

# ESTUDIO GRÁFICO DEL INVARIANTE DE KHOVANOV

**Stella Huérfano**

*Profesora Universidad Nacional de Colombia*

*Bogotá D.C, Colombia*

rshuerfanob@unal.edu.co

**Hernando Burgos Soto**

*Estudiante Universidad Nacional de Colombia*

*Bogotá D.C, Colombia*

hburgoss@unal.edu.co

## Resumen

Se presenta de manera didáctica (mediante gráficos) el bracket de Khovanov y se demuestra que el complejo de cadena definido a partir de él, es un invariante de nudos y enlaces.<sup>1</sup>

## 1. Introducción

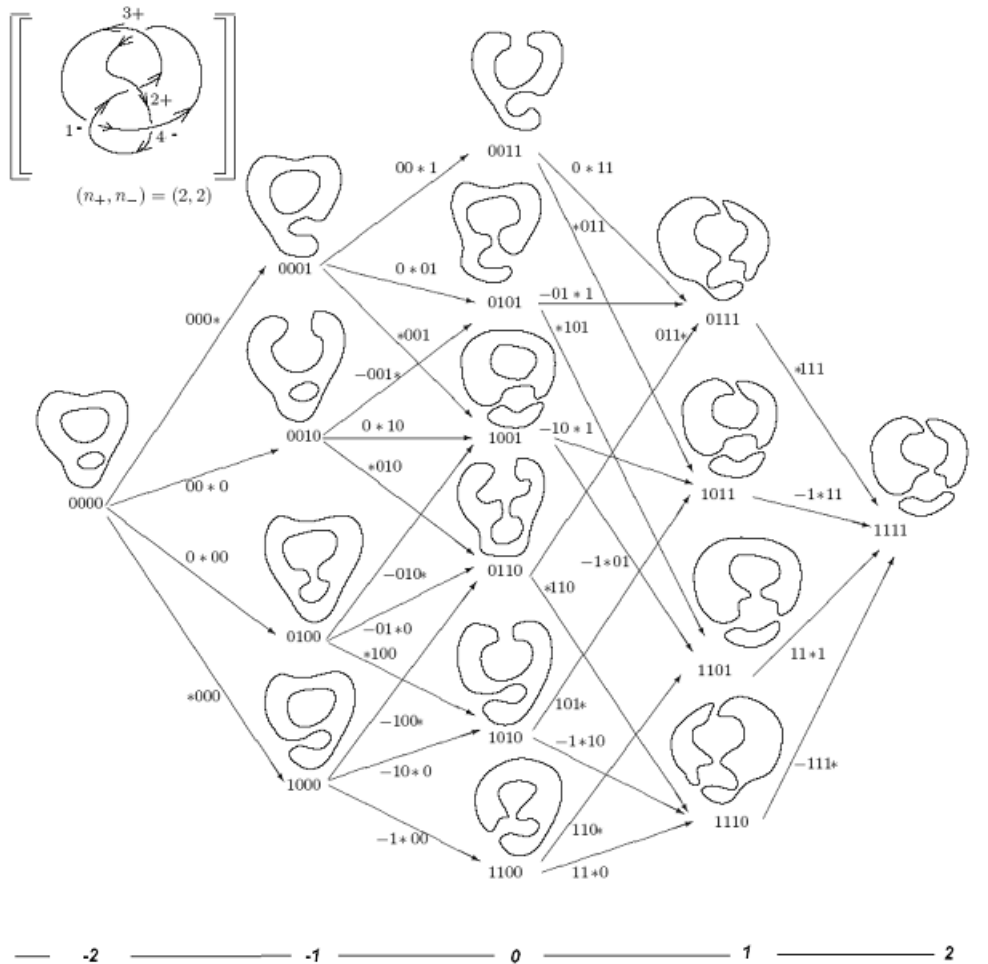
Nuestro propósito es presentar el bracket de Khovanov a la manera que es visto por Bar-Natan en [2]. Como se observa en [8] el invariante de Khovanov es una generalización muy interesante del polinomio de Jones de una variable [3], que es presentado por Khovanov en [4, 5]. El profesor Bar-Natan en [1] explica la teoría de Khovanov, calcula varios ejemplos y demuestra que las homologías del complejo de Khovanov constituyen un invariante de enlaces más fuerte que el polinomio de Jones. El estudio del invariante de Khovanov ha interesado a varios matemáticos entre los que se destacan Lee, ver [6, 7] y Rasmussen [9]. Nosotros aquí haremos en dos secciones una presentación gráfica del invariante. En la siguiente sección presentaremos el bracket de Khovanov y luego mostraremos que éste es invariante bajo los dos primeros movimientos de Reidemeister. Pedimos al lector que use la técnica aquí utilizada para que demuestre la invariancia bajo el tercer movimiento. Este último resulta ser el más fácil de demostrar, aunque es el más largo de presentar ya que involucra el mayor número de cruces.

## 2. El Bracket de Khovanov

Para tener una idea de lo que es el bracket de Khovanov, pensemos en un enlace con  $n$  cruces, denotando con  $n_+$  y  $n_-$  el número de cruces positivos y negativos respectivamente.

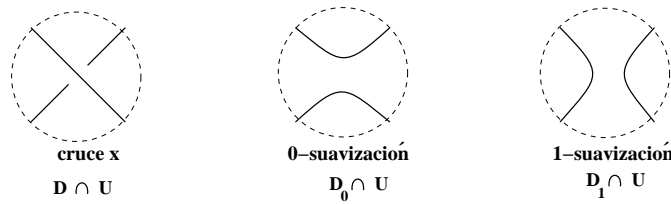
---

<sup>1</sup>Este trabajo hace parte del proyecto de investigación Universidad Nacional de Colombia Colciencias 1101-05-11-445 del grupo de Teoría de Representaciones del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Sede Bogotá



En la figura anterior se observa el bracket de Khovanov del nudo 8. Este está en la parte superior izquierda de la figura encerrado en doble bracket para indicar que el resto de la figura es el bracket formal de Khovanov de este nudo. La pareja ordenada de enteros en la parte inferior del nudo  $(n_+, n_-) = (2, 2)$  indica que tenemos dos cruces positivos y 2 negativos. La parte principal de la figura es el grafo, denominado *cubo* cuyos nodos *vértices* son todas las cadenas de cuatro caracteres, todos 0s o 1s. cada *arista* del cubo esta marcada por una cadena de 4 caracteres, 0s o 1s y exactamente un \* el cual indica la coordenada que cambia de cero a uno en la arista dada. El cubo cambia de la esquina ubicada a la izquierda a la del extremo derecho de 0000 a 1111. Cada vértice del cubo tiene una *altura* que es la suma de sus coordenadas. En nuestro ejemplo, la altura es un número entre 0 y 4. El cubo está dibujado de tal modo que los vertices de altura  $r$  están proyectados hacia abajo al punto  $r - n_-$  sobre una línea que se encuentra debajo del cubo. Finalmente cada vértice del cubo de un nudo  $K$  lleva una variedad de dimensión 1 que llamaremos *suavización* de  $K$  y que se obtiene remplazando cada cruce en el diagrama de  $K$  (en cada vértice, teniendo en cuenta los ceros o unos de su cadena de caracteres) por una *0-suavización* o una *1-suavización* entendiendo como éstas, las relacionadas en la

siguiente figura. Un enlace con un diagrama de  $n$  cruces tendrá  $2^n$  suavizaciones.

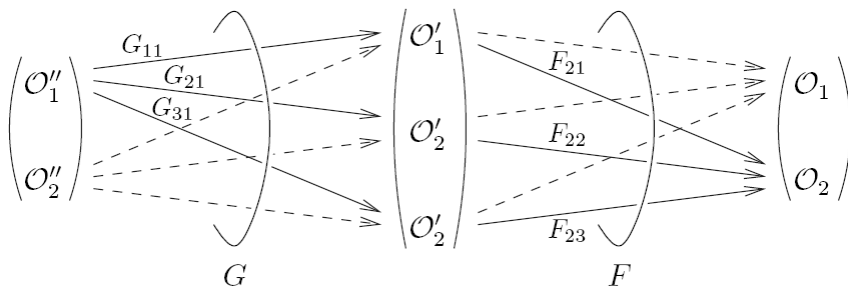


### 2.1. El complejo de cadena

Interpretaremos un cubo como el mencionado, como un complejo (en el sentido del álgebra homológica). Para esto definamos la categoría abeliana **Kob** en que estaremos trabajando. Los objetos de la categoría serán vectores columnas cuyos elementos serán  $\mathbb{Z}$ -combinaciones lineales formales de suavizaciones con una misma altura. Dados dos objetos en esta categoría

$$O = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \\ \vdots \\ O_n \end{pmatrix} \quad O^1 = \begin{pmatrix} O_1^1 \\ O_2^1 \\ \vdots \\ O_m^1 \end{pmatrix}$$

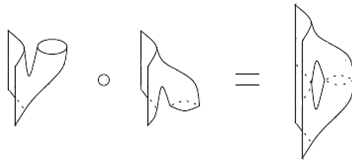
Los morfismos entre estos objetos serán matrices cuyos elementos son cobordismos, esto es, superficies de dimensión 2, encajadas en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  cuyas bordes yacen enteramente en  $\mathbb{R}^2 \times 0, 1$ . El borde superior es una suavización  $O_i$  y el borde inferior es una suavización  $O_j^1$ . Los morfismos en esta categoría se suman usando el modelo de la suma de matrices y la composición de morfismos se realiza usando el modelo del producto de matrices. la siguiente figura ayuda a interpretar la situación



Dados dos morfismos entre objetos  $O$  y  $O^1$  de la categoría **Kob**,  $F = (F_{ij})$  y  $G = (G_{jk})$  entonces  $F \circ G$  estará definido obviamente si el número de columnas de  $F$  es igual al número de filas de  $G$  y

$$F \circ G = \sum_j F_{ij} \circ G_{jk}$$

donde  $F_{ij} \circ G_{jk}$  se realiza colocando el cobordismo  $G(jk)$  encima del cobordismo  $F_{ij}$  como ilustra la siguiente figura.



Además los morfismos en **Kob** satisfacen las siguientes tres relaciones.

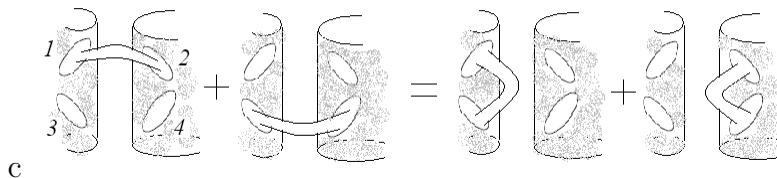
1. Relación *S*. Si en un cobordismo aparece una esfera entonces el cobordismo se reemplaza por cero.

$$\text{Esfera} = 0$$

2. Relación *T*. Si en un cobordismo aparece un toro entonces el toro puede removerse del cobordismo y el resto del cobordismo es multiplicado por 2.

$$\text{Toro} = 2$$

3. Relación *4Tu*. Finalmente se considera igualdad de cobordismos cuando estos son obtenidos de otro en el cual se han removido discos y unidos estos con tubos como muestra la figura.



Si  $C_{ij}$  denota el cobordismo en el cual se han removido los discos enumerados con  $i$  y  $j$  y unido los huecos dejados por estos discos, con un tubo. entonces se tiene la relación  $C_{12} + C_{34} = C_{13} + C_{24}$

La naturaleza local de estas relaciones implica que la operación composición permanece bien definida en **Kob**

### 3. Invariancia por los movimientos de Reidemeister

Nuestro propósito ahora es demostrar que dado un enlace  $K$  el complejo de cadena

$$[[K]] = (\cdots 0 \longrightarrow [[K]]^{-n_-} \longrightarrow \cdots \longrightarrow [[K]]^{n_+} \longrightarrow 0 \cdots)$$

es un invariante de enlaces, si está considerado dentro de la categoría **Kob**. Es decir dado dos enlaces o nudos equivalentes por movimientos de Reidemeister los complejos asociados por el bracket de Khovanov son homotopicamente equivalentes

### 3.1. Primer movimiento

Necesitamos mostrar que los complejos formales de los diagramas de nudos involucrados en el movimiento de Reidemeister de tipo 1 son equivalentes por homotopía. Esto es que  $[[\text{diagrama 1}]] \sim [[\text{diagrama 2}]]$ . Tenemos que:

$$[[\text{diagrama 1}]] = (0 \rightarrow \text{diagrama 1} \rightarrow 0)$$

y  $[[\text{diagrama 2}]] = (0 \rightarrow \text{diagrama 2} \rightarrow \text{diagrama 1} \rightarrow 0)$

Para lograr lo anterior se deben encontrar morfismos

$F : [[\text{diagrama 1}]] \rightarrow [[\text{diagrama 2}]]$  y  $G : [[\text{diagrama 2}]] \rightarrow [[\text{diagrama 1}]]$ . Tales que  $F \circ G$  sea homotópica a la identidad de  $[[\text{diagrama 2}]]$  y  $G \circ F$  sea homotópica a la identidad de  $[[\text{diagrama 1}]]$ . Se tiene entonces el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{d_a^{-1}} & \text{diagrama 1} & \xrightarrow{d_a^0} & 0 & \xrightarrow{d_a^1} & 0 \\
 \uparrow F^{-1} & & \uparrow F^0 & & \uparrow F^1 & & \uparrow F^2 \\
 G^{-1} & & G^0 & & G^1 & & G^2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \xrightarrow{d_b^{-1}} & \text{diagrama 2} & \xrightarrow{d_b^0} & \text{diagrama 1} & \xrightarrow{d_b^1} & 0
 \end{array}$$

Claramente  $F^{-1}, G^{-1}, F^1, G^1, F^2, G^2, d_a^{-1}, d_b^{-1}, d_a^1$  y  $d_b^1$  son los morfismos cero y por lo tanto el primer y segundo cuadrante son conmutativos. Definamos:

$$F^0 = \text{diagrama 1} - \text{diagrama 2} ; G^0 = \text{diagrama 2} \text{ y } d_b^0 = \text{diagrama 1}$$

Tenemos que  $F^1 \circ d_a^0 = 0$  y

$$\begin{aligned}
 d_b^0 \circ F^0 &= \text{diagrama 1} \circ \left( \text{diagrama 1} - \text{diagrama 2} \right) \\
 &= \text{diagrama 1} - \text{diagrama 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Esto prueba que el segundo cuadrado del complejo es también conmutativo y por lo tanto  $F$  es un morfismo de complejos.

$G$  es claramente un morfimo de complejos ya que en cada caso

$$G^{i+1} \circ d_b^i = d_a^i \circ G^i = 0$$

Para demostrar la equivalencia entre los 2 complejos de cadena, solo nos falta probar que:

$$(3.1) \quad G \circ F \sim I_a$$

$$(3.2) \quad F \circ G \sim I_b$$

donde  $I_a$  e  $I_b$  denotan las identidades de  $[[\mathcal{R}]]$  y  $[[\mathcal{L}]]$  respectivamente.

Para probar 3.1 debemos mostrar que existen  $h_a^r$  con  $r$  entero tal que  $G^r \circ F^r - I^r = h_a^{r+1} \circ d_a^r + d_a^{r-1} \circ h_a^r$ .

Observamos que  $d_a^r = 0$  para todo  $r$ ; luego se debe mostrar simplemente que  $G^r \circ F^r = I^r$ . Para  $r \neq 0$  esto se tiene trivialmente. Para  $r = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} d_b^0 \circ F^0 &= \left( \text{Diagram 1} \right) \circ \left( \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \right) \\ &= \left( \text{Diagram 4} \right) - \left( \text{Diagram 5} \right) \\ &= 2 \left( \text{Diagram 6} \right) - \left( \text{Diagram 7} \right) \\ &= I_a^0 \end{aligned}$$

Para probar 3.2 mostremos ahora que  $F \circ G \sim I_b$ . Sea  $h_b^r = 0$  para todo  $r \neq 1$  y sea

$$h_b^1 = - \left( \text{Diagram 8} \right)$$

Claramente  $F^r \circ G^r - I_b^r = h_b^{r+1} \circ d_b^r + d_b^{r-1} \circ h_b^r = 0$ , siempre que  $r \neq 0, 1$ .  
 Para  $r = 1$  se tiene que  $F^1 \circ G^1 = 0 = h_b^2 \circ d_b^1$  y

$$\begin{aligned}
 d_b^0 \circ h_b^1 &= \left( \text{Diagram 1} \right) \circ \left( - \text{Diagram 2} \right) \\
 &= - \text{Diagram 3} \\
 &= -I_b^1
 \end{aligned}$$

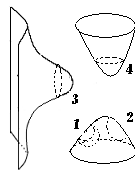
y por lo tanto se tiene que  $F^1 \circ G^1 - I_b^1 = h_b^2 \circ d_b^1 + d_b^0 \circ h_b^1$ .  
 Tenemos que  $d_b^{-1} \circ h_b^0 = 0$  así que debemos probar finalmente que  $F^0 \circ G^0 - I_b^0 = h_b^1 \circ d_b^0$ . Pero

$$\begin{aligned}
 F^0 \circ G^0 &= \left( \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} \right) \circ \text{Diagram 6} \\
 &= \text{Diagram 7} - \text{Diagram 8} \\
 I_b^0 &= \text{Diagram 9} \\
 h_b^1 \circ d_b^0 &= \text{Diagram 10}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

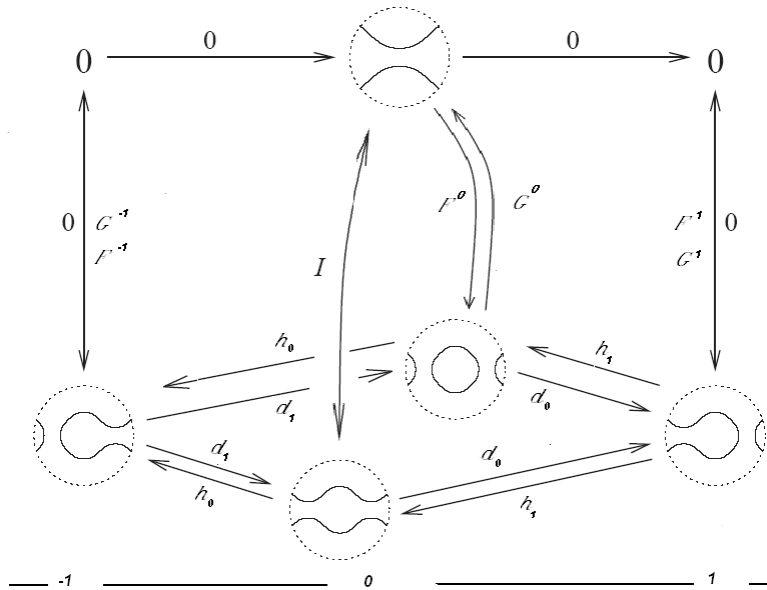
$$F^0 \circ G^0 - I_b^0 - h_b^1 \circ d_b^0 = C_{12} - C_{13} - C_{24} + C_{34} = 0$$

donde  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{24}$  y  $C_{34}$  son obtenidos aplicando la relación  $4Tu$  al cobordismo



### 3.2. segundo movimiento

Se debe probar que los complejos involucrados en el segundo movimiento de Reidemeister son equivalentes por homotopía



Los dos complejos de los que hablamos son como indica el gráfico anterior

$$[[ \text{X} \text{X} ]]= (0 \longrightarrow \text{X} \longrightarrow 0)$$

y

$$[[ \text{X} \text{X} ]]= (0 \longrightarrow T^{-1} \longrightarrow T^0 \longrightarrow T^1 \longrightarrow 0)$$

donde

$$T^{-1} = [ \text{X} \text{X} ] ; \quad T^0 = \left[ \begin{array}{c} \text{X} \text{O} \text{X} \\ \text{X} \text{X} \end{array} \right] \text{ y } \quad T^1 = [ \text{X} \text{X} ]$$

Tenemos que  $d_a^r = 0$  para todo  $r$ ,  $d_b^r = 0$  si  $r \neq -1, 0$  y

$$d_b^{-1} = \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] \quad d_b^0 = \left[ \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \right]$$



Definamos  $F$  de la siguiente forma:  $F^r = 0$  si  $r \neq 0$  y

$$F^0 = \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right]$$

En la gráfica se observa que si  $r \neq 0$  entonces  $d_b^r \circ F^r = F^{r+1} \circ d_a^r = 0$ . Además  $F^1 \circ d_a^0 = 0$  y

$$d_b^0 \circ F^0 = \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

Queda demostrado entonces que cada uno de los cuadrados del complejo en cuestión es conmutativo y por lo tanto  $F$  es un morfismo de complejos.

Definamos ahora  $G : [[ \text{Diagram 5} ]] \rightarrow [[ \text{Diagram 6} ]]$  de la siguiente manera:  $G^r = 0$  si  $r \neq 0$  y

$$G^0 = \left[ \begin{array}{cc} \text{Diagram 7} & \text{Diagram 8} \end{array} \right]$$

Claramente  $G^r \circ d_b^{r-1} = d_r^{r-1} \circ G^{r-1}$  para todo  $r \neq 0$ . Además  $d_a^{-1} \circ G^{-1} = 0$  y

$$G^0 \circ d_b^{-1} = - \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} = 0$$

y por lo tanto cada uno de los cuadrados, determinados por  $G$ , del complejo es conmutativo y en consecuencia  $G$  es un morfismo de complejos.

Debemos mostrar ahora que efectivamente los dos complejos son equivalentes por homotopía, es decir que existen morfismos de complejos  $h_a : [[ \text{Diagram 6} ]]^r \rightarrow [[ \text{Diagram 5} ]]^r$  y  $G : [[ \text{Diagram 5} ]]^r \rightarrow [[ \text{Diagram 6} ]]^r$  tales que

$$(3.3) \quad G^r \circ F^r - I_a^r = h_a^{r+1} \circ d_a^r + d_a^{r-1} \circ h_a^r$$

y

$$(3.4) \quad F^r \circ G^r - I_b^r = h_b^{r+1} \circ d_b^r + d_b^{r-1} \circ h_b^r$$

Observamos que si  $r \neq 0$ ,  $G^r \circ F^r = 0 = I_a^r$  y  $h_a^{r+1} \circ d_a^r + d_a^{r-1} \circ h_a^r$  y la ecuación 3.3 se obtiene trivialmente.

Además

$$G^0 \circ F^0 = - \left[ \text{Diagram 1} \right] + \left[ \text{Diagram 2} \right] = \left[ \text{Diagram 3} \right] = I_a^0$$

y esto asegura que 3.3 se cumpla para todo  $r$ .

Para probar 3.4 definimos  $h_b^r$  de la siguiente manera:  $h_b^r = 0$ , si  $r \neq 0, 1$  y

$$h_b^0 = \left[ \begin{array}{c} - \left[ \text{Diagram 1} \right] \\ 0 \end{array} \right] \quad h_b^1 = \left[ \begin{array}{c} \left[ \text{Diagram 2} \right] \\ 0 \end{array} \right]$$

Tenemos entonces que  $F^{-1} \circ G^{-1} = 0$ ,  $d_b^{-2} \circ h_b^{-1} = 0$  y

$$h_b^0 \circ d_b^{-1} = - \left[ \text{Diagram 1} \right] = -I_b^{-1}$$

Por lo tanto se tiene que  $F^{-1} \circ G^{-1} - I_b^{-1} = h_b^0 \circ d_b^{-1} + d_b^{-2} \circ h_b^{-1}$ .  
Tenemos además que

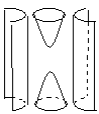
$$F^0 \circ G^0 = \left[ \begin{array}{c} - \left[ \text{Diagram 1} \right] \\ - \left[ \text{Diagram 2} \right] \end{array} \right]$$

$$h_b^1 \circ d_b^0 = \left[ \begin{array}{c} - \left[ \text{Diagram 3} \right] \\ 0 \end{array} \right]$$

$$d_b^{-1} \circ h_b^0 = \begin{bmatrix} - \text{[diagram]} & 0 \\ - \text{[diagram]} & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_b^0 = \begin{bmatrix} - \text{[diagram]} & 0 \\ 0 & \text{[diagram]} \end{bmatrix}$$

y claramente se tiene que  $F^0 \circ G^0 - I_b^0 = h_b^1 \circ d_b^0 + d_b^{-1} \circ h_b^0$ . La igualdad en los elementos de la esquina superior izquierda de la matriz se sigue por la relación  $4Tu$  aplicada al

cobordismo , la igualdad en los otros elementos se sigue trivialmente.

## Bibliografía

- [1] BAR-NATAN, D., *On Khovanov categorification of de Jones polinomial*. arXiv:QA/0201043, 2002.
- [2] BAR-NATAN, D., *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*. arXiv:math.GT/0410495v1, 2004.
- [3] JONES, V., *A polynomial Invariant of Knots Via Von Neumann Algebra*. Bull. AMS 12, 103-111, 1985.
- [4] KHOVANOV, M., *A categorification of the Jones Polynomial*. Duke Math J., 101(3):359-426,1999. arXiv:math.QA/9908171, 1999.
- [5] KHOVANOV, M., *A functor-value invariant of tangles*. arXiv:math.QA/0103190, 2001.
- [6] LEE, E., *On Khovanov invariants for alternating links*. arXiv:math.GT/0210213 v2, 11 nov. 2002.
- [7] LEE, E., *The support of the Khovanov's invariants for alternating knots*. arXiv:math.GT/0201105 v1, 11 jan. 2002.

- [8] MANTUROV, V., *Knot Theory*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, USA., 2004.
- [9] RASMUSSEN, J., *Khovanov homology and the slice genus*. arXiv:math.GT/0402131 v1, 9 feb. 2004.