demostración propuesta por el usuario y retroalimentar sus ideas.

Bibliografía

- Abdelfatah, H. (2011). A story-based dynamic geometry approach to improve attitudes toward geometry and geometric proof. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 441–450. <http://doi.org/10.1007/s11858-011-0341-6>
- Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2013). Cognitive processes developed by students when solving mathematical problems within technological environments Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 109–136.
- Beeson, M. (2013). Proof and Computation in Geometry. In T. Ida & J. Fleuriot (Eds.), *Automated Deduction in Geometry* (pp. 1–30). Retrieved from http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-40672-0_1
- Bjurland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(1), 1–30.
- Cai, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, 6(2), 166–183. <http://doi.org/10.1007/BF03217270>
- Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75. <http://doi.org/10.1007/s10649-005-0808-x>
- Dettoni, G., Greco, S., & Lemut, E. (1998). Information Technology and problem solving in mathematics education. In G. Marshall & M. Ruohonen (Eds.), *Capacity Building for IT in Education in Developing Countries* (pp. 299–307). London: Chapman & Hall. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35195-7_32
- Duffield, J. a. (1991). Designing computer software for problem-solving instruction. *Educational Technology Research and Development*, 39(1), 50–62. <http://doi.org/10.1007/BF02298106>
- Erbas, A. K., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality and Quantity*, 46(1), 89–102. <http://doi.org/10.1007/s11135-010-9329-5>
- Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*. <http://doi.org/10.2307/748391>
- Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 30(3), 229–260. <http://doi.org/10.1007/BF00304567>
- Güven, B., Baki, A., & Çekmez, E. (2012). Using dynamic geometry software to develop problem solving skills. *Mathematics & Computer Education*, 46(1), 6–17.
- Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121–128). Dordrecht: Kluwer. Retrieved from <http://eprints.soton.ac.uk/41227/>
- Jurdak, M. (2000). Technology and problem solving in mathematics: Myths and Realities. In *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education* (pp. 30–37). Beirut: Lebanese American University.
- Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 8(1), 20–40.
- Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151–161.
- Lárez, J. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Paradigma*, 35(2), 183–199.
- Leikin, R., & Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 515–531.
- Mariotti, M. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 25–53.

- Matsuda, N., & Vanlehn, K. (2004). GRAMY: A geometry theorem prover capable of construction. *Journal of Automated Reasoning*, 32(1), 3–33. <http://doi.org/10.1023/B:JARS.0000021960.39761.b7>
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26(1-2), 49–63. <http://doi.org/10.1023/A:1003088013286>
- Narboux, J. (2007). A graphical user interface for formal proofs in geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 39(2), 161–180. <http://doi.org/10.1007/s10817-007-9071-4>
- Özen, D., & Köse, N. Y. (2013). Investigating Pre-service Mathematics Teachers' Geometric Problem Solving Process in Dynamic Geometry Environment. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, 4(3), 61–74.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. In *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11–34). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 5–26. <http://doi.org/10.1007/s10649-008-9139-z>
- Pochulu, M. (2010). Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(3), 307–336.
- Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: The case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 433–450. <http://doi.org/10.1007/s10649-012-9383-0>
- Sandoval, I. T., & Moreno, L. E. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, 14(1), 21–29.
- Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 523–536. <http://doi.org/10.1007/s11858-007-0057-9>
- Santos-Trigo, M., & Cristóbal-Escalante, C. (2008). Emerging High School Students' Problem Solving Trajectories Based on the Use of Dynamic Software. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 27(3), 325–340.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.
- Valencia, N., Sanabria, L., & Ibáñez, J. (2012). Procesos cognitivos y metacognitivos en la solución de problemas de movimiento de figuras en el plano a través de ambientes computacionales. *Tecné, Episteme Y Didaxis*, 31(1), 45–65.
- Vincent, J. (2002). Dynamic Geometry Software and Mechanical Linkages. In D. Watson & J. Andersen (Eds.), *Networking the Learner SE - 42* (pp. 423–432). Springer US. http://doi.org/10.1007/978-0-387-35596-2_42
- Wertheimer, R. (1990). The Geometry Proof Tutor: An “Intelligent” Computer-Based Tutor in the Classroom. *Mathematics Teacher*, 84(4), 308–317.
- Wong, W. K., Yin, S. K., Yang, H. H., & Cheng, Y. H. (2011). Using computer-assisted multiple representations in learning geometry proofs. *Educational Technology and Society*, 14(3), 43–54.
- Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307–326. <http://doi.org/10.1007/s10649-011-9350-1>
- Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. *Identities, Cultures, and Learning Spaces*, (1994), 575–582.