TAREAS PROTOTÍPICAS PARA EL DISEÑO PREVIO DEL TEMA FUNCIÓN EXPONENCIAL CRECIENTE

Este documento contiene las tareas prototípicas que caracterizan los grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje del tema función de crecimiento exponencial del grupo 6 de MAD 3. Las tareas prototípicas son las tareas matemáticas representativas del objetivo. Si los estudiantes logran resolver el conjunto de tareas prototípicas de un objetivo, entonces el profesor considera que los estudiantes han logrado el objetivo de aprendizaje.

1. TAREAS PROTOTÍPICAS

A continuación, mostramos las tareas prototípicas asociadas a los objetivos de aprendizaje.

Tarea prototípica 1.1. Población de conejos

Imagínate que en un parque natural tenemos una pareja de conejos. Es el 1 de enero. Ahora imagina que la población de conejos se duplica cada día. ¿De qué forma representarías esta situación? De manera que en la nochevieja de este año los conejitos cubren toda la extensión del parque natural. La pregunta es: si el 31 de diciembre todo está lleno de conejitos, ¿qué día estará el parque medio lleno? Imagina que tú fueras uno de esos conejitos. O, mejor aún, el jefe de todos esos conejitos. La pregunta es: ¿En qué día del año el parque parece tener ya demasiados conejos? El día de Navidad el parque solo está ocupado por conejitos en menos de un 2% de su extensión, pese a que empezamos el 1 de enero anterior. Pero en Nochevieja de ese mismo año, menos de una semana después, ya no cabrá un solo conejo más. Si tú fueras un conejito, repito, ¿te sentirías preocupado el día de Navidad? O creerías más bien que el problema, si acaso existe, es de índole menor.

Tarea prototípica 1.2. La leyenda de Sissa[1]

El ajedrez es un juego antiquísimo, cuenta con muchos siglos de existencia. El juego está ligado a muchas leyendas cuya veracidad es difícil comprobar debido a su antigüedad. Para comprenderlas no hace falta saber jugar al ajedrez, basta simplemente saber que el tablero donde se juega está dividido en 64 casillas negras y blancas, dispuestas alternativamente. Lea a continuación una de estas leyendas.

El juego del ajedrez fue inventado en la India. Algunos historiadores hindúes mencionan un rey llamado Iadava dueño de la provincia de Taligana. Los documentos que lo nombran son muy antiguos e imprecisos. No obstante, se refieren a él como uno de los monarcas más generosos y ricos de su tiempo, poseedor de una singular aptitud militar, que le permitió elaborar un plan de batalla y resultar victorioso al repeler al frente de un pequeño ejército, un insólito y brutal ataque del aventurero Varangul. Pero en el que perdió la vida su hijo, el príncipe Adjamir.

Encerrado en sus habitaciones invadido por la tristeza que le causaba la pérdida de su hijo en los campos de batalla, el rey pasaba día tras día, trazando sobre una gran caja de arena, las diversas maniobras realizadas por las tropas durante el asalto. El rey apenas completaba el cuadro de los combatientes con todos los detalles que pudiera evocar, borraba todo y comenzaba otra vez, empecinado en encontrar el error o los errores, que le costaron la vida a su hijo.

Un día, finalmente, fue conducido ante el rey, un joven, pobre y modesto, quien dijo venir de tierras lejanas y traer como regalo, un juego que había inventado, con el único fin de que pudiera distraerlo y abrir en su corazón las puertas a nuevas alegrías. Lo que Sissa traía al rey Iadava consistía en un gran tablero cuadrado, dividido en 64 cuadritos iguales. Sobre ese tablero se colocaban dos colecciones de piezas, que se distinguían unas de otras por el color, blancas y negras.

El monarca aprendió en pocas horas las reglas del juego, así consiguió derrotar a sus visires en partidas que se desenvolvían impecablemente sobre el tablero. En determinado momento, el rey notó que la posición de las piezas reproducía exactamente la batalla de Dacsina. Sissa le hizo notar que, para conseguir la victoria, era necesario el sacrificio de la pieza, que, con su posición reproducía la posición del príncipe Adjamir.

El rey quiso demostrar su agradecimiento exigiendo a Sissa pedir una recompensa digna de su regalo. Sissa dijo entonces: dadme un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, 16 por la quinta, y así duplicando sucesivamente hasta la sexagésima cuarta y última casilla del tablero. ¡Insensato! -exclamó con enfado, el rey-. La recompensa que me pides es ridícula, pero no insistiré más, y ya que mi palabra fue empeñada, ordenaré a los matemáticos de la corte calcular la porción de trigo, para que el pago se haga inmediatamente, conforme a tu deseo.

Rey magnánimo, declaró, poco después, el más sabio de los geómetras, no depende de tu voluntad el cumplir semejante deseo. La magnitud del número de granos de trigo, es inconcebible para la imaginación humana. Si deseas entregar sin falta la recompensa prometida, ordena que todos los reinos de la tierra se conviertan en labrantíos, manda desecar los mares y océanos, ordena fundir el hielo y la nieve que cubren las tierras lejanas del norte. Que todo el espacio sea totalmente sembrado de trigo y ordena que toda la cosecha obtenida en estos campos sea entregada a Sissa. Cuál es

[1] Consultado el 22 de enero de 2015 en: Htttps://cuentosdelmundo.wordpress.com/2013/10/08/la-leyenda-de-sisa-el-origen-del-ajedrez/

esa cifra tan monstruosa, dijo reflexionando, y asombrado el rey -¡Oh soberano! 18.446.744.073.709.551.615 (dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil, setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince).

Esta es la leyenda, no se puede asegurar, que en realidad haya sucedido lo que se ha contado. Sin embargo, la recompensa de que habla la leyenda se expresa por ese número. Esto puede comprobarse al sumar las cifras 1+2+4+8+16+. . . +, etc. correspondiente a cada una de las casillas, puede verificarse también, que el volumen aproximado que ocuparía la recompensa sería de 12.000 km^3. Si el granero tuviera 4 metros de alto por 10 metros de ancho, su longitud habría de ser de 300.000.000 kilómetros. Es decir, el doble de la distancia que separa a la tierra del sol.

Cuestionario Interpretación

En esta actividad no realizaremos el cálculo para hallar la cantidad de trigo total que recibiría Sissa. Sin embargo, si trataremos de responder las siguientes preguntas, para acercarnos poco a poco a nuestro tema.

¿Qué tipo de regularidad se puede identificar en el anterior ejercicio?

Muestre en un modelo el procedimiento para determinar cuántos granos de trigo recibiría Sissa por la 5ª casilla

Explique mediante el modelo anterior el procedimiento para hallar la cantidad de granos en cualquiera de las casillas del tablero

Tarea prototípica 2.1. Predicción de su futuro financiero[2]

La capacidad de predecir el futuro es una tarea de gran valor cuando se trata de dinero. ¿Quién iba a adivinar que el gas podría cuadruplicar su precio en un lapso de diez años? Hacer predicciones acerca de los precios futuros del gas es una tarea casi imposible, cuando se invierte el dinero en una cuenta bancaria, el valor futuro se puede predecir con un alto grado de certeza.

Por ejemplo, suponga que tiene $2,000 y los ocultaba debajo de su colchón por 40 años. Al final de 40 años, todavía tendría $2.000. Sin embargo, si usted hubiera invertido en un banco a un interés tasa del 4,5% anual, tendría más de $12,000 al final de los 40 años. ¿Cómo es esto posible?

La respuesta es el interés compuesto, que funciona de la siguiente manera. El dinero se invierte en primer lugar. A continuación, a intervalos regulares (por ejemplo, mensual, trimestral, anual), el interés se otorga a la cuenta y se convierte en capital del inversor. De esta forma, los intereses ganados se devengan de los intereses previamente ganados, en otras palabras, el interés es compuesto.

La tabla 1 muestra los saldos bancarios para una inversión de 100 dólares que gana 3% de interés cada año, completa la tabla.

[2] Illuminations: resources for teaching math. Consultado el 20 de enero de 2015 en: http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=2765

Tabla 1
Completa la tabla

Años de inversión en el banco	Balance al inicio del año en curso	Interés ganado por año (3%)	Balance al final del año en curso
1	100.00	3.00	103.00
2	103.00	3.09	106.09
3			
4			
5			

La tabla 2 es igual que la tabla anterior, pero utiliza la notación algebraica. Completa esta tabla y trabaja con un compañero de clase, desarrolla una fórmula que podría ser utilizada para encontrar la cantidad ahorrada en el banco en cualquier año hacia el futuro.

Tabla 2
Tabla con notación algebraica

Años de inversión en el banco	Balance al inicio del año en curso	Interés ganado por año (3%)	Balance al final del año en curso	
			Balance previo + Interés	Valor simplificado
1	P	0.03P	P+0.3P	P*(1.03)
2	P*(1.03)	0.03[P*1.03)]	P*(1.03)+ 0.03[P*1.03)]	
3				
4				
5				

La fórmula para calcular el monto en el banco para cualquier año es $A = (1 + r)^{i}$, donde t = número de años que la inversión ha estado en el banco, P = el importe inicial invertido, y r = el tipo de interés expresado como un decimal.

Use la fórmula para calcular el valor de la inversión inicial de $2,000 después de 40 años a una tasa de interés del 3% si no se realizan aportes mensuales adicionales.

Consideremos ahora, ¿qué pasaría si el banco cobra el interés cuatro veces al año, o dos veces año? La fórmula se cambia a $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ donde n es el número de veces por año que la cantidad es compuesta (recuerde que estas fórmulas son para las situaciones en las cuales el inversor no ha pagado dineros adicionales).

En la fórmula $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Use esta nueva fórmula para calcular el valor de una inversión original de 2.000 dólares después de 40 años a una tasa de interés del 3% si el interés es compuesto de cuatro veces al año y si no se hacen contribuciones mensuales adicionales.

Revise la respuesta a la pregunta 3a si es mayor que la cantidad calculada para la pregunta 1 donde se invirtieron los mismos 2.000 dólares por 40 años a un interés del 3% de interés compuesto anual. ¿Por qué?

Tarea prototípica 2.2. Cultivo de bacterias

Se tiene un cultivo de bacterias en un laboratorio y se sabe que su crecimiento es exponencial. El conteo del cultivo de bacterias fue de 800 después de 1 minutos y 1280 después de 2 minutos.

¿Utilice los datos suministrados para para representar el crecimiento del cultivo de bacterias?

¿Cuántas bacterias hay después de 5 minutos?

¿Después de cuánto tiempo el número de bacterias será de 10000?

Asimismo, relacionamos las tareas prototípicas del tercer objetivo.

Tarea 3.1 Deforestación en el amazonas

Muchas personas se preocupan por la deforestación de la selva amazónica. La deforestación puede tener implicaciones ambientales severas. Los científicos usan datos para analizar la tasa de deforestación. En 1982 Philip M. Fearnside publicó un artículo titulado *¿La deforestación en la Amazonia brasileña? ¿Qué tan rápido crees que se produzca?*[3] Fearnside utiliza los datos disponibles para concluir que en algunos estados brasileños la deforestación del bosque tropical se estaba produciendo a un ritmo exponencial.

Lea el artículo,[4] analice los datos, y critique la conclusión de Fearnside. Incluya lo siguiente en su crítica: i) un análisis de la utilidad de los datos; ii) cualquier mejora que podría sugerir; iii) una tasa de estimación de la deforestación sobre la base de los datos dados, que se muestran en la tabla 8; y iv) qué estimación puede hacerse utilizando la ecuación 4 del artículo: $r = \frac{\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{t}$

Tabla 3
Deforestación en el amazonas

AÑO	**Área en kilómetros cuadrados del amazonas despejada**
1975	28595,25
1978	77171,75

[3] Fearnside, P. M. (1982). Deforestation in the Brazilian Amazon: How fast is it ocurring? Interciencia 7(2): 82-85. Consultado el 21 de enero de 2015 en: http://www.ciesin.columbia.edu/docs/002-110/002-110.html

[4] El artículo se encuentra como anexo al final del documento o lo puede descargar de: http://www.ciesin.columbia.edu/docs/002-110/002-110.html

En base a la lectura, lleve a cabo su propia investigación sobre la velocidad a que la selva amazónica se está borrando legalmente. ¿Cree usted que esto está ocurriendo de manera exponencial, lineal o cuadrática? Dar una clara evidencia para apoyar sus conclusiones. ¿Qué factores hacen que la tasa de deforestación sea exponencial?

Tarea 3.2 El diablo y Daniel Webster[5]

El diablo y Daniel Webster es un cuento de Stephen Vicente Benet sobre un granjero de Nueva Hampshire que vende su alma al diablo. El diablo propone pagar a Daniel por sus servicios de la siguiente manera: en el primer día, el diablo pagará $ 1.000 en la mañana, pero final del primer día, Daniel debe pagarle una comisión de $ 100; así, su sueldo neto el primer día será de $ 900. Al comienzo del segundo día, el diablo duplica el salario neto del primer día; así, al inicio del segundo día, pagará $ 1.800 a Daniel; pero al final del segundo día, Daniel debe duplicar la cantidad que le paga como comisión, es decir le debe cancelar $ 200 al diablo. Así en lo sucesivo hasta llegar el día 31.

¿A quién le favorece más el trato? Explique el por qué

¿Cuál será el salario que el diablo pagará a Daniel al empezar el tercer día?

¿Puede reconocerse algún patrón que permita calcular el dinero que paga el diablo y la comisión que recibe durante los siguientes días?

A partir de los valores encontrados en las preguntas anteriores, complete la tabla 4.

Tabla 4
Hoja de actividades

El diablo y Daniel Webster		Salario inicial de Daniel	$1.000
		Comisión inicial del diablo	$100
		Factor	2
Día	**Pago de Daniel**	**Comisión del diablo**	**Sueldo neto**
1	$1.000	$100	$900
2	1.800	200	1.600
3	3.200	400	
4			
5			
6			
7			
8			
9			

[5] Illuminations: resources for teaching math. Consultado el 20 de enero de 2015 en: http://illuminations.nctm.org/Lesson.aspx?id=1135#

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31

Ahora, con los resultados obtenidos en la tabla 4, ¿reformularías la respuesta a la pregunta 1? ¿Por qué?

¿Qué tipos de curvas resultan de los datos de la tabla? Explique la selección realizada

El desarrollo de estas tareas prototípicas, nos permitió identificar los caminos de aprendizaje que los estudiantes podrían recorrer para cumplir con cada objetivo de aprendizaje. A continuación, presentamos los grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje para el tema función exponencial creciente.