

## LA VARIACIÓN EN ALGUNOS TEXTOS UNIVERSITARIOS. EL CASO DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

**Ferney Tavera Acevedo, Jhony Alexander Villa-Ochoa**

Universidad de Antioquia. (Colombia)

ftavera827@yahoo.es, jhony.villa@udea.edu.co

**Palabras claves:** variación, textos universitarios, relaciones trigonométricas

**Key words:** variation, textbooks, trigonometric rates

### RESUMEN

En este artículo presentamos los resultados de un análisis de contenido realizado a algunos libros de texto de matemáticas que se utilizan en algunos programas de ingeniería en el primer año de universidad. En particular, nos centramos en las diferentes tareas que se proponen para abordar la temática de las relaciones trigonométricas. Los resultados muestran que en los libros de texto analizados se exhibe mayor cantidad de tareas “estáticas”, en relación con aquellas en las cuales la noción de variable y de variación tenga alguna presencia, por lo tanto, consideramos que los libros analizados “descuidan” de cierta manera, los aspectos variacionales propios del contexto en el que se plantean dichas tareas. De este análisis surgió la necesidad de buscar otro tipo de recurso que permita observar fenómenos de cambio y variación en el momento de darle solución a una tarea propuesta sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

### ABSTRACT

In this paper we present some results of a content analysis of some math textbooks used in some engineering programs in the first year of college. In particular, we focus on the different tasks to study trigonometric rates. The results show that in the textbooks analyzed there are more "static" tasks than dynamic tasks; therefore, we consider that the books analyzed "neglect" certain way, proper variational notions of the context in which these tasks are posed. This study show that other resources to observe phenomena of change and variation are needed

### ■ Presentación del problema

Esta investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación Matemática en la Universidad de Medellín y tuvo su génesis en una revisión de la literatura a la luz del pensamiento variacional asociado al estudio de las relaciones trigonométricas. En el contexto colombiano el pensamiento variacional es uno de los componentes fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático y se fundamenta en el estudio de la variación. Para el Ministerio de Educación Nacional (2006) el pensamiento variacional tiene que ver con “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (p.66). Desde esta perspectiva, Tavera y Villa-Ochoa (2013) han puntualizado que para promover el desarrollo de este tipo de pensamiento es necesario proponer actividades para que los estudiantes exploren, analicen, construyan, infieran, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a las relaciones dinámicas que se originan entre los conceptos matemáticos.

En el estudio de la variación al interior del aula de clase se conjugan, prácticas, situaciones, tareas, medios y ambientes en los que aspectos dinámicos de las matemáticas toman relevancia; en este tipo de ambientes se rescata el papel que cumplen los libros de texto como recursos que cumplen un rol fundamental en la manera como se organizan y desarrollan las prácticas al interior del aula de clase. De este modo, esta investigación centró la atención en los libros de texto ya que algunos estudios (e.g Selva y Borba, 2013) han develado las implicaciones que tiene este tipo de recursos en las prácticas educativas generadas por el docente en el aula de clase; en particular, Selva y Borba (2013) han puesto de relieve que en muchos casos los libros de texto se consideran como el principal referente de trabajo en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores en relación con lo que debe ser enseñado y cómo debe hacerse.

La pregunta que norteó el estudio que se reporta en este documento fue ¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian en el estudio de las relaciones trigonométricas, según las tareas propuestas por algunos libros de texto de matemáticas? El interés por el estudio de las relaciones trigonométricas surgió a raíz de que la variación se manifiesta en los cambios los ángulos y los lados de un triángulo, y la interpretación en los respectivos contextos en los que tiene su aplicación. Conforme Fiallo (2010) ha señalado, la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría plana es asumida en el aula de clase como un proceso memorístico, rutinario y mecánico, debido al uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades. Este tipo de orientaciones en el aula escolar puede traer como consecuencia un descuido en el reconocimiento de las nociones variacionales que se presentan al abordar esta temáticas (Tavera y Villa-Ochoa, 2013).

### ■ Referente conceptual

El estudio de la variación ha ocupado las agendas de diversos investigadores en los últimos años (e.g. Cantoral y Farfán, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Vasco, 2006; Leung, 2008; Tall, 2009; Villa-Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012). Cada uno de ellos ha reportado, desde diferentes perspectivas, la necesidad de involucrar experiencias en el aula de clase que le permitan al estudiante analizar situaciones en las cuales la noción de variación y de variable tenga un papel primordial. Así por

ejemplo, Tall (2009) considera que el corazón del análisis matemático está en la variación y sugiere que para abordar las temáticas de este tema es indispensable hacer énfasis en los procesos dinámicos que subyacen en cada uno de los conceptos allí tratados.

Por otra parte, Vasco (2006) estima que los elementos implicados para el desarrollo de un pensamiento variacional no son suficientemente claros, motivo por el cual lo describe en los siguientes términos:

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con esta mirada, consideramos que el uso de la tecnología computacional a través de software de Geometría Dinámica (e.g. Geogebra) se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el dinamismo implícito de los conceptos matemáticos (Tavera y Villa-Ochoa, 2012). Según Leung (2008) se entiende por dinamismo implícito aquellos razonamientos matemáticos que emplean un estudiante para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Teniendo estas ideas en mente, consideramos que observar los aspectos dinámicos de los objetos matemáticos sugiere centrar la atención en los recursos en donde ellos puedan manifestarse. Para el caso de la presente investigación, son las tareas (llámense actividades, ejercicios, situaciones, problemas) presentadas en los libros de texto, uno de los medios en donde la variación y sus diferentes aplicaciones tiene y puede verse reflejada.

## ■ Metodología

Este trabajo se encuentra enmarcado en un enfoque cualitativo de investigación y el método que utilizó para ello fue el análisis de contenido, dado que es una “técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto” (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, se observó que esta técnica genera razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese una comunicación (e. g. verbal, gráfico, simbólico), por tal razón, consideramos que sea posible analizar la manera en que algunos libros de texto de matemáticas presentan las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

Para obtener un acercamiento a la pregunta de esta investigación, los libros de texto analizados debían atender a los siguientes criterios: (i) que sean textos recomendados por los departamentos de Ciencias de las cinco universidades acreditadas de la ciudad de Medellín, (ii) que sean utilizados por los estudiantes en la facultad de ingeniería, los primeros años de universidad y finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna manera, los tópicos propios de la trigonometría plana, de tal forma que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.

En la tabla 1 se presenta la lista de libros de texto que fueron seleccionados para analizar las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

**Tabla 1. Libros de texto que fueron seleccionados para realizar este estudio.**

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Buriticá, B	2012	Álgebra y Trigonometría	Tercera	U de A (Programa U de @)
Stewart, J; Redlin, L; Watson, S	2012	Precálculo Matemáticas para el cálculo	Sexta	Cengage Learning
Swokowski, E. W; Cole, J. A	2009	Álgebra y trigonometría con geometría analítica	Décimo segunda	Cengage Learning
Sullivan, M	2007	<b>Álgebra y Trigonometría</b>	Séptima	Pearson
Mejía, F; Álvarez, R; Fernández, H	2005	Matemáticas previas al cálculo	Primera	Sello Editorial Universidad de Medellín

Para hacer el respectivo análisis, se resolvieron todas las tareas propuestas por los textos en las respectivas secciones o capítulos dedicados al estudio de las relaciones trigonométricas para triángulos rectángulos y no rectángulos. Se prestó especial atención a la presencia de cada cantidad y su interpretación como variable o constante (conocida o desconocida) en el respectivo contexto evocado en la tarea, los hallazgos se registraron en tablas. Luego, se elaboró una categorización del conjunto de tareas atendiendo a si obedecen a un contexto al interior de las matemáticas o si hacen alusión a otros contextos (e.g. de otras ciencias, la cotidianidad de los estudiantes - Font, 2007); posteriormente, se buscó identificar en tales contextos algunos aspectos asociados a la variación (e.g. uso de variables, covariación entre cantidades) y a la(s) estrategia(s) que se pueden utilizar para encontrar la solución de dichas tareas.

Es importante aclarar que las unidades sintácticas que intervienen en este estudio permitieron identificar el contexto al cual dichas tareas hacen referencia y posibilitaron la forma de establecer la frecuencia de las categorías encontradas. Por otra parte, el proceso que se empleó para determinar la solución de tales tareas, también permitió hacer una nueva clasificación, puesto que para ser resueltas requieren de una interpretación estática o dinámica de los elementos involucrados en dichas tareas; de igual modo, a estas subcategorías identificadas se le encontró su respectiva frecuencia.

### ■ Algunos hallazgos

Al analizar todas las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas fue posible encontrar ciertas regularidades que permitieron colegir que la mayoría de las tareas propuestas por los libros de texto seleccionados están diseñadas para que los estudiantes calculen el valor numérico de una distancia, de una altura o de un ángulo en un triángulo, que puede ser rectángulo u oblicuángulo, puesto que los otros datos están expresados literalmente en dichas tareas. Por lo tanto, catalogamos que esta tipología de tareas pertenece a una interpretación “estática”, porque su solución favorece notoriamente la ejercitación procedimental y algorítmica de los conceptos que hacen alusión al estudio de las relaciones trigonométricas.

En este estudio, también logramos identificar tareas “aparentemente variacionales”, porque presentan de manera explícita o implícita los objetos que generan algún tipo de cambio y las cantidades allí expuestas, las podemos observar como “variables”, pero al resolver tales tareas encontramos que los movimientos producidos por dichos objetos actúan como juegos del lenguaje, que buscan maquillar la solución “estática” de dichas tareas, y por lo tanto, se limitan o se reducen a la forma de hallar un valor numérico en particular. Esta subcategoría de análisis, recibe el nombre de tareas “seudo-dinámicas”.

En los libros de texto seleccionados para este estudio, encontramos pocas tareas que hagan referencia a fenómenos de cambio y variación, donde la noción de variable sea percibida de manera explícita, para que los estudiantes interpreten y analicen visualmente la variación de algunos elementos que allí intervienen, mientras otros se mantienen constantes. Por lo tanto, catalogamos que esta tipología de tareas pertenece a una interpretación “dinámica”, porque a través de su solución los estudiantes puedan explorar, reflexionar, erigir conjeturas y deducir los conceptos y las estructuras invariantes (e.g. patrones de variación) que no estaban previamente establecidas al abordar esta temática.

En la tabla 2 se presenta la frecuencia de las tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo a si son tareas que requieren para su solución una interpretación estática o dinámica.

**Tabla 2. Frecuencia de tareas que usan los libros de textos seleccionados, de acuerdo a la manera como son solucionadas.**

Nombre de los libros de texto	Tareas estáticas		Tareas dinámicas	
	Aplicación directa	Composición de razones	Seudo-dinámicas	Comparación de estados
Álgebra y Trigonometría	21	24	0	0
Precálculo	63	108	2	4
Matemáticas para el cálculo	33	105	2	0
Álgebra y trigonometría con geometría análítica	24	90	4	1
Matemáticas previas al cálculo	12	60	1	1

### ■ Conclusiones

Conforme se mencionó anteriormente, las tareas propuestas para el estudio de las relaciones trigonométricas en los libros de texto analizados privilegian las tareas estáticas, es decir, tareas que para ser resueltas requieren solo del uso constante de expresiones algebraicas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo. El marcado énfasis hacia este tipo de tareas se convierte en evidencia de la omisión, en cierta manera, del reconocimiento y la matematización de la variación. Esta situación hace que se “desaproveche” la oportunidad para abordar de manera dinámica las relaciones funcionales que se originan entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Para que los libros de texto de matemáticas propongan tareas que hagan referencia a contextos en los cuales la variación esté presente, es necesario que este tipo de recurso plantee situaciones que puedan ser abordadas a partir del uso de software de geometría dinámica (e.g. Geogebra), porque esta

herramienta tecnológica brinda la posibilidad de incorporar el movimiento en forma de variable para que los estudiante visualicen con detenimiento los fenómenos de cambio y variación allí expuestos, los cuales se observan a través de los patrones de variación que antes solo se manejan en abstracto.

La integración de tecnologías computacional en el aula de clase pone de relieve el estudio variacional de los conceptos matemáticos (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010) y en coherencia con ello, los libros de texto donde esté incluido el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, deberían buscar otros formatos para su publicación, de tal manera, que posibiliten un mayor “dinamismo” entre los estudiantes y los conceptos que allí se aborden.

### ■ Referencias bibliográficas

- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 – 390.
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, 14(3), 353 - 369.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352 - 378.
- Fiallo, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valencia. Valencia - España.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 442.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Piados.
- Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 135 - 157.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.
- Pino, J., & Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63 - 88.
- Selva, A., & Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad*. Medellín - Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education*, 41(4), 481 - 492.
- Tavera, F. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Córdoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín - Colombia: Instituto Tecnológico Metropolitano.

- Tavera, F. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas. En A. Ramírez, & Y. Morales, *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe* (págs. 666 - 676). Santo Domingo - República Dominicana: REDUMATE - PUCMM.
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. E. Vasco Uribe (Ed). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá - Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9 - 25.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista Virtual "Universidad Católica del Norte"*, 27, 1 - 21.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de nociones variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 514 - 528.