

CAPÍTULO 4

FUNCIÓN CONSTANTE, LINEAL Y AFÍN

CLAUDIA BARAJAS, BLANCA FULANO, WILLIAM RÍOS,
LUIS SALAZAR Y ANDRÉS PINZÓN

1. Introducción

En este capítulo, presentamos el informe final del diseño de la unidad didáctica del tema función constante, lineal y afín: su proceso de implementación, su evaluación y la propuesta de mejora a partir del análisis de los resultados obtenidos.

Para la realización del informe, utilizamos el análisis didáctico realizado durante la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La primera etapa de este análisis corresponde al análisis de contenido, en la que delimitamos el tema de las matemáticas escolares a partir de los conceptos pedagógicos y los contextos institucionales y curriculares. Después, en el análisis cognitivo, definimos las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo y afectivo. En el análisis de instrucción, diseñamos la secuencia de las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Por último, en el análisis de actuación, elaboramos los instrumentos y procedimientos que permitieron recoger y analizar la información que surgió de la implementación del diseño.

La unidad didáctica Función constante, lineal y afín fue implementada en el colegio Villemar el Carmen IED. Esta institución educativa es de carácter oficial y está ubicada en la localidad de Fontibón, en la ciudad de Bogotá. La institución cuenta con tres sedes y tres jornadas, con una población aproximada de 3200 estudiantes. El nombre del proyecto educativo institucional (PEI) es “Villemaristas líderes en comunicación, convivencia y participación”.

El modelo pedagógico es el aprendizaje significativo y la estrategia pedagógica es el trabajo cooperativo. Esta metodología consta de las fases de exploración e investigación, formulación y comunicación, y justificación, discusión e institucionalización. Desde todas las áreas se busca contribuir al desarrollo de la competencia institucional propuesta en el PEI, definida como la “capacidad del estudiante para interactuar adecuadamente con su entorno, haciendo uso eficaz de sus valores y habilidades comunicativas, desarrollando su proyecto de vida y participando democráticamente en la construcción y transformación de la sociedad en contextos de diversidad” (Colegio Vilemar el Carmen, 2014, p.14).

Dentro del plan de área institucional, el tema de la función constante, lineal y afín se ubica en el grado noveno. Específicamente, uno de los desempeños para este grado es “comprende el concepto de función lineal y sus distintas clases de representación” (p. 34). La unidad didáctica se implementó con estudiantes del curso 901 de la jornada de la mañana, con edades entre 14 y 17 años, quienes se caracterizan por un rendimiento académico básico y su buena participación.

Según Roldán (2013), algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función han evidenciado que existen dificultades relacionadas principalmente con las representaciones. Entre estas investigaciones, Azcárate (1992, 1996), Sierpínska (1985, 1988) y Ruiz (1998) han manifestado que tradicionalmente los profesores centran su interés en mostrar el aspecto algebraico del concepto. Es por ello que los estudiantes terminan repitiendo rutinas sobre objetos algebraicos que tienen poco sentido para ellos. A nivel institucional, al abordar el tema de la función lineal, los profesores de matemáticas generalmente dan mayor énfasis al trabajo con los sistemas de representación simbólico y gráfico, y descuidan lo concerniente a la interpretación de problemas y a los procesos de matematización asociados a los fenómenos de variación y cambio entre las variables que intervienen en una situación. Al plantear actividades en clase que no se inscriben en un contexto cercano al estudiante, no se promueve que el estudiante fortalezca el análisis, la interpretación y la argumentación. Los estudiantes han venido desarrollando habilidades básicas en matemáticas, pero la manera de abordar el tema no ha contribuido significativamente a que desarrollen y potencien en un nivel superior sus habilidades matemáticas. Por esta razón, decidimos abordar este tema desde la interpretación y el análisis de situaciones en contexto. Además, aprovechamos los recursos institucionales, como Geogebra y simuladores.

En la propuesta de la unidad didáctica Función constante, lineal y afín, nos centramos en situaciones que buscan desarrollar nuevas competencias matemáticas en los estudiantes, como las definidas en el marco conceptual de PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Realizamos la implementación de la unidad didáctica en el cuarto periodo del año escolar 2015. Luego de implementarla, recogimos y codificamos la información para introducirla al sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas). El análisis de los resultados obtenidos nos permitió evaluar la unidad didáctica e identificar las debilidades y fortalezas tanto en lo cognitivo como en lo afectivo. De esta forma, realizamos las mejoras al diseño implementado y presentamos una nueva versión que está justificada con todo el análisis realizado.

Finalmente, luego de identificar el problema y realizar el análisis didáctico correspondiente al tema de función constante lineal y afín, presentamos en este documento lo siguiente: (a) la descripción, fundamentación y justificación del diseño previo de la unidad didáctica; (b) los instrumentos y los procedimientos de recolección de la información; (c) la descripción del diseño implementado; (d) la evaluación del diseño y la implementación; (e) el nuevo diseño de la unidad didáctica y (f) las conclusiones del informe.

2. Diseño previo: descripción, fundamentación y justificación

En este apartado, presentamos el diseño previo de la unidad didáctica. En primera instancia, delimitamos el tema de las matemáticas escolares desde el análisis de contenido; luego, planteamos las previsiones y expectativas de aprendizaje según el análisis cognitivo; y, por último, describimos la secuencia de tareas de aprendizaje a partir del análisis de instrucción.

1. Análisis de contenido

A continuación, presentamos la delimitación del tema con base en los contextos curriculares. Posteriormente, presentamos el análisis de contenido del tema función constante, lineal y afín, al tener como referentes tres conceptos pedagógicos: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

1.1. Delimitación del tema desde los contextos curriculares

Con el desarrollo de la unidad didáctica, pretendemos que el estudiante analice situaciones de variación en contextos significativos y que haga uso de diferentes sistemas de representación de la función constante, lineal y afín. En el documento de los estándares, nuestro tema se ubica en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Está relacionado con la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana (MEN, 2006, p. 66). Puntualmente, los siguientes son los estándares de los grados de octavo a noveno a los que pretendemos contribuir.

- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

En el marco conceptual de PISA 2012, el tema corresponde a la categoría de cambio y relaciones que “desde un punto de vista matemático, implica modelar el cambio y las relaciones con las funciones y ecuaciones pertinentes, además de crear, interpretar y traducir entre las representaciones simbólicas y gráficas de las relaciones” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p.19).

1.2. Estructura conceptual

Según Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), la estructura conceptual agrupa los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos (p. 59). En la figura 1, presentamos la estructura conceptual que proponemos para la función constante, lineal y afín.

Como se observa en la figura 1, relacionamos algunos elementos del campo conceptual del tema de función a partir de la notación funcional $f(x) = mx + n$. Las líneas punteadas resaltan las tres subestructuras: si $m = 0$, entonces la función es constante; si $n = 0$, entonces la función es lineal; y si m y $n \neq 0$, entonces la función es afín. La función lineal intercepta el punto $(0,0)$ del plano cartesiano, mientras que la función afín no lo intercepta. La gráfica de una función de la forma $f(x) = mx + n$ puede ser una sucesión de

puntos colineales o una recta, donde m es la pendiente y n es el intercepto con el eje y . Los valores para los cuales está definida la función reciben el nombre de dominio de la función. Estos valores pueden ser discretos o continuos y pertenecen al conjunto de los números reales.

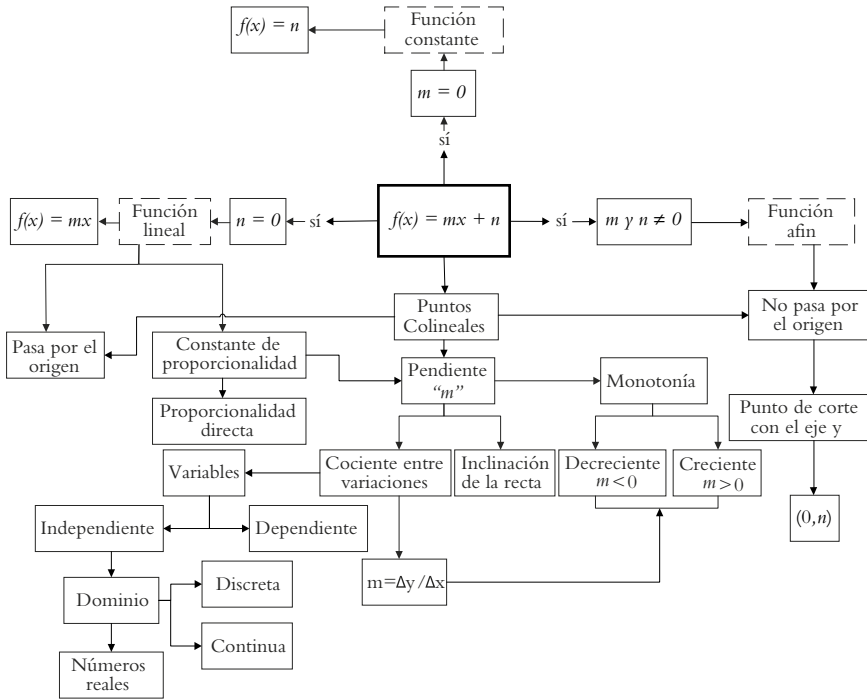


Figura 1. Estructura conceptual de la función constante, lineal y la función afín

Por otra parte, la pendiente se representa por la letra m e indica la cantidad en que se incrementa o disminuye el valor de la variable dependiente, cuando la variable independiente aumenta una unidad. El incremento se presenta cuando el valor de m es positivo y la disminución en el caso contrario. Si la pendiente tiene valor cero, la recta es horizontal, es decir, ni se incrementa ni disminuye. El valor de la pendiente determina la monotonía de la función al definir si es creciente, decreciente o constante. En la función lineal, la pendiente equivale a la constante de proporcionalidad; al multiplicar esta constante por algún valor de la variable independiente, se obtiene el respectivo valor para la variable dependiente. En este caso, las variables son directamente proporcionales.

1.3. Sistemas de representación

Según Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), los sistemas de representación se refieren a los sistemas de signos que permiten designar un concepto matemático. Seguimos el trabajo de Kaput (1992), al considerar que un sistema de representación es “un sistema de reglas para (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos, especialmente de equivalencia” (pp. 71-72). Los sistemas de representación que hemos identificado para el tema Función constante, lineal y afín son los siguientes: numérico, simbólico, tabular, gráfico, pictórico y ejecutable. En la figura 2, presentamos los sistemas de representación para la función constante, lineal y afín y algunas de sus traducciones.

En la figura 2, observamos que los sistemas de representación están interrelacionados, de tal manera que los procedimientos que indicamos con conectores y flechas dependen del sentido en que se hace la traducción entre estos sistemas. Estas traducciones pueden describirse de la siguiente manera: a partir de la representación simbólica, se reemplaza la variable independiente por algún valor del conjunto de los números reales; luego, se realizan las operaciones y se obtienen los valores correspondientes de la variable dependiente. De esta forma, se obtienen las parejas ordenadas $(x, f(x))$ que corresponden a la representación numérica. Estas parejas se pueden organizar en una tabla.

A partir de la representación numérica o tabular, podemos ubicar las coordenadas de los puntos en el plano cartesiano. El primer número corresponde a la coordenada que se ubica en el eje de las abscisas y el segundo número corresponde al eje de las ordenadas. De esta forma, se puede obtener la gráfica que representa la función.

Las traducciones de la representación gráfica a las representaciones numérica, tabular y diagrama sagital implican el proceso de lectura de la gráfica. Es decir, para obtener información de la gráfica debemos identificar las variables representadas en los ejes, la unidad y la escala de los ejes y, de esta forma, identificar los puntos de la gráfica y hacer la traducción correspondiente. Por ejemplo, una vez identificadas las coordenadas del punto en la representación gráfica, se ubica la coordenada en x en la primera columna y la coordenada en y en la segunda columna de la tabla.

En el caso de la traducción de la representación tabular a la simbólica, se requiere deducir la regla de correspondencia entre los valores de las variables; para esto, se puede recurrir al ensayo y error con operaciones matemáticas, de tal manera que los estudiantes puedan llegar del primer elemento de la tabla

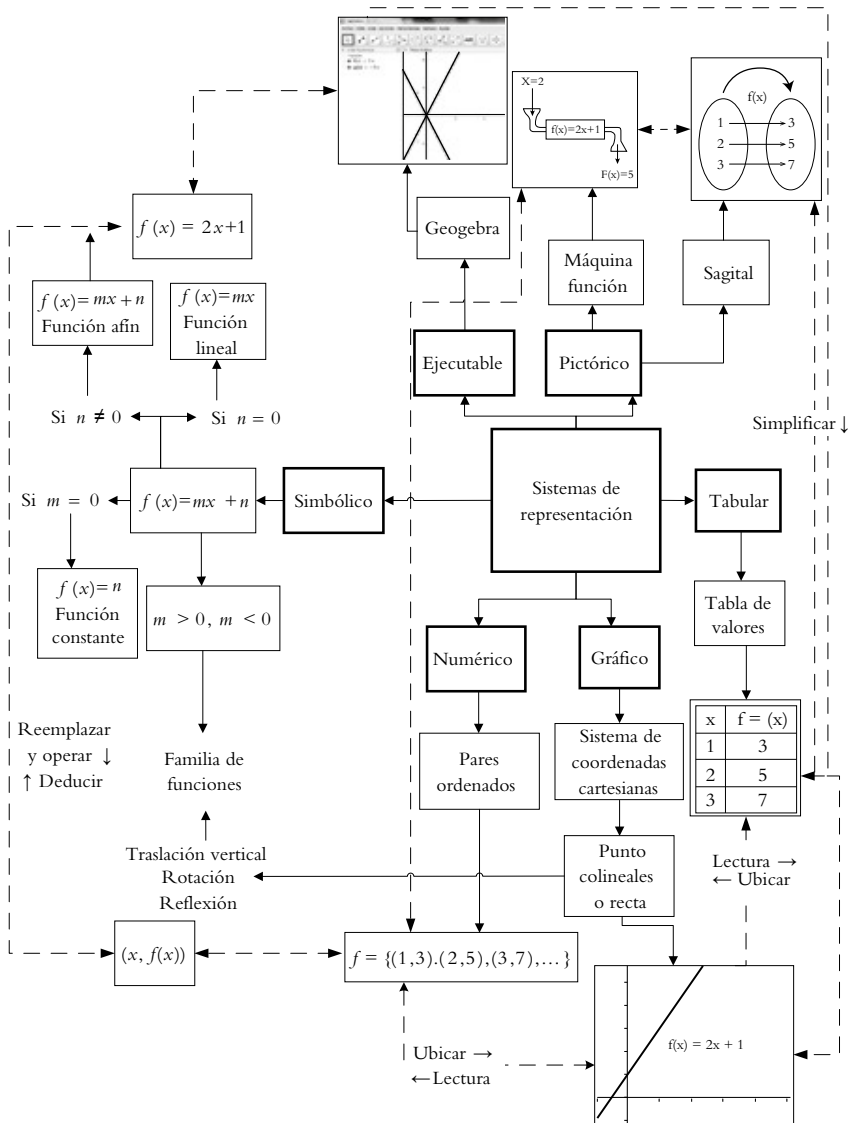


Figura 2. Sistemas de representación de la función constante, lineal y afín

al segundo elemento, buscar la regularidad y traducirla al lenguaje algebraico. Un proceso similar también se realiza al pasar del sistema numérico, pictórico y gráfico a la representación simbólica. La traducción de los sistemas de representación numérico y pictórico al tabular implica un proceso de simplificación y organización de los valores que toman las variables.

De la representación simbólica se pasa a la representación ejecutable, al realizar los pasos que generan una gráfica dinámica de la función en el programa. El sistema de representación ejecutable proporciona las herramientas necesarias para realizar la traducción a los otros sistemas.

1.4. Fenomenología

Según Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), el análisis fenomenológico nos permite identificar fenómenos asociados al tema en cuestión y establecer relaciones entre esos fenómenos. Luego de haber elaborado un listado de fenómenos para el tema de la función constante, lineal y afin, observamos que los fenómenos podían clasificarse de acuerdo con determinada característica estructural. Por ejemplo, la representación simbólica, la monotonía de la función o la continuidad de la función. Para efectos de este trabajo, escogimos el primer criterio, al considerar el nivel educativo en el que se implementó la unidad didáctica. La representación simbólica genera tres categorías, según los valores de m y n , que corresponden a las tres funciones abordadas. Finalmente, agrupamos los fenómenos en tres contextos fenomenológicos de acuerdo con las características de la subestructura matemática que comparten y los problemas a los que dan respuesta. A continuación, describimos cada uno de los contextos fenomenológicos propuestos.

Cantidades constantes

La característica estructural que agrupa esta categoría de fenómenos es la ausencia de variación. Consiste en aquellas situaciones en las que, al variar la cantidad de una magnitud, la otra con la cual se relaciona no cambia. Por ejemplo, el costo de la carrera mínima del taxi.

Relación de proporcionalidad directa

En este grupo de fenómenos, relacionamos dos magnitudes mediante una relación de proporcionalidad directa: se modela un fenómeno de covariación de las cantidades de dos magnitudes por medio de una función lineal. La característica estructural que da sentido a esta categoría corresponde a la existencia de una constante de proporcionalidad entre las variables que se relacionan. Por ejemplo, el costo de alojamiento según el número de días.

Valor inicial diferente de cero

La característica estructural de este contexto fenomenológico es la variación lineal de dos magnitudes a partir de un valor inicial diferente de cero.

A diferencia de la relación de proporcionalidad, la gráfica de la función no pasa por el punto $(0,0)$ y corresponde a la traslación vertical de una función lineal. Un fenómeno de esta categoría es, por ejemplo, la cantidad de agua en un estanque que se vacía a velocidad constante por hora.

En la figura 3, observamos que es posible establecer una relación biunívoca entre los tres contextos fenomenológicos y las tres subestructuras matemáticas que definimos según la representación simbólica de la función constante, lineal y afín.

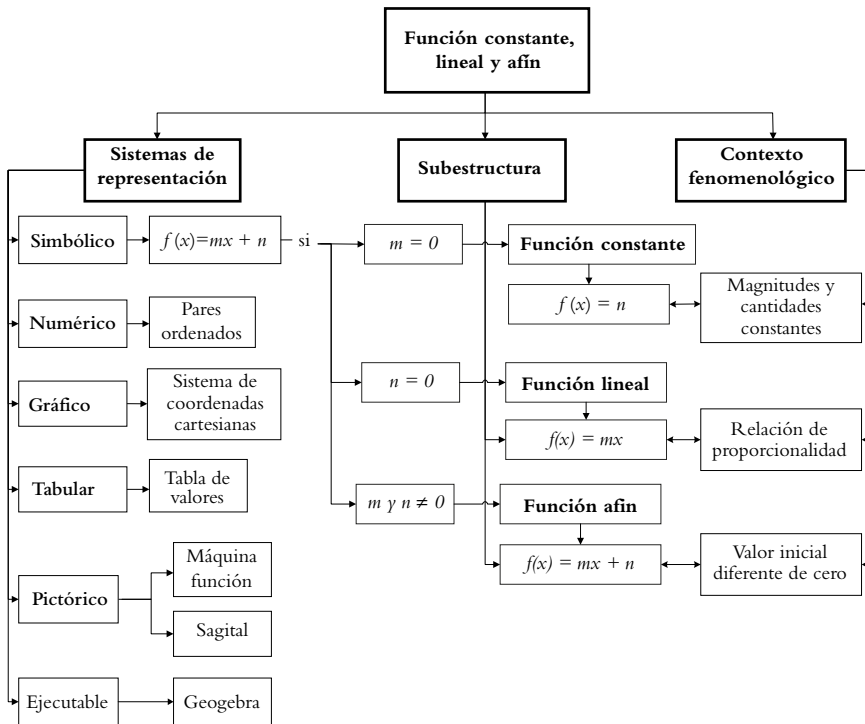


Figura 3. Conceptos pedagógicos, del análisis de contenido, de la función constante, lineal y afín

La figura 3 incluye, además, los sistemas de representación que identificamos para el tema. De esta manera, podemos observar la relación entre los tres conceptos pedagógicos que resumen la delimitación del tema de la unidad didáctica desde el análisis de contenido.

2. Análisis cognitivo

En este apartado, presentamos las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo y afectivo asociadas a nuestro tema.

2.1. Expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo

Según González y Gómez (2018), las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo se categorizan en tres niveles: procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales (nivel superior), objetivos (nivel medio) y capacidades (nivel inferior). A continuación, establecemos estas expectativas de aprendizaje para nuestro tema.

Procesos y capacidades matemáticas fundamentales

Las expectativas de nivel superior corresponden a los procesos matemáticos y a las capacidades matemáticas fundamentales. En el marco conceptual PISA 2012, se afirma que “los procesos matemáticos y las capacidades que subyacen a esos procesos, describen lo que hacen los individuos para relacionar el contexto del problema con las matemáticas y de ese modo resolverlo” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013, p. 12).

Al abordar el tema Función constante, lineal y afín, consideramos que la unidad didáctica apunta a los siguientes tres procesos.

- Formulación matemática de las situaciones.
- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.

En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales, buscamos contribuir a las siete capacidades descritas en PISA 2012: razonar y argumentar, comunicar, matematizar, representar, diseñar estrategias para resolver problemas, usar lenguaje formal, simbólico y las operaciones, y usar herramientas matemáticas. Sin embargo, hacemos énfasis en las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, matematización, representación, y razonamiento y argumentación, dado que el PEI del Colegio Villemar el Carmen IED es “Villemaristas líderes en comunicación, convivencia y participación” y el modelo pedagógico es el aprendizaje significativo.

Objetivos de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje de nivel medio corresponden a los objetivos propios del tema de la unidad didáctica. Los objetivos que hemos propuesto para la unidad didáctica son los siguientes.

Objetivo 1. Formular modelos que describan situaciones de variación de costos y relaciones entre magnitudes físicas, al utilizar funciones constante, lineal y afín.

Objetivo 2. Emplear diferentes sistemas de representación de la función lineal y afín para dar respuesta a un problema.

Objetivo 3. Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín.

Capacidades

El nivel inferior de las expectativas de aprendizaje se refiere a las capacidades. Según González y Gómez (2018), una capacidad se refiere a una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a una tarea asociada a un tema. Determinamos un listado de capacidades para cada uno de los objetivos de la unidad didáctica, a partir de unas tareas prototípicas. El conjunto de tareas prototípicas de un objetivo es aquel conjunto de tareas que, si son resueltas por los estudiantes, entonces el profesor considera que ellos han logrado el objetivo.

A continuación, presentamos un listado corto de capacidades que planteamos para contribuir al logro del objetivo 1. Presentamos el listado completo de las capacidades previstas en la unidad didáctica en el anexo 1¹.

C1. Expresa la regularidad entre variables utilizando una expresión simbólica.

C3. Identifica las variables dependiente e independiente.

C5. Encuentra al menos dos valores del dominio y del rango.

C12. Reconoce cuando una situación corresponde a un valor inicial diferente de cero.

C33. Describe en lenguaje verbal la relación entre variables.

Por otra parte, identificamos que los estudiantes requieren conocimientos previos para resolver las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. A continuación, en la tabla 1, presentamos las capacidades relacionadas con los conocimientos previos.

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8703/>.

Tabla 1

Listado de conocimientos previos del tema Función constante, lineal y afín

CP	Descripción de capacidades
1	Usar el plano cartesiano
2	Completar tablas
3	Utilizar lenguaje algebraico
4	Operar con números reales
5	Diferenciar relación de función
6	Solucionar ecuaciones de primer grado
7	Utilizar notación funcional
8	Hallar el valor numérico de expresiones algebraicas
11	Usar Geogebra

Nota. CP = conocimientos previos

Dificultades y errores

Según González y Gómez (2018), una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos. A continuación, enunciamos las dificultades que definimos para la unidad didáctica.

D1. Dificultad para representar simbólicamente una función constante, lineal o afín.

D2. Dificultad para representar en el plano cartesiano una función constante, lineal o afín.

D3. Dificultad para representar en el sistema tabular una función constante, lineal o afín.

D4. Dificultad para realizar traducciones entre sistemas de representación.

D5. Dificultad para identificar las variables y la relación establecida entre ellas.

D6. Dificultad asociada a la interpretación de resultados.

Seguidamente, presentamos algunos ejemplos de errores previstos relacionados con la dificultad para representar en el plano cartesiano una función constante, lineal o afín. Estos errores son la expresión observable de las dificultades.

E10. Representa gráficamente todas las rectas cortando los ejes desde el origen.

E13. Ubica las magnitudes asociadas al problema en el eje que no corresponde.

E34. Expresa $(0,x)$ como el punto de corte con el eje y .

E46. Utiliza una escala inadecuada en la representación gráfica.

En el anexo 2, presentamos el listado completo de las dificultades y los errores previstos en el desarrollo de la unidad didáctica.

2.2. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

A partir de las capacidades previstas para cada una de las tareas, construimos el grafo de criterios de logro de cada objetivo. Los criterios de logro agrupan capacidades que los estudiantes activan al resolver las tareas de aprendizaje. Por ejemplo, las capacidades C33 (describe en lenguaje verbal la relación entre variables) y C1 (expresa la regularidad entre variables utilizando una expresión simbólica) se agruparon en el criterio de logro CdL 1.9 (expresa la regularidad utilizando lenguaje verbal o simbólico).

Para construir el grafo de criterios de logro que caracteriza a cada uno de los objetivos, fue necesario identificar la sucesión ordenada de capacidades, junto con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver las tareas de aprendizaje. A esta sucesión ordenada de capacidades, con sus respectivos errores asociados, se le denomina *camino de aprendizaje*. Los objetivos pueden tener más de un camino de aprendizaje de acuerdo con las estrategias que sigan los estudiantes al resolver las tareas del objetivo.

A continuación, en la figura 4 presentamos el grafo de criterios de logro que caracteriza al primer objetivo. Como se observa en la figura 4, en este objetivo pretendemos que los estudiantes reconozcan situaciones ubicadas en los tres contextos fenomenológicos propuestos: (a) magnitudes y cantidades constantes, (b) relación de proporcionalidad directa y (c) valor inicial diferente de cero. Esperamos que los estudiantes determinen las magnitudes que intervienen en un problema, identifiquen las variables que intervienen en él, utilicen un sistema de representación (tabular, gráfica o pictórica) para describir el problema, encuentren las regularidades y las expresen en lenguaje verbal o simbólico, validen sus respuestas, y finalmente reconozcan las tres subestructuras matemáticas. En este objetivo, el uso de un sistema de representación permite que los estudiantes sigan cuatro diferentes caminos de aprendizaje al resolver las tareas. Sin embargo, puede pasar que no utilice ningún sistema de representación para encontrar la regularidad, lo que nos genera un grafo con cinco caminos de aprendizaje.

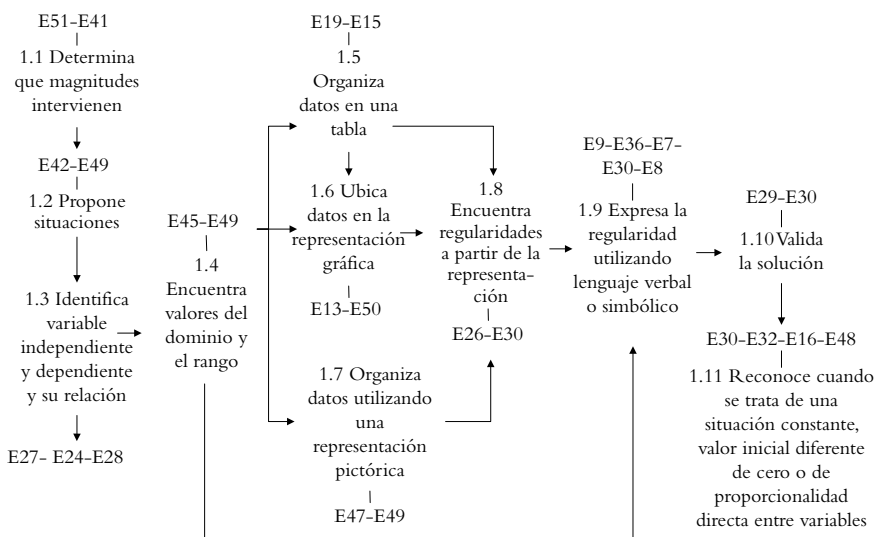


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En cuanto a los errores, previmos por ejemplo que, en el criterio CdL 1.3, el estudiante puede confundir la variable dependiente con la independiente (E27) y en el criterio CdL 1.9, el estudiante puede incluir datos incorrectos en la expresión verbal o simbólica (E9), expresar la relación entre variables de forma incorrecta (E36) o escribir la expresión como un resultado numérico (E8).

A continuación, en la figura 5, presentamos el grafo del criterio de logro del objetivo 2. Como se observa en la figura 5, pretendemos que al resolver las tareas del objetivo 2, los estudiantes justifiquen sus respuestas utilizando la traducción entre diferentes sistemas de representación. En el camino de aprendizaje presentado en la parte superior de la figura, esperamos que los estudiantes partan de identificar las variables y reconocer el significado de estas en el contexto del problema para realizar traducciones entre los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico.

Finalmente, en la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3.

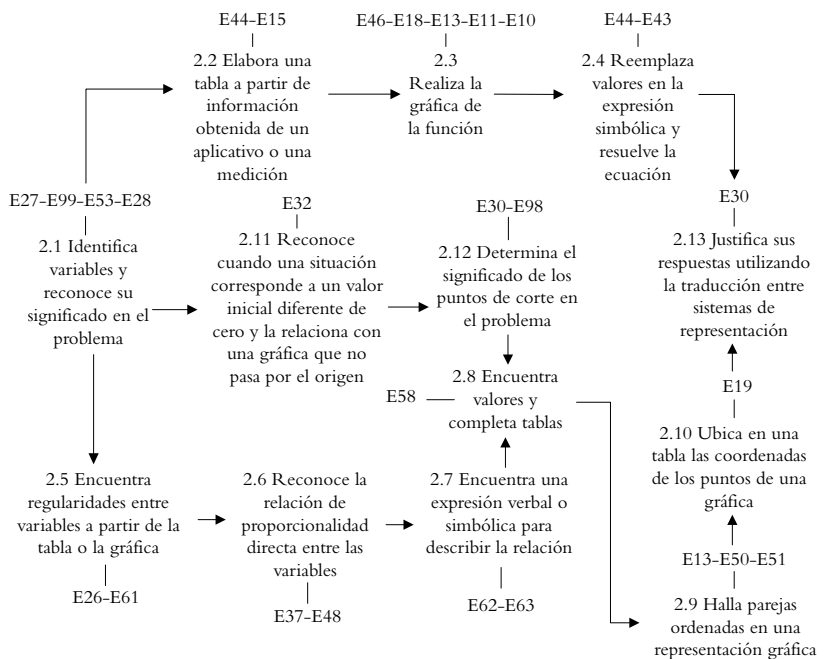


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

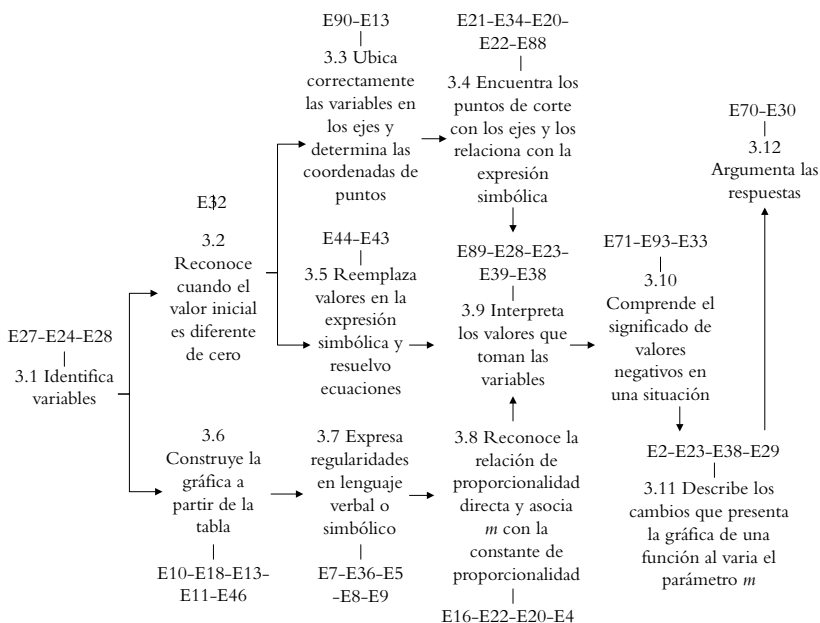


Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 3

Como se observa en la figura 6, pretendemos que, al resolver las tareas del objetivo 3, los estudiantes puedan interpretar y argumentar sus respuestas al seguir tres caminos de aprendizaje en los que realicen algunas traducciones entre diferentes sistemas de representación. Presentamos la descripción detallada de los grafos de criterio de logro de los objetivos 2 y 3 en el anexo 3.

2.3. Expectativas de aprendizaje de tipo afectivo

Según González y Gómez (2018), es necesario incentivar la motivación del estudiante frente al tema de las matemáticas escolares, teniendo en cuenta los tres enfoques: (a) expectativas sobre sí mismo, (b) factores personales intrínsecos e extrínsecos y (c) los que entrelazan la motivación y el aprendizaje. Al considerar que muchos de los estudiantes a los que va dirigida la unidad didáctica no se muestran seguros y confiados al abordar la solución de problemas que impliquen los procesos matemáticos, planteamos las siguientes expectativas de tipo afectivo.

Expectativa afectiva 1 (EA1). Desarrollar el interés por modelar problemas utilizando las funciones constante, lineal y afín.

Expectativa afectiva 2 (EA2). Desarrollar confianza en las propias habilidades para traducir diferentes sistemas de representación de las funciones constante, lineal y afín.

Expectativa afectiva 3 (EA3). Adquirir seguridad para comunicar sus argumentos en relación con la solución de un problema asociado a la función constante, lineal o afín.

La expectativa afectiva EA1 se ubica dentro del enfoque de las expectativas centradas en factores personales, tiene como expectativa general el interés y está asociada a la capacidad matemática fundamental de matematización. La expectativa afectiva EA2 se ubica dentro del enfoque de las expectativas que entrelazan la motivación y la cognición, tiene como expectativa general la actitud y está asociada a la capacidad matemática fundamental de representación. La expectativa afectiva EA3 se ubica dentro del enfoque de las expectativas sobre sí mismo, tiene como expectativa general la confianza y está asociada a las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación y razonamiento y argumentación.

Por otro lado, según Gómez, Mora y Velasco (2018), algunos expertos han establecido aspectos de las tareas que pueden afectar la motivación del estudiante. Dentro de estos aspectos encontramos la adecuación de las demandas

cognitivas, el reto, la reacción a los errores, la contribución a la interacción, el contexto y las metas. Los aspectos anteriores se tradujeron en seis variables o factores que se tuvieron en cuenta para evaluar la dimensión afectiva de la unidad didáctica. Las variables son: (a) sabía por qué resolver la tarea, (b) sabía cómo hacerlo, (c) fue un tema interesante, (d) detecté mis errores, (e) fue un reto motivante y (f) pude interactuar con los demás. Estas variables se incluyeron en el matematógrafo de los diarios del profesor y del estudiante que presentaremos más adelante.

3. Análisis de instrucción

En este apartado, presentamos la estructura del diseño previo y la descripción de los elementos de las tareas de aprendizaje.

3.1. Estructura del diseño previo

Una vez que establecimos las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo y afectivo, el análisis de instrucción nos proporcionó elementos conceptuales y técnicas para diseñar tareas de aprendizaje. Luego de tener una versión previa de la secuencia de tareas de aprendizaje de la unidad didáctica, realizamos el análisis de los elementos de cada tarea y la coherencia de la secuencia de tareas, para finalmente proponer modificaciones. Estas modificaciones buscaron asegurar que la secuencia de tareas propuesta contribuyera de la mejor manera posible al logro de las expectativas y a la superación de las limitaciones de aprendizaje. De esta forma, el diseño previo de la unidad didáctica consta de las siguientes tareas de aprendizaje.

Objetivo 1. Identificar variables (T1) y Hallar regularidades (T2).

Objetivo 2. Fórmulas de Pearson (T3), Ciclorruta (T4) y Altura de la vela (T5).

Objetivo 3. Comparación de velas (T6) y Ley de Hooke (T7).

A continuación, en la tabla 2, presentamos el diseño previo de las siete tareas de aprendizaje que conforman la unidad didáctica. Aclaremos que propusimos implementar cada una de las tareas en una sesión de 110 minutos, según la distribución horaria del colegio Villemar el Carmen IED.

La información de la tabla 2, nos permite resumir la contribución de cada una de las tareas al logro de los objetivos, al desarrollo de las expectativas de nivel superior y a las de tipo afectivo. Para determinar la contribución de la tarea a las expectativas de nivel superior, fue necesario revisar detalladamente

Tabla 2

Estructura del diseño previo de la unidad didáctica Función constante, lineal y afín

Tarea	Metas	CMF	Proceso Matemático	EA
Objetivo 1. Formular modelos que describan situaciones de variación de costos y relaciones entre magnitudes físicas, utilizando funciones constante, lineal y afín				
T1	Identificar las magnitudes y variables que intervienen en situaciones de costo y reconocer relaciones de dependencia entre ellas	Matematización	Formular	EA1
T2	Expresar la regularidad entre variables utilizando una expresión verbal o simbólica	Matematización	Formular	EA1
Objetivo 2. Emplear los sistemas de representación gráfico, simbólico, tabular y numérico de las funciones constante, lineal y afín para dar respuesta a un problema				
T3	Realizar traducciones entre los sistemas de representación simbólico, numérico, tabular y gráfico.	Representación	Emplear	EA2
T4	Realizar traducciones entre los sistemas de representación gráfico, numérico, tabular y simbólico.	Representación	Emplear	EA2
T5	Realizar traducciones entre los sistemas de representación gráfico, numérico, tabular y simbólico.	Representación	Emplear	EA2
Objetivo 3. Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín				
T6	Describir los cambios que presenta la gráfica de una función al variar los parámetros m y n , encontrando argumentos válidos para justificar sus respuestas dentro de modelos de función lineal y afín.	Matematización Representación	Emplear Interpretar	EA2 EA3
T7	Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín.	Matematización Comunicación	Formular Interpretar	EA2 EA3

Nota. T1 = Identificar variables; T2 = Hallar regularidades; T3 = Fórmulas de Pearson; T4 = Ciclorruta; T5 = Altura de la vela; T6 = Comparación de velas; T7 = Ley de Hooke; CMF = capacidades matemáticas fundamentales; EA1 = desarrollar el interés por modelar problemas utilizando las funciones constante, lineal y afín; EA2 = desarrollar confianza en las propias habilidades para traducir diferentes sistemas de representación de las funciones constante, lineal y afín; EA3 = adquirir seguridad para comunicar sus argumentos en relación con la solución de un problema asociado a la función constante, lineal o afín

cada uno de los criterios de logro e identificar su relación con uno o más de los procesos y capacidades matemáticas fundamentales descritas en PISA 2012. De esta manera, cuantificamos el número de contribuciones. En la tabla 3, presentamos el resumen de la cantidad de contribuciones a las expectativas de aprendizaje de nivel superior para cada uno de los objetivos. En el anexo 4, presentamos las contribuciones de los criterios de logro de cada objetivo a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Tabla 3
Contribuciones de los objetivos a las expectativas de aprendizaje de nivel superior y los procesos matemáticos

O _n	DRP			M			C			Ra			U			Re			H				
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I		
O1	2			10	2	4				1	1	2	2	1		3							
O2	1	1			5	1	2	1	1		3	1		2		1	10	5			2		
O3			1	3	4	2	3	2				1	2	2		4	4					1	2

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; O_n = Objetivo

En cuanto a las contribuciones previstas para las capacidades matemáticas fundamentales, observamos que, en el objetivo 1, la matematización tiene la mayor cantidad, con 12. Para el objetivo 2, la representación tiene un total de 16 contribuciones; mientras que, en el objetivo 3, la mayor cantidad de contribuciones corresponde a la matematización, con 9.

En los procesos matemáticos, el objetivo 1 contribuye en mayor medida al proceso de formular, con 22 contribuciones; para el objetivo 2, el mayor énfasis corresponde al proceso de emplear, con 24 contribuciones; mientras que, en el objetivo 3, el proceso de formular tiene 12 contribuciones.

3.2. Secuencia de tareas de la unidad didáctica

El análisis de la coherencia de la secuencia de tareas implicó analizar la relación entre los requisitos de una tarea y las metas de las tareas anteriores. En la tabla 4, indicamos esta relación.

Tabla 4
Coherencia de las tareas a partir de sus requisitos

T	CP	Tareas						
		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
T1	✓							
T2	✓	✓						
T3	✓	✓						
T4	✓	✓	✓					
T5	✓	✓		✓	✓			
T6	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
T7		✓	✓	✓	✓	✓		

Nota. CP = conocimientos previos; T1 = Identificar variables; T2 = Hallar regularidades; T3 = Fórmulas de Pearson; T4 = Ciclorruta; T5: Altura de la vela; T6: Comparación de alturas; T7: Ley de Hooke

Según la tabla 4, las tareas 1 a 6 tienen conocimientos previos como requisitos. Por ejemplo, para la tarea Fórmulas de Pearson (T3), se requiere que el estudiante opere con números reales (CP5), resuelva ecuaciones de primer grado (CP9), realice tablas (CP2) y grafique parejas ordenadas (CP2). Además, para las tareas Altura de la vela (T5) y Comparación de alturas (T6), se requiere como conocimiento previo el uso de Geogebra (CP11).

Adicionalmente, observamos que cada tarea de la secuencia tiene como requisito una que la antecede. Por ejemplo, la tarea Identificar variables (T1) es requisito para las tareas Hallar regularidades (T2) y Fórmulas de Pearson (T3), y las tareas Comparación de alturas (T6) y ley de Hooke (T7) tienen como requisitos las tareas anteriores. A continuación, presentamos con detalle la ficha de la tarea Hallar regularidades.

3.3. Ficha de la tarea Hallar regularidades

Según Gómez, Mora y Velasco (2018), una tarea de aprendizaje incluye los siguientes elementos: (a) formulación, (b) requisitos, (c) metas, (d) uso de materiales y recursos, (e) formas de agrupamiento, (f) estrategias de interacción y (g) temporalidad. A continuación, presentamos la ficha de la tarea Hallar regularidades (T2). En el anexo 5, incluimos la ficha completa de la secuencia de tareas de aprendizaje del diseño previo de la unidad didáctica.

Requisitos

Los estudiantes deben identificar datos relevantes del problema e identificar variables y sus relaciones. Además, deben resolver operaciones entre números reales.

Metas

Pretendemos que los estudiantes expresen la relación entre las variables al utilizar una expresión verbal o simbólica. Además, esperamos que puedan encontrar diferencias entre las situaciones y puedan expresarlas mediante alguna representación. También, esperamos que superen errores como asociar todas las situaciones con la función lineal.

Formulación

Tarea Hallar regularidades

Analiza y resuelve cada una de las siguientes situaciones, con ayuda de otros tres compañeros.

Situación 1. Ana trabaja como vendedora del periódico *El Colombiano*. Sus ingresos dependen de un salario básico de \$5000 diarios que se incrementa con base en las ventas que realice de este periódico. Si, por cada periódico vendido obtiene una comisión de \$700, ¿cuánto dinero devengará en un día si realiza 5, 10 o 16 ventas?

Con el cambio de administración de la empresa, se propone una nueva forma de pago. Sin importar el número de suscripciones vendidas, Ana ganará \$ 500 000. ¿Cuánto dinero devengará en un día si realiza 10, 20 o 26 ventas?

Situación 2. Se tiene un plan de telefonía, con cargo fijo mensual de \$30 900, con IVA del 16% incluido. Este plan incluye 270 minutos para hablar a cualquier destino móvil o fijo nacional. Si se consumen todos los minutos antes de terminar el mes, el valor por minuto adicional es de \$400.

¿Cuánto debe pagar si consume 100, 150 o 200 minutos?

Si se excede en 5, 10, 20 minutos adicionales, ¿cuánto pagará en cada caso?

Situación 3: La entrada al concierto de One Direction cuesta \$350 000 por persona.

¿Cuánto tendrán que pagar Andrea y sus cuatro amigas para ingresar al concierto?

Si el grupo de fans es de 124 personas, ¿cuánto deberán pagar para ingresar al concierto?

Situación 4: Un automóvil se desplaza con una rapidez constante de 30 m por segundo.

Calcula la distancia que recorrerá en 12, 18 y 28 segundos.

Si el automóvil inicia su movimiento en un punto que se encuentra 40 m adelante del punto de partida, calcula la distancia a la que se encuentra del punto de partida a los 12, 35 y 40 segundos.

Ahora, responde las siguientes preguntas. ¿Qué diferencias encuentras entre las cuatro situaciones anteriores? ¿Cómo llamarías a las funciones en las que se mantiene fijo uno de los valores, sin importar que varíe el otro?

Encuentra una expresión o representación que permita establecer la relación entre las variables en cada una de las situaciones.

Materiales y recursos

El recurso que utilizaremos es una guía con diagramas para cada situación.

Agrupamiento

Los estudiantes trabajarán en grupos de tres o cuatro estudiantes a lo largo de toda la tarea.

Interacción

La comunicación predominante se dará entre los estudiantes. El profesor orientará la actividad, de manera que resolverá inquietudes y, al final, dirigirá la puesta en común de los resultados. Para esta, los estudiantes escribirán en el tablero los resultados de cada situación y el docente orientará al gran grupo con las reflexiones que los lleven a encontrar la expresión o representación de cada situación, así como sus diferencias.

Temporalidad

La primera parte de la sesión tomará 20 minutos para la realimentación de la tarea anterior. Asignamos 5 minutos para la puesta en común del grafo de criterios de logro de la tarea, 40 minutos para el desarrollo de la guía en grupos, 30 minutos para la puesta en común del trabajo de cada grupo y la intervención del docente, y, finalmente, 15 minutos de diligenciamiento del diario del estudiante.

3.4. Expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo

En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea Hallar regularidades. Con esta tarea pretendemos que los estudiantes identifiquen las

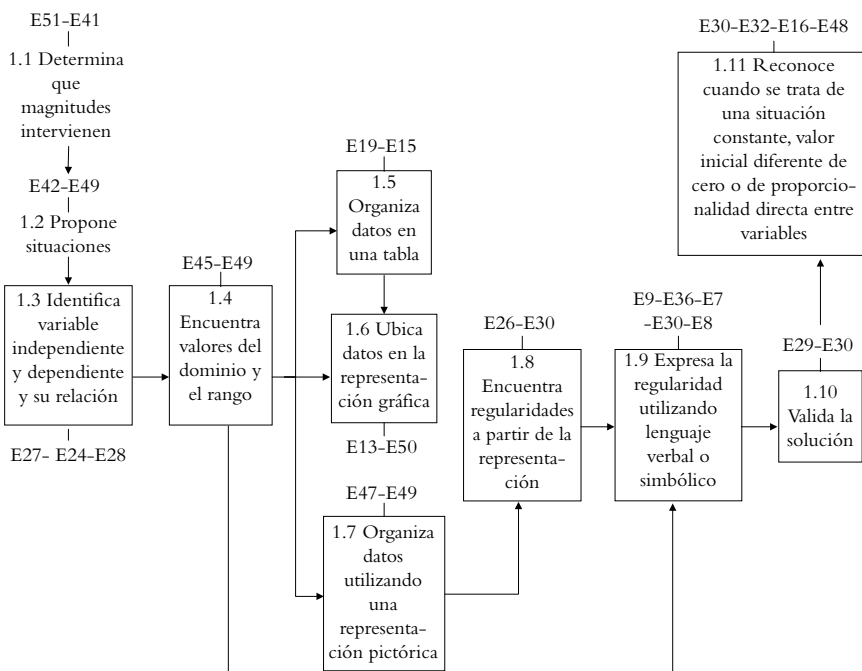


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea Hallar regularidades

variables que intervienen en el problema, encuentren valores del dominio y rango, utilicen un sistema de representación (tabular, gráfico o pictórico) para describir la situación, encuentren las regularidades y las expresen en lenguaje verbal o simbólico, validen sus respuestas y reconozcan las tres subestructuras matemáticas: magnitudes y cantidades constantes, relación de proporcionalidad directa, y valor inicial diferente de cero.

Por otro lado, asociamos a cada criterio de logro los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al resolver la tarea. Por ejemplo, en el criterio CdL 1.9 (expresa la regularidad utilizando lenguaje verbal o simbólico), los estudiantes pueden incluir datos incorrectos o pueden faltarles datos en la expresión verbal o simbólica (E9); expresar la relación entre variables de forma incorrecta (E36); intercambiar la dependencia entre las variables (E7); utilizar datos que no están involucrados en el problema (E30); o escribir la expresión como un resultado numérico (E8). En la tabla 5, presentamos la contribución de los criterios de logro de la tarea Hallar regularidades a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Tabla 5

Contribución de los criterios de la tarea Hallar regularidades a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

CdL	DRP			M			C			Ra			U			Re			H			
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	
1.3				✓																		
1.4	✓									✓			✓									
1.5																						✓
1.6																						✓
1.7																						✓
1.8				✓																		
1.9				✓				✓					✓									✓
1.10						✓						✓										
1.11				✓																		
T	1			4		1	1				1	1	1	1								4

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = Representación; H = utilización de herramientas matemáticas; CdL = Criterio de logro

En la tabla 5, observamos que para la tarea Hallar regularidades, el mayor número de contribuciones corresponden a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización y representación, en el proceso de formular. Esto obedece a que los criterios de logro de la tarea se relacionan en mayor medida a estas expectativas cognitivas, correspondientes al primer objetivo.

3.5. Expectativas de aprendizaje de tipo afectivo

En cuanto a las contribuciones a las expectativas de tipo afectivo, la tarea Hallar regularidades tiene cinco contribuciones para desarrollar el interés por modelar problemas al utilizar las funciones constante, lineal y afín (EA1); una contribución para desarrollar confianza en las propias habilidades para traducir diferentes sistemas de representación de las funciones constante, lineal y afín (EA2); y tres contribuciones para adquirir seguridad para comunicar sus argumentos en relación con la solución de un problema asociado a la función constante, lineal o afín (EA3).

3. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información

En este apartado, presentamos los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información que utilizamos para el análisis de los resultados de la unidad didáctica. Estos instrumentos son la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje, el examen final, el diario del estudiante, el diario del profesor y el sistema ACE.

1. Tareas

La tarea diagnóstica consta de cinco numerales relacionados con lenguaje algebraico, plano cartesiano, ecuaciones lineales, expresiones algebraicas, operaciones con números reales y notación funcional. A partir de la aplicación de la tarea diagnóstica, identificamos las debilidades que presentaron los estudiantes en cuanto a los conceptos previos. Luego de la realimentación de la tarea, implementamos las ayudas previstas para superar las dificultades encontradas (véase anexo 6).

Al resolver las siete tareas de aprendizaje, las producciones escritas de los estudiantes permitieron observar en qué medida activaron las capacidades que pretendíamos desarrollar a partir de la implementación de la unidad didáctica. La corrección de las tareas nos permitió observar su contribución a las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo y afectivo. También nos ayudó a identificar los caminos de aprendizaje activados por los estudiantes al resolver las tareas, los errores en los que incurrieron y el nivel de activación de los criterios de logro. Adicionalmente, obtuvimos información al observar la actuación de los estudiantes y al indagar sobre los procesos o estrategias de solución puestos en juego en el desarrollo de las tareas.

Por otra parte, el examen final nos permitió establecer el grado de consecución de los objetivos propuestos. En la elaboración del examen, tuvimos en cuenta aspectos claves de cada objetivo y la coherencia entre el examen final y las tareas de aprendizaje. El examen final está conformado por un ítem correspondiente al primer objetivo, dos ítems asociados al segundo objetivo y un último ítem relacionado con el tercer objetivo (véase anexo 7). Para la valoración del examen final, elaboramos una rúbrica que nos permitió calificarlo con mayor precisión. En la tabla 6, presentamos el ejemplo de la rúbrica para el ítem del examen que evalúa el objetivo 1.

Tabla 6
Rúbrica de examen: niveles de logro e indicadores para el objetivo 1

Nivel de logro	Indicadores
Superior	El estudiante describe la expresión matemática que modela las tres situaciones
Alto	El estudiante formula la expresión verbal o simbólica al relacionar los datos suministrados en el problema, pero puede utilizar incorrectamente el signo igual (E6) o incluir la variable en la representación simbólica de la función constante (E3)
Básico	El estudiante formula una expresión verbal que relaciona las variables dadas en el problema pero puede relacionar las variables con magnitudes incorrectas (E29), incluir datos incorrectos en la representación simbólica (E9) o realizar operaciones que no corresponden con el enunciado del problema (E45)
Bajo	El estudiante tiene dificultad para encontrar una expresión verbal o simbólica adecuada porque confunde la variable dependiente con la independiente (E27), utiliza datos que no están involucrados en el problema (E30), generaliza una regla de correspondencia que funciona solo para un valor particular de la variable (E26) o expresa la relación entre variables de forma incorrecta (E36). Además, puede asociar todas las situaciones con función lineal (E32)

Como se observa en la tabla 6, en la rúbrica establecimos cuatro niveles de logro según la escala de valoración que rige nacionalmente. Para el caso particular del colegio Villemar el Carmen IED, esta escala corresponde a una valoración numérica: (a) superior, entre 91 y 100; (b) alto, entre 80 y 90; (c) básico, entre 65 y 79; y (d) bajo, menor que 65. Así mismo, los indicadores presentados nos ayudaron a valorar los desempeños alcanzados por los estudiantes.

2. Diario del estudiante

En el diario del estudiante, pretendemos que los estudiantes evalúen su proceso de aprendizaje en cada una de las tareas. El diario está dividido en el dominio cognitivo y el dominio afectivo. El dominio cognitivo incluye el grafo de criterios de logro del objetivo, en el que destacamos aquellos criterios de logro que se pueden activar con la tarea. En la figura 8, presentamos el ejemplo del apartado del dominio cognitivo para la tarea Hallar regularidades.

Como se observa en la figura 8, en la parte superior de cada criterio se ubica un círculo que los estudiantes deben colorear a modo de semáforo, indicando con colores la percepción de logro en cada criterio. El color verde significa que cumplió con el criterio, el amarillo, que tiene dudas o

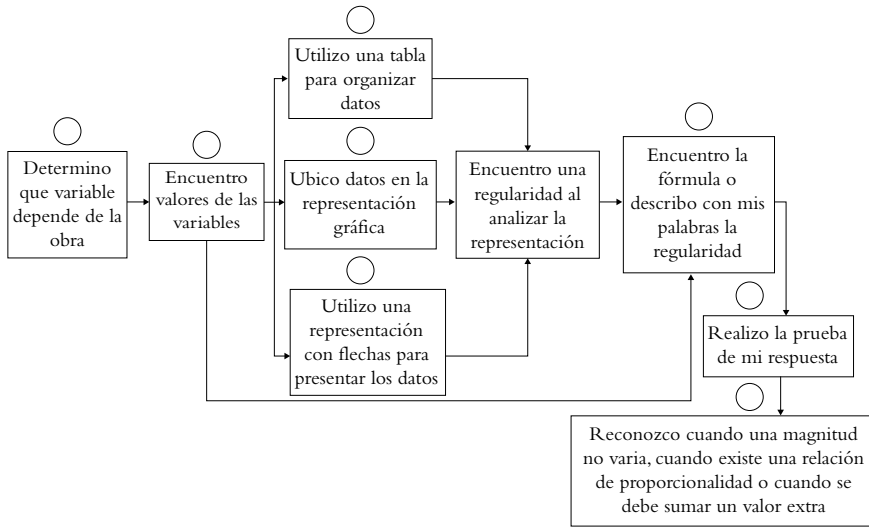


Figura 8. Dominio cognitivo para la tarea Hallar regularidades

inquietudes al respecto, y el rojo, que no logró el criterio. Además, incluimos un recuadro para que los estudiantes manifiesten sus fortalezas o debilidades al solucionar la tarea.

Por otro lado, en la figura 9, presentamos el matematógrafo para la tarea Hallar regularidades. En el matematógrafo, los estudiantes deben marcar el

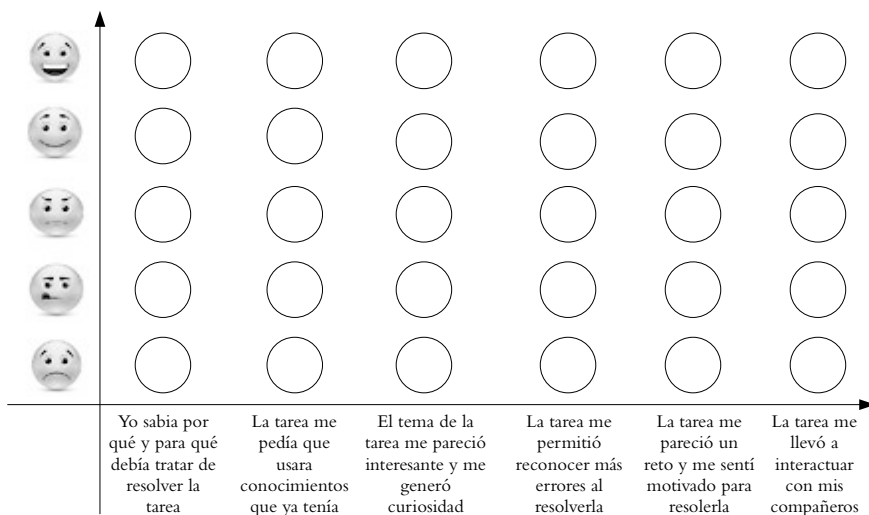


Figura 9. Matematógrafo para la tarea Hallar regularidades

círculo que corresponda a sus percepciones en cada una de las variables que afectan la motivación. Además, incluimos un recuadro para que los estudiantes escriban sus percepciones sobre los aspectos de la tarea que consideran más relevantes.

3. Diario del profesor

El diario del profesor está conformado por el dominio cognitivo y el dominio afectivo. En la primera parte del dominio cognitivo, ubicamos el grafo de la tarea. En la parte superior de cada criterio de logro se ubica un círculo que se colorea a modo de semáforo, igual que en el diario del estudiante. De esta forma, el profesor registra la percepción grupal del nivel de consecución de los criterios de logro. Además, incluimos una tabla de registro de información con tres indicadores del nivel de activación de los criterios de logro. En la figura 10, presentamos una parte de la tabla para la tarea Hallar regularidades.

Tabla 3				
<i>Aspectos afectivos de la tarea 2 Hallar regularidades (objetivo 1, sesión 2)</i>				
CdL	NdA %			Indicadores de activación, errores y dificultades, posibles causas, incidentes
	AN	AP	AT	
CdL1.3				<p>AT: El estudiante identifica variables dependiente e independiente y establece relaciones entre ellas.</p> <p>AP: El estudiante puede confundir variable dependiente con independiente (E27).</p> <p>AN: El estudiante incurre en errores como: reconocer incorrectamente las variables en el problema (E24) o confundir las cantidades variables con las cantidades fijas (E28).</p> <p><i>Observaciones en la implementación</i></p> <hr/> <hr/>
CdL1.4				<p>AT: El estudiante encuentra valores del dominio y rango.</p> <p>AP: El estudiante puede realizar operaciones que no corresponden con el enunciado del problema (E45).</p> <p>AN: El estudiante utiliza magnitudes adicionales (E49).</p> <p><i>Observaciones en la implementación</i></p> <hr/> <hr/>

Figura 10. Niveles de activación de los criterios de logro para la tarea Hallar regularidades

En esta tabla, el profesor registra un porcentaje aproximado de los estudiantes que alcanzan los criterios de logro de manera total, parcial o nula. Por último, en este apartado, el profesor puede escribir las observaciones de lo ocurrido en el desarrollo de la tarea. En el dominio afectivo del diario del profesor, ubicamos el matematógrafo y una tabla con indicadores para las expectativas afectivas. Presentamos esta tabla en la figura 11.

Tabla 4				
<i>Aspectos afectivos de la tarea 2 Hallar regularidades (objetivo 1, sesión 2)</i>				
EA	NdC			
	B	M	A	Indicadores
EA1				Bajo: Demuestra poco interés por plantear y analizar situaciones acordes con las magnitudes dadas. Observaciones: _____ Medio: Demuestra interés por plantear y analizar únicamente una situación de acuerdo con las magnitudes establecidas. Observaciones: _____ Alto: Demuestra interés por plantear y modelar diversas situaciones al utilizar las funciones constante, lineal y afín. Observaciones: _____
Nota: EA1 = Desarrolla interés por modelar problemas utilizando las funciones constante, lineal y afín; NdC = nivel de consecución; B = bajo; M = medio; A = alto.				

Figura 11. Indicadores de las expectativas afectivas para la tarea Hallar regularidades

Por último, incluimos un apartado en el que el profesor registra aspectos relevantes utilizados en la toma de decisiones. Estos aspectos son las acciones no previstas emprendidas durante la sesión, las observaciones de los trabajos corregidos de los estudiantes de la muestra y el registro de decisiones para sesiones posteriores. Presentamos la versión final de los diarios del profesor y del estudiante en los anexos 8 y 9.

4. Sistema ACE

El sistema ACE está compuesto por un conjunto de libros (archivos) de Excel que nos permiten registrar, codificar, analizar y producir resultados de la información recogida de las producciones de las tareas de aprendizaje, así como de los diarios del profesor y de los estudiantes.

Las tareas de aprendizaje están descritas en términos de sus grafos de criterios de logro. Cada uno de estos criterios tiene una ponderación dentro del objetivo. Además, los criterios de logro tienen un nivel de activación según los errores en los que incurren los estudiantes. El nivel de activación del criterio de logro se codificó así: cero, para la activación nula; uno, para la activación parcial; y dos, para la activación total. Luego de codificar e introducir la información, los resultados obtenidos permitieron observar el nivel de logro de los objetivos propuestos.

Por otra parte, en el diseño previo de la unidad didáctica, establecimos las contribuciones de cada uno de los criterios de logro a las expectativas de aprendizaje de nivel superior (capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos) y a las expectativas de tipo afectivo. El nivel de activación de estos criterios permitió obtener resultados para el nivel de desarrollo de estas expectativas.

Además, los semáforos se codificaron así: cero, para el color rojo; uno, para el color amarillo, y dos, para el color verde. Los resultados obtenidos permitieron valorar las percepciones del profesor y de los estudiantes en cuanto al nivel de activación de cada criterio de logro desde el nivel bajo al nivel alto.

Finalmente, en cuanto a los matematógrafos, cada una de las marcas en las caritas permitió valorar las percepciones de los factores que afectan la motivación, al codificarlas desde cero hasta cuatro. De esta manera, obtuvimos los resultados que permitieron valorar estos factores desde un nivel bajo hasta un nivel muy alto.

4. Descripción del diseño implementado

En este apartado, presentamos la descripción del diseño de la unidad didáctica que incluye los cambios realizados durante la implementación. La estructura de la unidad didáctica se planteó en tres fases: la fase inicial, que incluye la aplicación de la tarea diagnóstica, la realimentación y la implementación de las ayudas para superar los errores en los que incurrieron los estudiantes; la fase de implementación, que corresponde a la aplicación de las siete tareas de aprendizaje; y la fase de cierre, conformada por la aplicación del examen y su realimentación.

Inicialmente, teníamos previsto que los estudiantes resolvieran una tarea de aprendizaje por cada sesión. En la tabla 7, presentamos la comparación de sesiones entre el diseño previo y el diseño implementado.

Tabla 7
Comparación de sesiones entre el diseño previo y el diseño implementado

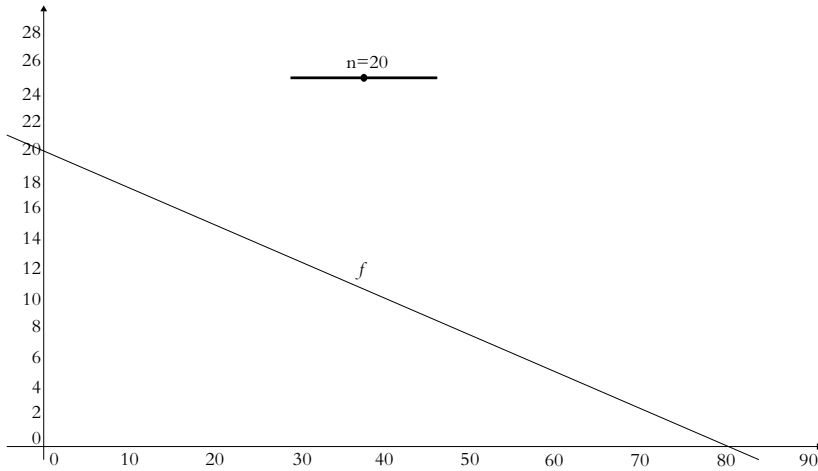
Diseño previo						
S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
O1. Formular modelos		O2. Emplear sistemas de representación			O3. Interpretar resultados	
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
Diseño Implementado						
S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7
O1. Formular modelos		O2. Emplear sistemas de representación		O3. Interpretar resultados		
T1	T2	T3-T4	T5	T6	T6	T7

Nota. On = objetivo, Sn = sesión, T1 = Identificar variables, T2 = Hallar regularidades, T3 = Fórmulas de Pearson, T4 = Ciclorruta, T5 = Altura de la vela, T6 = Comparación de alturas, T7 = Ley de Hooke

En la tabla 7, observamos que el diseño previo de la implementación estaba dividido en siete sesiones: dos sesiones para el objetivo 1, tres sesiones para el objetivo 2 y dos sesiones para el objetivo 3. Sin embargo, durante la fase de implementación fue necesario hacer algunos ajustes a los tiempos previstos para la solución de las tareas. El desfase se presentó en el desarrollo de las tareas del objetivo 2. Las tareas Fórmulas de Pearson (T3) y Ciclorruta (T4) fueron resueltas en una sola sesión, debido a que los estudiantes mostraron un buen manejo de los sistemas de representación solicitados y de sus respectivas traducciones. Sin embargo, en el objetivo 3 fue necesario ampliar el número de sesiones de dos a tres, ya que el profesor observó dificultades asociadas con la interpretación de los valores que toman las variables en el contexto de la tarea Comparación de alturas (T6). Esto implicó realizar modificaciones en la formulación de esta tarea. El cambio consistió en incluir preguntas orientadoras respecto a la comparación de las dos situaciones planteadas. De esta manera, pretendíamos que los estudiantes relacionaran los cambios en las alturas de las velas a medida que transcurría el tiempo y que justificaran sus respuestas. A continuación, presentamos estas modificaciones.

Tarea Comparación de alturas

Al hacer uso de Geogebra, se proyecta con ayuda del *video beam* la siguiente simulación para la función $f(x) = -0,25x + n$.



4. Observa los cambios que el profesor realiza en el deslizador y completa la siguiente tabla.

Función	Tiempo que tarda la vela en apagarse
$f(x) = -0,25x + 20$	
$f(x) = -0,25x + 40$	
$f(x) = -0,25x + 80$	
$f(x) = -0,25x + 10$	
$f(x) = -0,25x + 5$	

- Analiza los datos obtenidos y describe detalladamente la variación de n con respecto al tiempo que tarda la vela en apagarse.
- ¿Puede tomar n valores negativos? ¿Por qué?
- Para una nueva gráfica, ingresamos en Geogebra la función $f(x) = mx + 20$. Observa lo que ocurre al variar m y completa la siguiente tabla.

Función	Tiempo que tarda la vela en apagarse
$f(x) = -0,5x + 20$	
$f(x) = -0,75x + 20$	
$f(x) = x + 20$	
$f(x) = -1,5x + 20$	
$f(x) = -2x + 20$	

- d. ¿Qué significa m en el problema? ¿Por qué?
- e. ¿Qué ocurre en la gráfica al variar m ? ¿Por qué?
- f. Analiza los datos obtenidos y describe detalladamente la variación de m con respecto al tiempo que tarda la vela en apagarse.

Finalmente, en el anexo 10 presentamos la ficha de las tareas del diseño implementado.

5. Evaluación del diseño y la implementación

En este apartado, presentamos la evaluación del aprendizaje y la evaluación de la enseñanza del diseño de la unidad didáctica. Además, mostramos el análisis detallado de los resultados de la tarea Hallar regularidades. Por último, proponemos las mejoras al diseño.

1. Evaluación del aprendizaje

A continuación, presentamos la evaluación del aprendizaje a partir de los resultados en las dimensiones cognitiva y afectiva. Previamente, establecimos una ponderación a cada criterio de logro según su contribución a la meta de la tarea. Al resolver cada una de las tareas, los estudiantes pueden activar los criterios de logro de manera total, parcial o nula, según los errores en los que incurrir. Los resultados que muestra el sistema ACE se ven afectados por el nivel de activación de cada criterio de logro y su respectiva ponderación dentro de cada una de las tareas. En la figura 12, presentamos la ponderación de los criterios de logro del objetivo 1.

Tarea	Caminos ap.	Criterios de logro. Ponderación por cada tarea														Suma
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	1 2 3 4 9 10 11	20	20	30	10					10	5	5				100
2	3 4 5 8 9 10 11			15	20	5		5	30	5	20					100
2	3 4 6 8 9 10 11			15	20		5	5	30	5	20					100
2	3 4 7 8 9 10 11			15	20			5	5	30	5	20				100
2	3 4 9 10 11			15	30					30	5	20				100
Suma puntos según tareas en las que interviene el CL		20	20	45	33	5	5	5	5	40	10	25				212,5
		Distribución porcentual por criterio de logro en el objetivo														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Suma
		9	9	21	15	2	2	2	2	19	5	12				100

Figura 12. Ponderación de criterios de logro para las tareas del objetivo 1

En la figura 12, la ponderación más alta para la tarea Hallar regularidades corresponde al criterio de logro CdL 1.9 (expresa la relación entre variables utilizando una expresión verbal o simbólica), por relacionarse directamente con la meta de la tarea. En su orden, los criterios de logro CdL 1.4 (hallar valores del dominio y rango) y CdL 1.11 (reconoce función constante, lineal y afín) tienen una ponderación del 20 % porque contribuyen a encontrar la regularidad y a diferenciar situaciones según las subestructuras matemáticas propuestas. Presentamos las ponderaciones para los objetivos 2 y 3 en el anexo 11.

1.1. Dimensión cognitiva

Presentamos los resultados de la unidad didáctica en cuanto al logro de los objetivos y las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Logro de los objetivos de aprendizaje

En la figura 13, presentamos los resultados del examen final y su relación con la revisión de las tareas de aprendizaje para cada objetivo. Como se observa en la figura 13, la mayor diferencia de resultados se presentó en el objetivo 3, en el que la corrección de las tareas alcanzó un 68,6 % del logro, mientras el examen final obtuvo un 44,1 %. Consideramos que la diferencia en estos resultados se debe a que el tiempo de aplicación del examen no fue suficiente para que los estudiantes respondieran la totalidad de las preguntas de este objetivo. Además, encontramos que algunos estudiantes no justificaron sus respuestas ni relacionaron los resultados obtenidos con el contexto del problema.

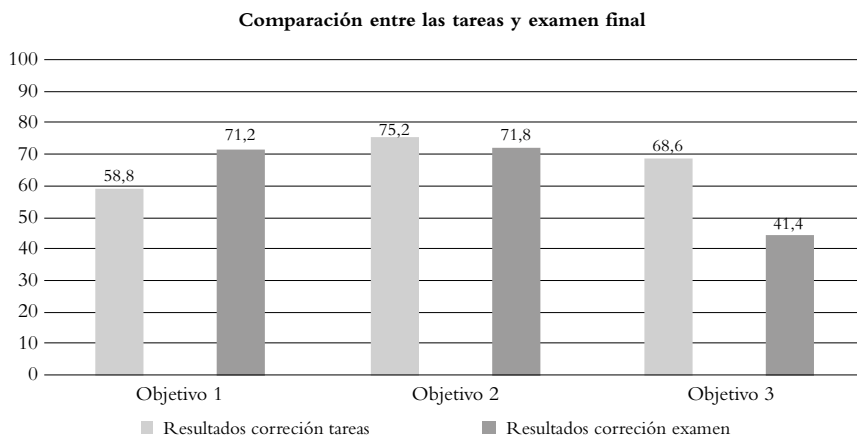


Figura 13. Comparación del porcentaje de logro entre las tareas de aprendizaje y el examen final

Por otra parte, en el objetivo 1, los estudiantes obtuvieron mejores resultados en el examen en comparación con la corrección de las tareas diarias. Consideramos que esto se debe al trabajo secuencial que se implementó en el desarrollo de los objetivos 2 y 3 que permitió que los estudiantes formularan los modelos matemáticos a partir de las situaciones presentadas.

En la tabla 8, presentamos el logro de los objetivos a partir de la contribución de cada una de las tareas. Recordamos que para los objetivos 1 y 3 formulamos dos tareas, mientras que, para el objetivo 2, formulamos tres tareas.

Tabla 8
Porcentaje de consecución del logro de los objetivos

Tareas de aprendizaje	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Promedio
Objetivo 1	65,1	54,0		58,8
Objetivo 2	61,9	81,7	81,8	75,2
Objetivo 3	63,5	73,5		68,6
Total				67,5

Como se observa en la tabla 8, el promedio global del logro de los objetivos fue del 67,5 %. Observamos que el objetivo 2 obtuvo los mejores resultados, mientras que el objetivo 1 es el de menor resultado. Al analizar con detalle los resultados del objetivo 1, encontramos que la tarea Hallar regularidades (T2) obtuvo el menor porcentaje de logro, con un 54,0 %. Esta tarea se analizará

detalladamente más adelante. Por otra parte, al analizar los criterios de logro de este objetivo, encontramos que el criterio de logro identificar variables (CdL 1.3) fue el que tuvo mayor nivel de activación, mientras que el criterio de logro con menor resultado fue reconocer las subestructuras matemáticas de las situaciones planteadas (CdL 1.11).

El promedio de consecución del objetivo 2 es el más alto de la unidad didáctica. La tarea con menor resultado fue Fórmulas de Pearson (T3). En esta tarea, la mayor dificultad para los estudiantes consistió en elaborar la gráfica cartesiana de la función (CdL 2.3) por el uso de magnitudes continuas. En este objetivo, los criterios de logro con mejores resultados fueron encontrar parejas ordenadas en la gráfica (CdL 2.9) y reconocer el valor inicial diferente de cero (CdL 2.11). El criterio con mayor dificultad fue justificar sus respuestas (CdL 2.13).

En el objetivo 3, la tarea Comparación de alturas fue la que obtuvo menor resultado por la dificultad que se presentó al describir los cambios de la gráfica al variar el parámetro m (CdL 3.11). En este objetivo, el criterio de logro con mejores resultados fue reconocer la subestructura de la función afín (CdL 3.2), mientras que la dificultad se presentó al justificar las respuestas (CdL 3.12).

Desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior

En la tabla 9, presentamos los resultados del nivel de desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales para cada objetivo.

Tabla 9
Porcentaje de desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales

	DRP	M	C	Ra	U	Re	H
Objetivo 1	80,1	26,9	50,2	46,1	49,6	27,9	0,0
Objetivo 2	85,3	82,1	82,4	79,7	87,5	80,6	88,2
Objetivo 3	88,2	65,7	70,1	97,1	45,2	45,4	86,8
Promedio	84,5	58,2	67,6	74,3	60,8	51,3	87,5

Nota. DRP = diseñar estrategias; M = matematizar; C = comunicar R = razonar y argumentar; U = usar lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = usar herramientas matemáticas

Según nuestras previsiones, el mayor número de contribuciones estaban orientadas a las capacidades de matematización, representación y comunicación. No obstante, al revisar los resultados, observamos que las capacidades

uso de herramientas (87,5 %), diseño de estrategias (84,5 %) y razonamiento y argumentación (74,3 %) son las de mayor desarrollo en la unidad didáctica.

En el objetivo 1, pese a que la capacidad de matematización era la que tenía mayor número de contribuciones, fue la capacidad con menor desarrollo (26,9 %), mientras que el diseño de estrategias fue la de mayor desarrollo (80,1 %). La capacidad uso de herramientas no se activa ya que la formulación de las tareas no requirió el uso de herramientas matemáticas. Al revisar los criterios de logro que contribuían a la capacidad de matematización, encontramos que los menores resultados fueron en CdL 1.4 y 1.9. Al analizar las tareas, encontramos que en la tarea Identificar variables, el criterio CdL 1.4 (halla valores del dominio y rango) tiene una activación total de 32,4 %. En este criterio de logro, el 23 % de los estudiantes incurrieron en el error E45 (realiza operaciones que no corresponden con el enunciado). Además, al revisar los criterios que anteceden al criterio CdL 1.4, encontramos que la formulación de la tarea no permitió que algunos estudiantes plantearan situaciones acordes con relaciones funcionales. Por otra parte, la activación total del criterio CdL 1.9 (expresa regularidades de forma verbal o simbólica) para las tareas T1 y T2 fue de 32,4 y 31,3 %, respectivamente. En la tarea Hallar regularidades, encontramos que algunos contextos no eran cercanos a los estudiantes y que algunos términos y datos fueron interpretados de forma incorrecta. Pensamos que esta es la razón por la que el 34,4 % de los estudiantes incurrió en el error E9 (incluye datos incorrectos o faltan datos en la expresión).

En el objetivo 2, el desarrollo de las capacidades matemáticas se ubicó en un rango entre el 79,7 y el 88,2 %. La capacidad uso de herramientas matemáticas fue la de mejor resultado debido a que se utilizaron recursos como la calculadora y Geogebra. Las capacidades razonamiento y representación fueron las de menor desarrollo. En cuanto a razonamiento, encontramos que en la tarea Altura de la vela, el 64,7 % de los estudiantes activó totalmente el criterio CdL 2.13 (justificar sus respuestas). En este criterio, el 32,4 % de los estudiantes incurrió en el error E30 (utiliza datos que no están involucrados en el problema para justificar su respuesta). Con respecto a la capacidad de representación, en la tarea Fórmulas de Pearson, hallamos que el 41,2 % de los estudiantes activó totalmente el criterio CdL 2.3 (elabora una gráfica a partir de una tabla). En este criterio, el 35,3 % de los estudiantes incurrió en el error E46 (utiliza una escala inadecuada) debido al trabajo con magnitudes continuas.

En el objetivo 3, las capacidades con mayor número de contribuciones fueron matematización, representación y comunicación. De estas capacidades, la de menor desarrollo fue representación, con el 45,4 %. De los criterios que contribuyen a esta capacidad, los de menor resultado fueron CdL 3.12 (argumenta sus respuestas) y CdL 3.11 (describe los cambios de la gráfica) con porcentajes de activación total del 5,8 y 29,4 % respectivamente. Particularmente, en la tarea Comparación de alturas, el 52,9 % de los estudiantes no activó el criterio CdL 3.12 y el 17,6 % no activó el criterio CdL 3.11.

Por otra parte, en la tabla 10 presentamos los resultados obtenidos para los tres objetivos y el promedio de porcentaje de contribución a los procesos matemáticos.

Tabla 10
Porcentaje del nivel de contribución de los objetivos a los procesos matemáticos

	Formular	Emplear	Interpretar
Objetivo 1	54,8	60,3	00,0
Objetivo 2	91,2	83,9	74,4
Objetivo 3	41,6	62,0	92,6
Promedio	62,5	68,7	55,6

Como se observa en la tabla 10, en el objetivo 1, el proceso formular obtuvo 54,8 % de desarrollo, por debajo del proceso emplear con el 60,3 %, a pesar de que tenía el mayor número de contribuciones. Consideramos que esto se debe a la complejidad de los contextos que no permitió que los estudiantes reconocieran la subestructura matemática. Obtuvimos los mejores resultados en el proceso de emplear debido a que los estudiantes encontraron valores del dominio y rango en las situaciones propuestas.

En el objetivo 2, el proceso con mayor desarrollo fue formular, pese a que, en las previsiones, esperábamos que fuera emplear. Sin embargo, el nivel de desarrollo del proceso emplear es considerablemente alto, con el 83,9 %. Consideramos que estos resultados pueden mejorarse al fortalecer el uso de los números decimales y la solución de ecuaciones lineales, particularmente en la tarea Fórmulas de Pearson.

Con respecto al objetivo 3, el proceso con mayor desarrollo fue interpretar, lo que coincide con las previsiones para este objetivo. Esto ocurrió gracias a los cambios realizados a la tarea Comparación de alturas (T6) durante la implementación de la unidad didáctica.

1.2. Dimensión afectiva

A continuación, presentamos los resultados del nivel de desarrollo de las expectativas de tipo afectivo y de los factores que afectan la motivación.

Expectativas de aprendizaje de tipo afectivo

En la tabla 11, presentamos el resumen del desarrollo de las expectativas afectivas para los tres objetivos.

Tabla 11
Porcentaje del nivel de desarrollo de las expectativas afectivas

	Objetivo 1			Objetivo 2			Objetivo 3		
	EA1	EA2	EA3	EA1	EA2	EA3	EA1	EA2	EA3
Criterios de logro	44,2	5,9	28,8	91,0	76,9	67,5	72,4	68,1	
Profesor	75,0		25,0	100	100	100	100	100	

Nota. EA1 = interés por modelar; EA2 = confianza para traducir los sistemas de representación; EA3 = seguridad al comunicar sus respuestas

Como se observa en la tabla 11, en el objetivo 1, el profesor no valoró la expectativa afectiva EA2, ya que los estudiantes no abordaron los sistemas de representación. Este objetivo fue el que menos contribuyó a las expectativas afectivas, ya que los estudiantes no activaron los criterios de logro CdL 1.5, CdL 1.6, CdL 1.7, CdL 1.8 y CdL 1.10, relacionados con el uso de algún sistema de representación que permitiera llegar a un modelo matemático y a la validación de la solución. Particularmente, en la tarea Hallar regularidades, los criterios CdL 1.4 (hallar valores del dominio y rango) y CdL 1.9 (expresar la regularidad) se activaron totalmente en un 28,1 y 31,3 % respectivamente. En estos criterios, el 71,9 % de los estudiantes incurrió en el error E45 (realiza operaciones que no corresponden con el enunciado) y el 34,4 % de los estudiantes incurrió en el error E9 (incluye datos incorrectos en la expresión verbal o simbólica o le faltan datos).

En el objetivo 2, obtuvimos los mejores resultados para las expectativas afectivas. La expectativa interés por modelar se desarrolló en mayor medida, dado que los estudiantes incurrieron en menos errores al activar los criterios de logro que contribuían a esta expectativa. Por otra parte, el profesor percibió durante las interacciones un gran interés de los estudiantes por resolver las tareas, razón por la cual asignó una puntuación alta.

En el objetivo 3, no se desarrolló la expectativa interés por modelar, dado que ningún criterio de logro contribuía a esta expectativa. Además, la expectativa confianza para traducir los sistemas de representación obtuvo la mejor puntuación, debido al trabajo que los estudiantes realizaron en el objetivo anterior. Por otro lado, el profesor evaluó las dos expectativas en un nivel alto, debido a que las herramientas matemáticas utilizadas en el desarrollo de las tareas facilitaron la confianza y seguridad de los estudiantes para expresar sus respuestas.

Factores que afectan la motivación

En la tabla 12, presentamos la información resumida sobre las seis variables que afectan la motivación, evaluadas por el profesor y por los estudiantes. Los datos que se presentan corresponden a la media de los resultados de las valoraciones de todas las tareas de aprendizaje de la unidad. La escala manejada es de 1 a 4.

Tabla 12

Percepción de los factores que afectan la motivación

Factores que afectan la motivación	Profesor	Estudiantes
Sabía por qué resolver la tarea	3,77	3,40
Sabía cómo hacerlo	3,50	3,41
Tema interesante	2,93	3,31
Detecté mis errores	2,73	3,44
Fue un reto motivante	3,10	3,26
Pude interactuar con los demás	3,73	3,52

En el objetivo 1, para los estudiantes, la variable “pude interactuar con los demás” obtuvo la mejor puntuación, debido a las interacciones propuestas, mientras que la variable “fue un reto motivante” obtuvo la menor valoración, ya que las situaciones propuestas fueron complejas para ellos. Por otro lado, para el profesor, la variable “detecté mis errores” presentó la menor valoración, debido a que algunos estudiantes no lograron identificar los errores en que estaban incurriendo a pesar de las ayudas implementadas.

Al revisar la estructura de la tarea Hallar regularidades y luego de la implementación, percibimos que es demasiado compleja, puesto que está

conformada por cuatro situaciones diferentes, cada una de ellas con varios ítems por solucionar. Esto generó una dificultad para resolverla en su totalidad. Por otro lado, los contextos de las situaciones no resultaron tan familiares para los estudiantes, ya que realizaron preguntas sobre palabras como “comisión” y devenga”. Debido a lo anterior, consideramos que la valoración de los estudiantes fue baja para la variable 5: “fue un reto motivante”.

Para el objetivo 2, los estudiantes valoraron con la mayor puntuación la variable “detecté mis errores”, debido a que durante el desarrollo de las tareas preguntaron al profesor algunas cuestiones que surgían en la solución de las mismas. La variable “fue un reto motivante” obtuvo la menor valoración, quizás por los contextos presentados. Por otro lado, para el profesor, la variable “sabía cómo hacerlo” obtuvo la mejor valoración, ya que el profesor proporcionó las ayudas respectivas cuando los estudiantes incurrían en algunos errores al resolver las tareas.

La fortaleza de la unidad didáctica radica en la variable “interactúa con los demás” para la mayoría de las tareas. Esto sugiere que las agrupaciones y la interacción dieron la oportunidad de cambiar la forma tradicional de desarrollar las clases, situación que los estudiantes reconocen y que incide también en la valoración alta en la variable “detecté mis errores”.

En el objetivo 3, los estudiantes valoraron con la mejor puntuación las variables “pude interactuar con los demás” y “fue un reto motivante”, debido al uso de recursos como Geogebra y simuladores. La menor percepción de los estudiantes sucedió en la variable “tema interesante”, debido a que los contextos científicos de las tareas fueron nuevos para ellos. Por otra parte, para el profesor, la variable “detecté mis errores” presentó la menor valoración, debido a que algunos estudiantes incurrieron en errores por la formulación y complejidad de las tareas.

En general, la variable “pude interactuar con los demás” fue la de mayor valoración para los estudiantes y para el profesor y la mayor contribución de esta variable se ubica en el objetivo 3. Según los resultados, la tarea Ley de Hooke fue la que obtuvo mayor valoración en esa variable. Esta tarea se caracterizó por la posibilidad de interactuar con un simulador y encontrar regularidades o relaciones entre las magnitudes implicadas en la ley de Hooke, con la singularidad que cada pareja debía elegir una constante diferente para desarrollar la tarea y luego comparar resultados. Consideramos que esta dinámica pudo incidir en la alta valoración.

2. Resultados de la tarea Hallar regularidades

En este apartado, presentamos, como ejemplo, los resultados obtenidos en la tarea Hallar regularidades (T2). Precisamos que esta tarea corresponde al objetivo 1 y fue la de menor resultado en la unidad didáctica.

2.1. Dimensión cognitiva

En la figura 14, presentamos nuevamente el grafo de criterios de logro previsto para la tarea Hallar regularidades.

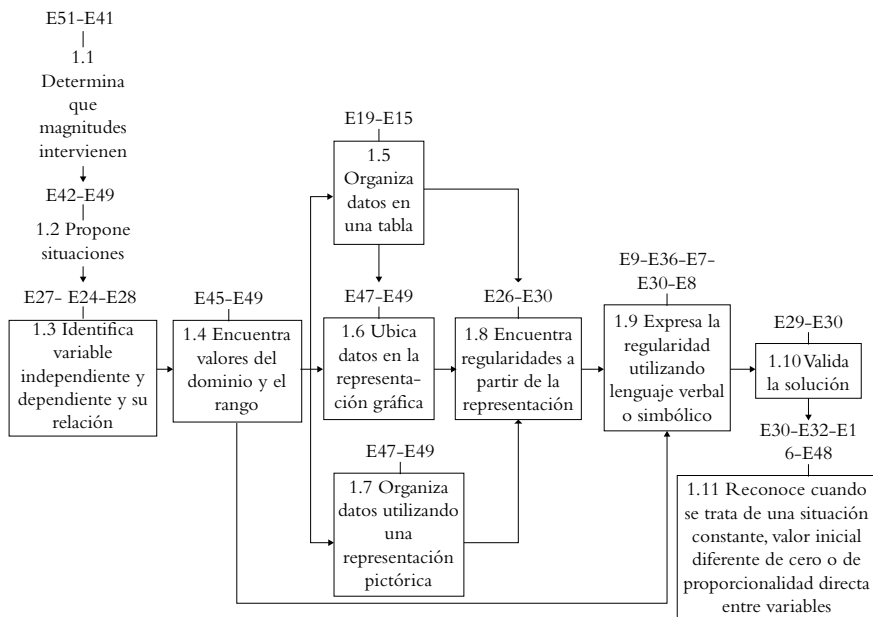


Figura 14. Grafo de criterios de logro de la tarea Hallar regularidades

Según nuestras previsiones, al resolver la tarea, los estudiantes podían activar uno de los cinco caminos de aprendizaje presentados en el grafo. Sin embargo, encontramos que solo el 65,65 % de los estudiantes activó los caminos de aprendizaje que incluyen los criterios con mayor ponderación (CdL 1.4, CdL 1.9 y CdL 1.11). Ningún estudiante activó completamente algún camino de aprendizaje, ya que no se encontró evidencia de la activación de los criterios de logro CdL 1.5, CdL 1.6, CdL 1.8 y CdL 1.10.

En cuanto al nivel de activación de los criterios de logro, encontramos que el 71,3% de los estudiantes activó total o parcialmente los criterios de logro, mientras el 26,3 % no activó los criterios de logro CdL 1.5 (organiza

datos en una tabla), CdL 1.6 (ubica datos en la representación gráfica), CdL 1.8 (encuentra regularidades a partir de una representación) y CdL 1.10 (valida la solución).

Respecto a los otros criterios, encontramos lo siguiente.

- El 96,9 % de los estudiantes activó de forma total el criterio CdL 1.3, mientras que el 62,5 % de los estudiantes activó totalmente el criterio CdL 1.11.
- El criterio CdL 1.4, fue activado de forma parcial por el 71,8% de los estudiantes y totalmente por el 28,1%.
- El criterio CdL 1.7 (utiliza una representación pictórica para relacionar datos) se activó de forma total en el 6,25 %, mientras que no se activó en el 93,75 %. Esto obedece a que solo dos estudiantes utilizaron una representación pictórica.

Por otro lado, al observar el porcentaje de errores en cada uno de los criterios de logro, observamos los resultados más significativos en el error E45 (realiza operaciones que no corresponden con el enunciado) en el que incurrieron el 71,9 % de los estudiantes. Los errores E9 (incluye datos incorrectos en la expresión simbólica) y E32 (asocia todas las situaciones con funciones lineales) obtuvieron un resultado del 34,4 %, cada uno, mientras que solo el 3,13 % de los estudiantes incurrió en el error E27 (confunde la variable dependiente con la independiente).

2.2. Dimensión afectiva

En la tabla 13, presentamos los resultados de las percepciones de los estudiantes y el profesor en cuanto a los factores que afectan la motivación.

Tabla 13
Percepción de los factores que afectan la motivación

Factores que afectan la motivación	Profesor	Estudiantes
Sabía por qué resolver la tarea	4	3,3
Sabía cómo hacerlo	4	3,2
Tema interesante	2	3,0
Detecté mis errores	3	3,2
Fue un reto motivante	3	2,9
Pude interactuar con los demás	4	3,4

En la tabla 13, observamos que la percepción de los factores que afectan la motivación de los estudiantes y del profesor en su mayoría es alta (entre 2,5 y 3,4). Sin embargo, las valoraciones de los estudiantes son más bajas respecto a las del profesor. Además, la variable “tema interesante” fue la más baja para el profesor, dado que observó que los estudiantes no comprendieron totalmente los contextos de las tareas debido a la complejidad del lenguaje utilizado en algunas de ellas. Por otro lado, para los estudiantes la variable “pude interactuar con los demás” obtuvo la mayor valoración en su percepción, ya que la actividad se realizó en grupo y la puesta en común permitió debatir sus respuestas.

3. Evaluación de la enseñanza

En este apartado, presentamos el consolidado de las debilidades y fortalezas de la unidad didáctica detectadas a partir del análisis de los resultados. Esta información fue el insumo para la propuesta de mejoras del nuevo diseño.

3.1. Dimensión cognitiva

A continuación, describimos el listado de las debilidades que identificamos.

- En la formulación de la tarea Hallar regularidades del objetivo 1, no solicitamos hallar valores del dominio y rango. Esta es la razón por la que el criterio de logro CdL 1.4 obtuvo una activación total de tan solo el 32,4 %.
- Los estudiantes no activaron los criterios de logro CdL 1.5, 1.6 y 1.7 que hacen referencia a los sistemas de representación tabular, gráfico y pictórico, respectivamente. Esto se debe a que, en la formulación de la tarea 2 del objetivo 1, faltó incluir un ítem que solicitara utilizar un sistema de representación para consolidar un modelo simbólico o verbal.
- El bajo resultado en la tarea del examen correspondiente al objetivo 3 (44.1%) nos sugiere que la extensión y el tiempo previsto en la implementación del examen fue insuficiente.
- Los resultados en los criterios de logro CdL 3.12 (argumenta sus respuestas) y CdL 3.11 (describe los cambios de la gráfica) fueron bajos. En particular, en la tarea Comparación de alturas, el 52,9 % de los estudiantes no activó el criterio de logro CdL 3.12 y el 17,6 % no activó el criterio de logro CdL 3.11. Con respecto a la representación, en la tarea Fórmulas de Pearson, observamos que el criterio de logro CdL 2.4 se

activó en un 41,2%. Los estudiantes incurrieron en el error E43 (utiliza una escala inadecuada) debido al trabajo con números decimales. Faltó incluir en la tarea diagnóstica ítems asociados a la interpretación de resultados y al uso del plano cartesiano con variables continuas.

Por otra parte, las fortalezas encontradas son las siguientes.

- Las puestas en común realizadas en gran grupo después de aplicadas las tareas del objetivo 1 y las ayudas implementadas antes del examen contribuyeron a mejorar el logro del objetivo 1 en el examen en relación con las tareas.
- La estructura de los elementos de las tareas del objetivo 2, que incluyen diversos contextos y el uso de recursos como Geogebra, permitió que este objetivo alcanzara el mejor logro.
- El uso de herramientas matemáticas en las tareas del objetivo 3 posibilitó que los estudiantes se centraran en el proceso de interpretar y fortalecieron la capacidad matemática fundamental de comunicación.

3.2. Dimensión afectiva

En la dimensión afectiva, encontramos que la formulación de la tarea 1 del objetivo 1 no contribuyó significativamente al desarrollo de la expectativa EA1 (interés por modelar) debido a la complejidad del lenguaje utilizado. En los factores que afectan la motivación, las variables que se deben fortalecer son “tema interesante” y “reto motivante”, específicamente en las tareas del objetivo 1, según la percepción de los estudiantes.

Respecto a las fortalezas, hallamos que las tareas del objetivo 2 contribuyeron significativamente al uso de diferentes sistemas de representación y sus traducciones, de manera que potenciaron la EA3 (seguridad del estudiante al comunicar sus respuestas). En los factores que afectan la motivación, la fortaleza se encontró en los resultados de la variable “interactúa con los demás”, en la mayoría de las tareas. Esto sugiere que las agrupaciones y la interacción dieron la oportunidad de cambiar la forma tradicional de desarrollar las clases, como lo reconocieron los estudiantes y lo manifestaron en la valoración alta de la variable “detecté mis errores”.

3.3. Aspectos por mejorar y potenciar

Según los resultados obtenidos en las dimensiones cognitiva y afectiva, concluimos que un aspecto por mejorar de la unidad didáctica corresponde a la

formulación de las tareas del objetivo 1. Encontramos que, en este objetivo, los estudiantes no activaron los criterios de logro relacionados con el uso de los sistemas de representación y la validación de los resultados obtenidos, debido a que la formulación de las tareas no lo solicitaba explícitamente.

Además, encontramos que una debilidad de la unidad didáctica fue el bajo desarrollo de las expectativas afectivas en el objetivo 1, ya que el lenguaje utilizado en las tareas de este objetivo fue difícil de entender para los estudiantes. En particular, la tarea Hallar regularidades tenía mucha información que no permitió que los estudiantes comprendieran en su totalidad los contextos descritos. También, consideramos que faltó hacer mayor énfasis en la contextualización de la tarea Altura de la vela por ser la primera en la que se utilizaba Geogebra.

Finalmente, en cuanto a los factores que afectan la motivación, las percepciones de los estudiantes y el profesor difieren en pocas variables. Sin embargo, la variable “tema interesante” es la de menor valoración, lo que debe ser potenciado cuando se planteen las modificaciones.

6. Nuevo diseño

En este apartado, describimos el nuevo diseño de la unidad didáctica y justificamos las mejoras a partir del análisis de los resultados presentados en el apartado anterior.

1. Descripción y justificación

Los principales cambios al diseño implementado se enfocaron en modificaciones a la tarea diagnóstica, a las tareas de aprendizaje del objetivo 1 y al examen final. Adicionalmente, los tiempos de implementación de algunas tareas se ajustaron al tener en cuenta las situaciones presentadas durante la implementación. Presentamos la versión final de las fichas de las tareas en el anexo 12.

1.1. Ajustes a la tarea diagnóstica

En esta tarea, incluimos ítems que permitieran evidenciar el nivel de interpretación de gráficas y la argumentación. Además, adicionamos ayudas relacionadas con la ubicación en el plano cartesiano de coordenadas (especialmente cuando las coordenadas están expresadas en números racionales) y

la interpretación de gráficas lineales. Estos cambios obedecen a los resultados obtenidos en las tareas de los objetivos 2 y 3.

Por un lado, en la tarea Fórmulas de Pearson, el 35,3 % de los estudiantes incurrió en el error E46 (utiliza una escala inadecuada) debido al trabajo con números racionales. Por otro lado, en las tareas del objetivo 3, encontramos que el 47,1 % de los estudiantes incurrió en el error E73 (sus argumentos son incoherentes) y el 35,3 % incurrió en el error E29 (relaciona las variables con magnitudes incorrectas cuando justifica sus respuestas). Presentamos la versión de la nueva tarea diagnóstica en el anexo 13.

1.2. Ajustes a las tareas de aprendizaje del objetivo 1

Durante el desarrollo de las tareas del objetivo 1, encontramos que la formulación de la tarea 1 no permitió una mayor valoración de la expectativa EA1 (interés por modelar) debido a la complejidad del lenguaje utilizado. Por esta razón, decidimos modificar las fichas utilizadas en la tarea, de manera que el lenguaje utilizado fuese más sencillo. Adicionalmente, incluimos un ítem que solicita hallar valores del dominio y rango, de manera que se facilite hallar la regularidad entre las variables.

La tarea 2 presenta el mayor número de criterios de logro no activados. Estos, en su mayoría, corresponden al uso de los sistemas de representación, debido a que la tarea no solicitaba explícitamente que los estudiantes los utilizaran. Esto influyó en la baja contribución a la expectativa afectiva EA2 (confianza para traducir diferentes sistemas de representación). Consideramos necesario que los estudiantes utilicen al menos un sistema de representación para facilitar la activación del criterio de logro CdL 1.8 (encuentra regularidades a partir de una representación). Por esta razón, en la formulación, solicitamos utilizar un sistema de representación para consolidar un modelo simbólico o verbal. Además, decidimos incluir un ítem que solicite al estudiante validar sus respuestas, de manera que active el criterio de logro CdL 1.10 y reconozca posibles errores en criterios de logro anteriores.

Por otra parte, la variable “fue un reto motivante” presentó una baja valoración, ya que algunos contextos de esta tarea no fueron familiares para los estudiantes. Algunos términos como “comisión” y “salario devengado” eran desconocidos para ellos. Por esta razón, revisamos la formulación de esta tarea al ajustar el lenguaje utilizado en cada una de las situaciones propuestas para abordar las tres subestructuras matemáticas.

1.3. Ejemplo de mejora

A continuación, describimos algunos elementos de la tarea modificada Hallar regularidades. Es importante indicar que la meta y el agrupamiento no se modificaron, razón por la cual no se incluyen en la siguiente descripción.

Requisitos

Los estudiantes deben identificar datos relevantes del problema e identificar variables y sus relaciones. Además, deben saber resolver operaciones entre números reales y manejar el software Geogebra.

Formulación

Tarea Hallar regularidades

Analiza y resuelve cada una de las siguientes situaciones. Utiliza una representación para organizar los datos.

Situación 1. Ana trabaja como vendedora del periódico *El Colombiano*. Sus ingresos dependen de un salario básico de \$5000 diarios que se incrementa con base en las ventas que realice de este periódico. Si por cada periódico vendido obtiene una comisión de \$700, ¿cuánto dinero recibe en un día si realiza 5, 10 o 16 ventas?

Con el cambio de administración de la empresa, se propone una nueva forma de pago. Ana ganará \$800 por cada periódico vendido. ¿Cuánto dinero recibe en un día si vende 10, 20 o 26 periódicos?

Situación 2. Un plan de telefonía tiene un cargo fijo mensual de \$30.900 que incluye 270 minutos para hablar a cualquier destino móvil o fijo nacional. Si se consumen todos los minutos antes de terminar el mes, el valor por minuto adicional es de \$400.

¿Cuánto debe pagar si consume 100, 150 o 200 minutos?

Si se excede en 5, 10, 20 minutos adicionales, ¿cuánto pagará en cada caso?

Situación 3. La entrada al concierto de One Direction cuesta \$350.000 por persona.

¿Cuánto pagarán Andrea y sus cuatro amigas para ingresar al concierto?

Si el grupo de fans es de 124 personas, ¿cuánto pagará el grupo de fans para ingresar al concierto?

El profesor realiza la explicación de la relación que existe entre las situaciones trabajadas y el concepto de función. Posteriormente, pide a los

estudiantes encontrar una expresión que permita establecer la relación entre las variables en cada una de las situaciones y validar cada expresión para todos los valores pedidos.

Luego, solicita a los estudiantes utilizar Geogebra específicamente la herramienta de “Hoja de cálculo”, en la cual deben ingresar los valores de una de las situaciones. Los estudiantes deben validar la información mediante la herramienta de “Análisis de regresión de dos variables” y la opción de “Modelo de regresión lineal”. En la pantalla aparecen las representaciones simbólica y gráfica.

Finalmente se realiza la puesta en común en gran grupo, al tener en cuenta las siguientes preguntas orientadoras.

- a. ¿Qué diferencias encuentras en el salario de Ana, antes y después del cambio de administración?
- b. ¿Qué similitudes encuentras entre la situación del salario de Ana (literal b) y el cargo fijo mensual del plan de celular? ¿Cómo llamarían a las funciones en las que se mantiene fijo uno de los valores, sin importar que varíe el otro?
- c. ¿En qué otras situaciones encuentras similitudes?

Materiales y recursos

Los recursos que utilizaremos son guías, Geogebra y *video beam*.

Interacción

La comunicación predominante es entre estudiantes. El profesor estará orientando la actividad, de manera que resolverá inquietudes y, al final, dirigirá la puesta en común de los resultados. Para esto, el profesor presentará en el *video beam* las representaciones simbólica y gráfica de la función. Además, el profesor indagará acerca de las diferencias entre las subestructuras presentes en las situaciones planteadas.

Temporalidad

La sesión se desarrolla de la siguiente manera: 15 minutos para la realimentación de la tarea anterior, 5 minutos para la puesta en común del grafo de criterios de logro de la tarea, 35 minutos para el desarrollo de la guía en grupos, 10 minutos para la intervención del docente, 20 minutos de verificación en Geogebra y, finalmente, 15 minutos de diligenciamiento del diario del estudiante.

1.4. Ajustes al examen final

Consideramos que una de las razones para que los resultados del examen en el objetivo 3 fueran bajos (44,1 %) radicó en que el tiempo previsto fue insuficiente para que los estudiantes alcanzaran a desarrollar la tarea en su totalidad. Por ello, consideramos conveniente reducir la extensión del examen y tener cuidado de no ignorar aspectos relevantes de la unidad didáctica (véase anexo 14). También, decidimos ajustar la rúbrica del examen de manera que sea evidente la relación entre los errores y los criterios de logro activados. Con esto, pretendemos que la rúbrica sea un instrumento más claro en el momento de valorar el alcance de los logros (véase anexo 15).

1.5. Ajustes a las expectativas de aprendizaje

Una dificultad que encontramos en el objetivo 1 fue que se pretendió abarcar relaciones de costos y magnitudes físicas en tan solo dos sesiones de clase. Por esta razón, decidimos reformular el objetivo, al limitarlo solamente a situaciones de costos. El objetivo modificado quedó planteado como “Formular modelos que describan situaciones de variación de costos, utilizando funciones constante, lineal y afín”. El grafo de criterios de logro no fue modificado ya que este cambio solo implica la revisión de los contextos en los que se definen las situaciones planteadas. Por otra parte, no se modificaron los objetivos 2 y 3 de la unidad didáctica.

1.6. Inclusión de nuevos errores

Al corregir las tareas, surgieron nuevos errores que nos permitieron evaluar con mayor precisión la activación de algunos criterios de logro. La mayor cantidad de errores nuevos aparecieron en el objetivo 3: reconoce que las variables pueden tomar valores negativos pero los justifica incorrectamente en el contexto del problema (E71), llega a conclusiones incorrectas (E72) y asocia incorrectamente una de las coordenadas cuando lee la gráfica (E90), entre otros.

2. Secuencia de tareas

El nuevo diseño que proponemos responde a las modificaciones realizadas luego de la implementación y el análisis de datos. En la tabla 14, presentamos la estructura del nuevo diseño de la unidad didáctica. En la secuencia de tareas presentada en la tabla 14, consideramos que cada tarea de aprendizaje se desarrolle en una sesión de clase (110 minutos). Resaltamos que el orden

en el desarrollo de las tareas no cambió porque no encontramos evidencias de debilidades en este aspecto.

Tabla 14
Descripción de la secuencia de tareas

S	T	Metas	CMF	Proceso matemático	EA	Tiempo (min)
Objetivo 1 Formular modelos que describan situaciones de variación de costos, utilizando funciones constante, lineal y afín						
1	T1	Identificar las magnitudes y variables que intervienen en situaciones de costo y reconocer relaciones de dependencia entre ellas	Matematización	Formular	EA1	110
2	T2	Expresar la regularidad entre variables utilizando una expresión verbal o simbólica	Matematización	Formular	EA1	110
Objetivo 2: Emplear los sistemas de representación gráfico, simbólico, tabular y numérico de las funciones constante, lineal y afín para dar respuesta a un problema						
3	T3	Realizar traducciones entre los sistemas de representación simbólico, numérico, tabular y gráfico	Representación	Emplear	EA2	110
4	T4	Realizar traducciones entre los sistemas de representación gráfico, numérico, tabular y simbólico	Representación	Emplear	EA2	110
5	T5	Realizar traducciones entre los sistemas de representación gráfico, numérico, tabular y simbólico	Representación	Emplear	EA2	110
Objetivo 3: Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín						
6	T6	Describir los cambios que presenta la gráfica de una función al variar los parámetros m y n , encontrando argumentos válidos para justificar sus respuestas dentro de modelos de función lineal y afín	Matematización Representación	Emplear Interpretar	EA2 EA3	110
7	T7	Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín	Matematización comunicación	Interpretar	EA2 EA3	110

Nota. S = sesión; T = Tareas; T1 = Identificar variables; T2 = Hallar regularidades; T3 = Fórmulas de Pearson; T4 = Ciclorruta; T5 = Altura de la vela; T6 = Comparación de velas; T7 = Ley de Hooke; CMF = capacidades matemáticas fundamentales; EA1 = desarrollar el interés por modelar problemas utilizando las funciones constante, lineal y afín; EA2 = desarrollar confianza en las propias habilidades para traducir diferentes sistemas de representación de las funciones constante, lineal y afín; EA3 = adquirir seguridad para comunicar sus argumentos en relación con la solución de un problema asociado a la función constante, lineal o afín

7. Conclusiones

En este capítulo, presentamos un procedimiento sistemático y riguroso que nos permitió diseñar, implementar y analizar los resultados obtenidos por los estudiantes al abordar el tema Función constante, lineal y afín. Además, este procedimiento, que corresponde al análisis didáctico, nos permitió evaluar la planeación de la unidad didáctica mediante un proceso que se realimentó continuamente. Los resultados obtenidos dan cuenta del proceso de aprendizaje de los estudiantes con un nivel de detalle adecuado; por ejemplo, pudimos identificar el nivel de activación de los criterios de logro y los errores en los que los estudiantes incurrieron con más frecuencia. Además, pudimos plantear cambios a la planeación que habíamos previsto inicialmente, al identificar posibles aspectos para mejorar y potenciar, de manera que a futuro se puedan lograr mejores resultados y se afinen los instrumentos y procedimientos.

Los instrumentos utilizados para la recolección de la información, además de ser novedosos y llamativos, contribuyeron a que los estudiantes realizaran un análisis consciente de su proceso de aprendizaje en cuanto a sus avances y dificultades. En particular, el matematógrafo, que hace parte de la dimensión afectiva de los diarios del profesor y del estudiante, da cuenta de aspectos que en la cotidianidad no se valoran en el aprendizaje de las matemáticas escolares.

Por otra parte, a partir del análisis didáctico, identificamos que la mayor fortaleza en el diseño de la unidad didáctica correspondió al logro del objetivo 2, dado que los elementos de las tareas de este objetivo incluyen diversidad de contextos, materiales y herramientas matemáticas. Por otro lado, en las tareas del objetivo 3, el uso de herramientas matemáticas posibilitó que los estudiantes se centraran en el proceso de interpretar, para facilitar el desarrollo de la capacidad matemática comunicación.

En cuanto a la evaluación del diseño implementado, encontramos que, en el aspecto cognitivo, una fortaleza de la unidad didáctica fue el 75,2 % de logro alcanzado en el objetivo 2: “Emplear diferentes sistemas de representación de la función constante, lineal y afín para dar respuesta a un problema”. Esto permitió evidenciar las habilidades de los estudiantes para utilizar diferentes sistemas de representación en el tema abordado. Además, las tareas de este objetivo contribuyeron significativamente al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales en un porcentaje superior al 79,7 % y a los procesos matemáticos en un porcentaje superior al 74,4 %. Por otra parte, en el aspecto afectivo, a partir de los diarios del profesor y del estudiante, detectamos

como fortalezas del diseño de la unidad didáctica los agrupamientos y las interacciones propuestas en las tareas y el uso de recursos como Geogebra.

La mayor debilidad de la unidad didáctica se centró en los bajos resultados obtenidos en las tareas del objetivo 1. Obtuvimos un 58,8 % de logro del objetivo 1: “Formular modelos que describan situaciones de variación de costos y relaciones entre magnitudes físicas, utilizando funciones constante, lineal y afín”. A partir de estos resultados, evidenciamos deficiencias en la formulación de las tareas Identificar variables (T1) y Hallar regularidades (T2), lo que nos permitió proponer ajustes de mejora al diseño de la unidad didáctica. Esperamos que estos cambios contribuyan significativamente al éxito en la implementación del diseño final propuesto, dado que hemos seguido con rigurosidad las técnicas de análisis de los resultados obtenidos en el diseño implementado.

Por último, consideramos que la experiencia vivida en estos dos años de formación en MAD 3 nos brindó importantes herramientas para el mejoramiento y cualificación en nuestra práctica docente. El trabajo en equipo nos permitió considerar varias miradas sobre el mismo objeto y posibilitó la realización de reflexiones y disertaciones profundas sobre la importancia de los análisis realizados en este capítulo.

Con esta experiencia, podremos experimentar en el aula de clase profundas transformaciones en la enseñanza de las matemáticas escolares. En particular, respecto a la planeación de la enseñanza, valoramos la incorporación de aspectos como las expectativas de aprendizaje de nivel superior propuestas en el marco conceptual de las pruebas PISA, la delimitación del tema de las matemáticas escolares al tener en cuenta su fenomenología y la diversidad de contextos, y el uso de recursos y materiales que incentiven la motivación de los estudiantes al abordar las tareas de aprendizaje, entre otros.

8. Referencias

- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Colegio Villemar el Carmen (2014). *Campo matemático: Villemaristas líderes en comunicación, convivencia y participación*. Documento no publicado. Bogotá: Autor.

- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 97-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias*. Descargado el 30/1/2014, de <https://goo.gl/IaJzV9>.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/bljb3wd>.
- Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá: Universidad de los Andes.

9. Anexos

A continuación, presentamos el listado de anexos. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8703/>.

Anexo 1. Listado de capacidades

Presentamos el listado de capacidades.

Anexo 2. Listado de dificultades y errores

Presentamos el listado de errores y dificultades.

Anexo 3. Descripción del objetivo 2 y 3

Describimos la caracterización de los objetivos 2 y 3 a partir de sus grafos de criterios de logro.

Anexo 4. Contribuciones de los criterios de logro a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

Presentamos las contribuciones de los criterios de logro a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Anexo 5. Ficha de tareas de aprendizaje del diseño previo

- Presentamos la ficha de las tareas del diseño previo y los grafos iniciales con su respectiva descripción.
- Anexo 6. Ficha de la tarea diagnóstica previa a la implementación
Presentamos la ficha de la tarea diagnóstica y el listado de ayudas para superar las dificultades encontradas.
- Anexo 7. Examen final previo a la implementación
Presentamos el examen final.
- Anexo 8. Instrumentos de recolección de información. Diarios del profesor
Presentamos la versión final de los diarios del profesor.
- Anexo 9. Instrumentos de recolección de información. Diarios del estudiante
Presentamos la versión final de los diarios del estudiante.
- Anexo 10. Ficha de tareas del diseño implementado
Presentamos la ficha de las tareas implementadas.
- Anexo 11 ponderaciones de los objetivos 2 y 3
Presentamos las ponderaciones a los criterios de logro del objetivo 2 y 3.
- Anexo 12. Ficha de las tareas para futuras implementaciones
Describimos la ficha de las tareas del nuevo diseño de la unidad didáctica.
- Anexo 13. Versión nueva de la tarea diagnóstica
Presentamos la nueva ficha de la tarea diagnóstica y el listado de ayudas actualizado.
- Anexo 14. Examen final futuras implementaciones
Presentamos el examen final para futuras implementaciones.
- Anexo 15. Rubricas examen final
Presentamos las rúbricas utilizadas para la revisión y evaluación del examen final.