

# Propuesta de enseñanza para grado once, introducción al concepto de derivada

---

RAMIRO ADOLFO JIMÉNEZ LEAL  
ramir3399@hotmail.com.docente  
Colegio Cooperativo Venecia (Docente)

ANGEL DANILO MORENO PRIETO  
oteirp90@hotmail.com

NELSON ENRIQUE RODRÍGUEZ PAVA  
nelsonrp20092@hotmail.es  
Colegio Claretiano El Libertador (Docente)

LORENA NIÑO GARCÍA  
lenita\_963@hotmail.com

**Resumen.** El presente documento describe una propuesta de intervención en el aula, mediante la cual se potencia la comprensión del concepto de derivada, interpretándola como covariación. En principio se dará a conocer una problemática presente dentro de las instituciones educativas, con respecto a la enseñanza del concepto de derivada, la cual evidencia que en muchas ocasiones los estudiantes se quedan únicamente en el algoritmo y no relacionan sus resultados a una representación gráfica.

**Palabras clave:** Derivada, covariación, algoritmos, enseñanza de la derivada, representación gráfica.

## 1. Contextualización

En el planteamiento del diseño de la propuesta, se observó una problemática con respecto a las dificultades conceptuales en los estudiantes frente a la noción de derivada, en esta se ha evidenciado que los estudiantes hacen uso debido de los algoritmos de la derivada, pero no hacen lectura o no interpretan la derivada en sus otras formas de representación y trabajo Azcarate C. (1981), como lo es la razón de cambio, variación, covariación entre otras.

Esta problemática entro a interés del grupo de trabajo en el año 2013, cuando se hacía parte de la universidad Distrital Francisco José de Caldas (del proyecto curricular LEBEM) como miembros estudiantiles, específicamente surgió en el espacio de formación tecnología en el aula, en el cual se pretendía abordar problemáticas en la enseñanza de las matemáticas,

desde las diferentes teorías metodológicas y didácticas. Para el año 2014 se retomó dicha investigación ya desde el campo de acción docente, aplicándose así el instrumento propuesto en la misma.

Esta propuesta se aplicó en el colegio Cooperativo Venecia a estudiantes entre los 15 y 18 años del grado once, (jornada única). La propuesta de enseñanza va encaminada en la introducción a la enseñanza de la derivada mediante la aplicación de una situación problema “problema de la viga<sup>1</sup> con el fin de ahondar la problemática que expone Artigue citado por Matamoros<sup>2</sup> (2005), el cual afirma que, aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, existen grandes dificultades para hacer que desarrollen una comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro del cálculo, es decir, en el proceso de aprendizaje de la derivada, a los estudiantes se les presentan infinidad de incomprensiones.

Por otro lado para el diseño de la propuesta se tendrá en cuenta lo dicho por Confrey y Smith (1994, 1995), quienes explican la noción de covariación como aquella que vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable. Consideran también que, en la aproximación covariacional, una función es comprendida como la yuxtaposición de dos secuencias, cada una de las cuales es generada independientemente a través de modelar datos. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, en este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza (4 sesiones de clase) que permita potenciar en los estudiantes su noción del concepto de derivada (mediante el uso de la concepción de covariación).

## 2. Referentes teóricos prácticos

Para exponer la primera parte de las temáticas que se desean abordar, será necesario justificar primero lo que implica el proceso de enseñanza aprendizaje de la derivada en la escuela. Por ello se ha basado en lo expuesto por Orton (1980), quien mediante la realización de una investigación con respecto a los errores de los estudiantes frente al concepto de la derivada establece unas categorías las cuales son:

***Errores estructurales:*** Relacionados con los conceptos esenciales implicados

---

<sup>1</sup> Ver en la descripción de la propuesta

<sup>2</sup> Matamoros y otros (2005) El desarrollo del esquema de derivada (1ª Ed.). Granada, España: Artículo enseñanza de las ciencias

**Errores arbitrarios:** El alumno se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.

**Errores ejecutivos:** Errores en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos

Los resultados encontrados en la investigación nos dejan ver que los alumnos mostraron dificultad significativa en la conceptualización de los conceptos de límite que sustentan el concepto de derivada. Otro resultado interesante es la dificultad de los estudiantes es utilizar apropiadamente las representaciones gráficas. Estudiantes capaces de calcular correctamente la función derivada de una función polinómica y de hallar la pendiente de la tangente en un punto dado de la misma se mostraban incapaces de evaluar las mismas tasas de variación a partir de gráficas de complejidad semejante.

Estos análisis permiten ver también lo que expone Sánchez-Matamoros et al. (2008) los resultados de algunas investigaciones en las que se ha analizado el papel de las representaciones en la construcción de una comprensión de la idea de derivada, indican que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y que tales significados no están conectados.

Por otro, debido a que el propósito de esta propuesta es abordar la derivada desde la concepción de covariación, tenemos en cuenta la definición expuesta por Carlson et al. (2003). En dicho marco, los autores interpretan al razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124).

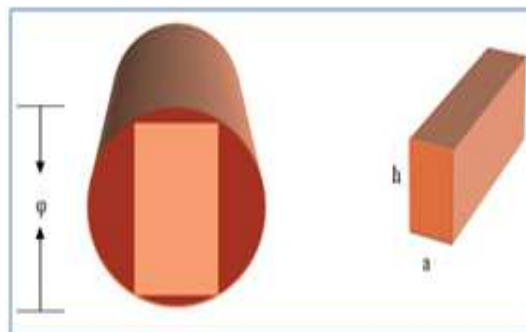
Otro eje central de la propuesta de enseñanza es la metodología de resolución de problemas. Se pretende que los estudiantes puedan relacionar las situaciones problema que se les plantea con el mundo real, es decir que hagan pragmático el conocimiento adquirido, y puedan hacer una interiorización de los conocimientos para que el aprendizaje sea significativo. Para Puig (1996), el proceso de resolución se define como la actividad mental que desarrolla el resolutor desde cuando asume el problema, tiene interés de resolverlo y hasta que da por terminada la tarea.

Cabe aclarar que se escoge esta definición de resolución de problemas ya que se asemeja al trabajo que se pretende abordar, ya que Bohórquez y Sanjuán (2010) referenciando a Tortosa (1999), queda mucho por sistematizar a tal punto que aún no existe una caracterización universalmente aceptada del término de resolución de problemas.

### 3. Descripción general de la experiencia de aula

Esta actividad se desarrolló durante cuatro sesiones de dos horas cada una, en las cuales se buscó que los estudiantes materializaran mediante el uso de la covariación el concepto de derivada, a partir de la implementación de la situación problema de la viga:

*La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho  $a$  por el cuadrado de su altura  $h$ . Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica, con diámetro  $\phi$  dado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por Medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?*



En la primera sesión distribuyeron los estudiantes por grupos de trabajo de cuatro integrantes, paso seguido se les presento la situación problema que desarrollaron teniendo en cuenta los conceptos previos que poseen. Durante la sesión cada grupo exploró y se apropió de la situación, tratando de darle solución, durante este proceso el docente realizo el acompañamiento e intervino en cada grupo con el fin de contextualizar a los estudiantes, tratando de guiarlos a algún posible camino de solución del problema.

En la segunda sesión se observó que relaciones ha planteado cada grupo con respecto a las magnitudes de base y altura; y de este modo ver si implementan el teorema de Pitágoras (como dos grupos de ocho si se les facilito aplicar) como ayuda para encontrar la altura, una vez que los estudiantes lograron establecer dicha relación tuvieron las dos magnitudes que son necesarias para establecer la resistencia de la viga en la solución del problema. Esta sesión estuvo dada con respecto en lo que se conoce dentro de la teoría de resolución de problemas “comunicarse matemáticamente”

En la tercera y cuarta sesión se estructuraron tres tipos de solución distinta, los grupos encontraron cosas comunes como que puesto que el tronco a acerrar tiene como base una circunferencia, se debían hacer precisiones sobre características de la misma, por ejemplo que si se inscribe un rectángulo en una circunferencia la diagonal siempre pasara por el centro, esto les permitió establecer una función en torno a la diagonal fija de cualquier

rectángulo (ya que el diámetro del tronco es dado), como se forman dos triángulos rectángulos lo estudiantes empiezan a trabajar sobre uno de ellos para determinar la altura del rectángulo mediante la función:  $h = \sqrt{d^2 - a^2}$  donde  $d$  representa la diagonal fija y “ $a$ ” los valores que toma la base (menores que la diagonal.) esto les permite tener elementos para reemplazar en la función de la resistencia variando la base “ $a$ ” y encontrando un intervalo en donde haciendo pequeñas variaciones se va acercando a la resistencia máxima.

Otro camino giro en torno a una misma situación en donde el grupo reemplaza  $h$  en la función de la resistencia obteniendo una sola función dada por:  $p(a) = a^3 + 36a$  con una sola función y con ayuda de un programa para graficar, observan el comportamiento de la función y encuentran cercanamente la resistencia máxima de la función.

#### 4. Logros y dificultades

- Se logró frente a la situación problema que el estudiante se apropió de la problemática presentada.
- Los estudiantes lograron identificar las relaciones de cambio entre las magnitudes que se encuentran implícitas en el problema (base y altura.).
- Se le dificultó al estudiante establecer la relación de la base de la viga con la resistencia de la misma, para establecer así, cuál debe ser la medida de la base para que la resistencia de la viga fuese la máxima.

#### 5. Reflexión final

La implementación de la situación problema, al presentar al estudiante, en el momento en que se retoman los caminos propuestos por los grupos y se muestra al estudiante como sus hipótesis se verifican cuando se aplica lo que se conoce como derivada a partir del algoritmo la cual permite establecer puntos máximos y mínimos de una función.

Fue pertinente los momentos establecidos para la aplicación de la situación problema (resolución de problemas) ya que permitió alcanzar un objetivo muy importante: que los estudiantes comprendan el concepto matemática (derivadas) desde sus diferentes representaciones, que fuesen participantes activos dentro del aula de clase, de modo que

generaran inquietudes y aciertos al realizar exposiciones y participar en los grupos de trabajo.

## Referencias bibliográficas

- AZCARATE C. (1981). *Calculo diferencial e integral*, Universidad autónoma de Barcelona, Madrid. Editorial Síntesis.
- BOHÓRQUEZ, A Y SANJUÁN. (2008). *Consideraciones sobre la resolución de problemas en la actualidad (pp.174)*. Colombia: Conferencia en el 9° encuentro colombiano de matemáticas educativa: ASOCOLME
- Carlson, M. Larsen, S. & Jacobs, S. (2001). *An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation*. En: R. Speiser, C. Maher & Ch. Walter: *Proceeding of the Twenty-third Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XXIII. October 18-21, 2001. Snowbird, Utah. USA: Eric.
- CAMARGO, L., GUZMAN, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón*. Bogotá. Ed. Magisterio.
- FERRARI M. (2004) *La covariación como elemento de re-significación de la función logaritmo*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
- SÁNCHEZ-MATAMOROS G., GARCÍA B, MERCEDES Y LLINARES C., SALVADOR L. (2005). *El desarrollo del esquema de derivada (1ª Ed.)*. Granada, España: Artículo enseñanza de las ciencias.