

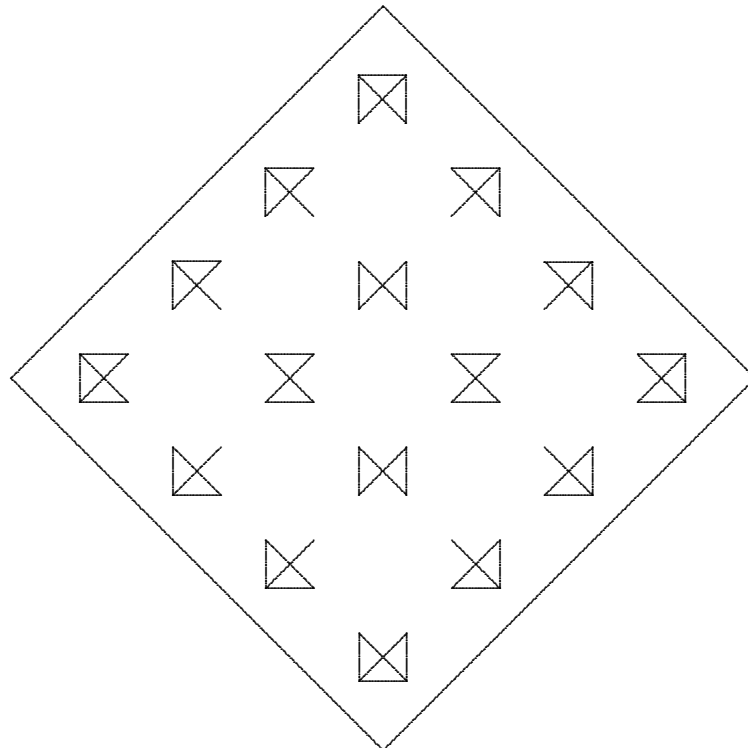
SIMETRÍA EN ALGUNAS TABLAS DE C.S. PEIRCE

Arnold Ostra

Profesor Universidad del Tolima

Ibagué, Colombia

oostra@bunde.tolinet.com.co



Introducción

Charles S. Peirce (1839 – 1914) ha sido considerado como el intelectual más original y versátil de América. Padre de la semiótica moderna y creador del pragmatismo auténtico, es más conocido y reconocido en la filosofía que en la matemática y la lógica aunque sus aportes originales a estas ciencias no pueden despreciarse: basta mencionar la teoría de la cuantificación, la axiomatización de la aritmética y sus maravillosos gráficos existenciales [3, 10, 14, 17].

En manuscritos con fechas de 1902 Peirce propuso una notación para los dieciséis conectivos proposicionales binarios. La característica sobresaliente de este sistema de símbolos es que, en términos de la teoría de los signos propuesta por el mismo Peirce, se trata de una notación *icónica*. Esto significa que cada símbolo es la definición del conectivo que representa y, de otro lado, que el sistema de símbolos refleja de manera bien visible algunas propiedades y simetrías intrínsecas de los conectivos [2, 7, 8, 19]. Pero el objetivo primordial perseguido por Peirce al introducir estos signos fue la búsqueda sistemática de tautologías, indagación en la cual las características de los signos juegan un papel decisivo.

En el marco de la búsqueda de tautologías, Peirce consignó las soluciones de tres de los problemas que se planteó en sendas tablas de conectivos. En este escrito, las tablas 1 (página 3), 2 (página 4) y 3 (página 5) copian de la manera más fiel posible las tablas elaboradas por Peirce hace cien años. Al observarlas, en especial la tabla 2 (página 4), la simetría salta a la vista.

Pero la simetría presente en las tablas de Peirce no es la simetría considerada de manera usual en la teoría de matrices [5, 9, 16]. Por ejemplo, al reflejar la tabla 3 (página 5) en el eje vertical, a cada símbolo no corresponde el mismo símbolo sino el que se obtiene de él reflejándolo en el mismo eje. Esta es una

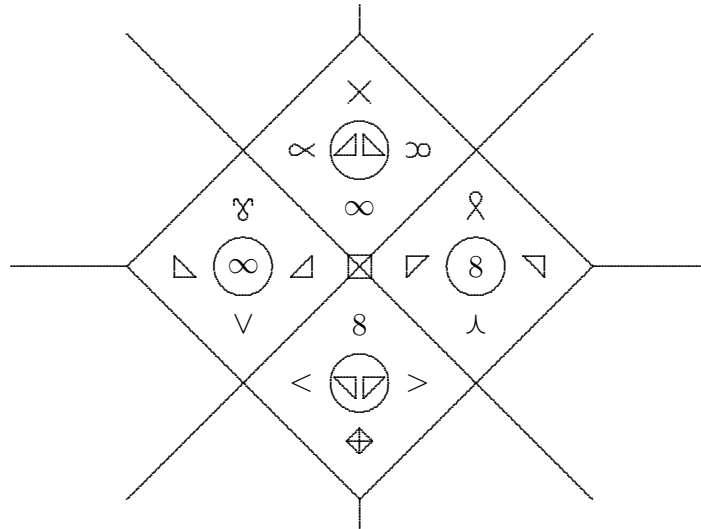


Tabla 1: Estudio por Peirce de la forma $x O x$

auténtica simetría especular.

El propósito de esta monografía es precisar el tipo de simetría presente en las tablas de Peirce. El instrumento es la teoría de grupos, en especial las acciones del grupo del cuadrado. Aunque el estudio presentado puede extrapolarse a tablas rectangulares y a tablas no planas, en este trabajo sólo se consideran tablas planas cuadradas.

En el capítulo 1 se proponen tres nociones de simetría para tablas cuadradas. Por ignorancia de estudios anteriores se introducen los nombres ‘unosimetría’, ‘dosimetría’ y ‘tresimetría’, la primera de ellas corresponde a la simetría usual. En el capítulo 5 se presenta la notación de Peirce para los conectivos binarios y se repasa el estudio hecho por el pensador en la búsqueda de tautologías. La simetría de las múltiples tablas que aparecen se estudia con la terminología propuesta en el capítulo 1. En el capítulo 11 se repiten las tablas de Peirce con otra notación para los conectivos binarios, propuesta en la década pasada por S. Zellweger.

Tabla 2: Estudio por Peirce de la forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$

El material presentado en la sección 2 es un caso particular de la conocida teoría de acciones de grupo —que puede encontrarse en muchos textos de álgebra [6, 12, 13]— mientras las ideas, nociones y resultados de las secciones 3, 4 son originales. El capítulo 5 se basa en el artículo [2] y en la monografía [8] pero la mayoría de las tablas presentadas allí fueron elaboradas por el autor y el estudio de la simetría en todas las tablas es nuevo. En el capítulo

The image shows a large diamond-shaped Peirce table. The table is composed of a grid of small symbols arranged in a diamond pattern. The symbols include triangles (pointing up, down, left, right), diamonds, and infinity-like symbols. The table is divided into four quadrants by two diagonal lines. A spade symbol is on the left and a club symbol is on the right.

Tabla 3: Estudio por Peirce de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$

11 se emplea la notación presentada en [1], la idea de presentar con ella las tablas de Peirce y el análisis de su simetría son originales.

1 Tres Nociones de Simetría

Como en todas las actividades humanas, en la matemática son ubicuos los fenómenos simétricos. Pero a diferencia de otras áreas del saber y de la cultura, la matemática ha desarrollado un instrumentario muy fino y preciso para estudiar la simetría en general: se trata de la teoría de grupos.

En el álgebra lineal se define una matriz simétrica como aquella que es igual a su traspuesta, o en términos más geométricos, que es invariante bajo una reflexión en la diagonal principal [9, 16]. Esa no es la única simetría posible de una tabla cuadrada: en el interesante trabajo [5] se estudian las reflexiones de una matriz cuadrada en sus ejes horizontal y vertical; se muestra que buena parte de la teoría conocida sobre matrices simétricas puede extenderse; se presentan algunas aplicaciones a la estadística y se sugieren otras.

La tabla que aparece después de la portada (página 2), aunque tiene auténtica simetría especular o bilateral respecto a sus ejes y diagonales, no es simétrica en ninguno de los sentidos mencionados arriba. Es preciso, entonces, refinar la noción de simetría para analizar este tipo de tablas.

Las palabras subrayadas destacan conceptos de uso común en matemáticas, que pueden consultarse en cualquier texto sobre temas afines [6, 12, 13].

2 Unosimetría

Se observa con facilidad que un cuadrado fijo tiene ocho movimientos rígidos o isometrías posibles: cuatro reflexiones (en las diagonales y en las medianas) y cuatro rotaciones (incluyendo una en 360 grados, que se identifica con el reposo); también se observa que los movimientos pueden combinarse entre sí. Estos movimientos rígidos con la operación de composición constituyen

un grupo, llamado *grupo diédrico del cuadrado* y denotado D_4 .

Dada una tabla cuadrada, cuyas componentes pertenecen todas a cierto conjunto X , con ella pueden realizarse los mismos movimientos rígidos del cuadrado. Como se hará evidente en los capítulos postreros, es diferente considerar la tabla horizontal (\square) o inclinada (\diamond) aunque en ambos casos pueden realizarse todos los movimientos conviniendo que la diagonal principal es el eje que va de la izquierda arriba a la derecha abajo, etcétera. Excepto el reposo, quizás el movimiento más fácil de describir es la reflexión en la diagonal principal pues corresponde —en el caso de una tabla horizontal— a cambiar la componente x_{ij} por la x_{ji} . Expresiones similares pueden encontrarse para todos los movimientos.

Si $\sigma \in D_4$ es un movimiento rígido del cuadrado y $T \in M(X)$ es una tabla cuadrada, σT denota la tabla que se obtiene de T realizándole el movimiento σ . De manera formal, esto define una acción del grupo D_4 sobre el conjunto $M(X)$ de todas las matrices cuadradas con componentes de X .

Definición. Fijado un movimiento rígido $\sigma \in D_4$, una tabla $T \in M(X)$ es *unosimétrica respecto a σ* si $\sigma T = T$.

Ejemplos. Las matrices unosimétricas respecto a la reflexión en la diagonal principal son las matrices llamadas simétricas. Las matrices unosimétricas respecto a la reflexión en el eje vertical son llamadas palíndromas horizontales en [5]; las unosimétricas respecto a la reflexión en el eje horizontal, palíndromas verticales.

Observación Particular. Si el conjunto X tiene estructura de campo (o de anillo), se verifica de inmediato que la función $T \mapsto \sigma T$ es lineal en el espacio vectorial (o módulo) $M_n(X)$ de las matrices cuadradas *de orden* $n \times n$ con componentes de X . En consecuencia el conjunto de las matrices unosimétricas respecto a σ , siendo el núcleo de la función lineal $T \mapsto (\sigma T - T)$, es un subespacio (o submódulo) de $M_n(X)$.

En la terminología de la teoría de grupos, la órbita de una tabla fija T es el conjunto de todas las tablas σT que se obtienen realizando con la tabla escogida todos los movimientos rígidos del cuadrado. Como se verá en seguida, no siempre se obtienen ocho tablas distintas.

Ejemplos. La órbita de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\};$$

la de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\};$$

la órbita de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\};$$

y la de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si la órbita de cierta tabla T tiene menos de ocho elementos entonces hay algún movimiento rígido σ distinto al reposo que deja inalterado T , es decir, T es unosimétrica respecto a σ . Así pues, una forma precisa de medir la unosimetría de T es considerando el conjunto siguiente, denotado $G_1(T)$ o bien G_1 cuando la tabla está especificada en el contexto.

$$G_1(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T = T \}$$

Teorema 1. *Para cualquier tabla T , $G_1(T)$ es un subgrupo del grupo diédrico D_4 .*

Demostración. Si i denota el reposo es evidente que $iT = T$, luego $i \in G_1$. Si $\sigma, \tau \in G_1$ entonces $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma T = T$ de donde $\sigma\tau \in G_1$. Y si $\sigma \in G_1$ entonces $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(\sigma T) = (\sigma^{-1}\sigma)T = iT = T$, de suerte que también $\sigma^{-1} \in G_1$. □

Convención. Sea T cualquier tabla cuadrada. El *primer grupo de simetría* de T es $G_1(T)$.

Ejemplos. El primer grupo de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

es el grupo trivial —que tiene un solo elemento—, denotado 0; los primeros grupos de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

aunque distintos entre sí, son isomorfos al grupo \mathbb{Z}_2 que, en esencia, es el único que tiene dos elementos; los primeros grupos de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

también distintos entre sí, son ambos isomorfos al grupo \underline{V} , el único grupo no cíclico que tiene cuatro elementos; el primer grupo de simetría de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y de} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

es el grupo diédrico completo D_4 .

Estos ejemplos también ilustran el siguiente hecho, válido en general para acciones de grupos finitos [6, 12].

Teorema 2. *Para cualquier tabla T , el producto del tamaño de la órbita de T por el tamaño del primer grupo de simetría $G_1(T)$, es 8.*

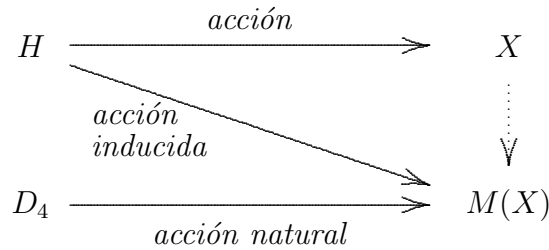
Ahora es claro el sentido en el cual el primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla: cuanto mayor el grupo, tanto más unosimétrica es la tabla.

3 Dosimetría

En la primera sección se presentó la acción natural del grupo diédrico D_4 sobre el conjunto $M(X)$ de tablas o matrices cuadradas con componentes de un conjunto X .

Supóngase ahora que un grupo H actúa sobre el conjunto de componentes X . Esta acción induce de inmediato una nueva acción sobre el conjunto $M(X)$, como sigue: Si $h \in H$ es un elemento del grupo y $T \in M(X)$ es una tabla cuadrada, T_h denota la tabla que se obtiene de T realizando en cada

componente la acción h .



Ejemplo. Si X tiene estructura de grupo aditivo entonces actúa sobre él el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ como se indica a continuación.

$$\begin{cases} 0 * x = x \\ 1 * x = -x \end{cases}$$

Para esta acción, T_0 es T mientras T_1 es la tabla que se obtiene de T sustituyendo cada componente por su opuesto aditivo o, como se dice, ‘cambiándola de signo’.

Cuando en una tabla cuadrada se realiza un movimiento rígido de los estudiados en la sección 2, se establece una relación entre las componentes de la misma: un elemento x se relaciona con y si, al mover la tabla, alguna de las copias de x cae sobre alguna de las de y . En general esta relación no es funcional ni biyectiva; aun si lo es, resulta ilusorio esperar que corresponde con exactitud a la biyección inducida por la acción de H . Sin embargo, en algunos casos eso es lo que sucede.

Definición. Fijados un movimiento rígido $\sigma \in D_4$ y un elemento $h \in H$, una tabla $T \in M(X)$ es *dosimétrica respecto a σ y a h* si $\sigma T = T_h$.

Ejemplos. Las matrices dosimétricas respecto a la reflexión en la diagonal principal y a $1 \in \mathbb{Z}_2$ —con la acción indicada arriba— son las matrices

llamadas antisimétricas. Las matrices dosimétricas respecto a la reflexión en el eje vertical y a 1 son llamadas antipalíndromas horizontales en [5]; las dosimétricas respecto a la reflexión en el eje horizontal y a 1, antipalíndromas verticales.

Observación Particular. Si el conjunto X tiene estructura de campo, la función $T \mapsto (\sigma T + T)$ es lineal en el espacio vectorial $M_n(X)$ luego el conjunto de las matrices dosimétricas respecto a σ y a 1 —con la acción indicada arriba— es un subespacio de $M_n(X)$.

Si, además, σ es de orden 1 o 2 (repose, reflexión en cualquier diagonal o en cualquier eje, rotación en 180 grados) y la característica del campo no es 2, entonces toda tabla o matriz $M \in M_n(X)$ puede expresarse de manera única como la suma de una unosimétrica respecto a σ y una dosimétrica respecto a σ y a 1, como sigue.

$$M = \frac{M + \sigma M}{2} + \frac{M - \sigma M}{2}$$

Como en la sección anterior, la dosimetría de una tabla puede tratar de medirse con un conjunto de movimientos rígidos, denotado ahora G_2 .

$$G_2(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \text{existe } h \in H \text{ tal que } \sigma T = T_h \}$$

Cabe anotar que, aunque no se indica de manera explícita, G_2 depende de la acción de H sobre el conjunto X . Como antes, se espera encontrar un subgrupo de D_4 .

Lema. *Sea $T \in M(X)$ una tabla arbitraria. Para cada $\sigma \in D_4$ y cada $h \in H$ se tiene la igualdad siguiente.*

$$(\sigma T)_h = \sigma(T_h)$$

Demostración. En el diagrama siguiente, el movimiento rígido σ es una permutación del conjunto de índices $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ —o de otro

conjunto si la tabla no es horizontal sino inclinada— mientras las tablas o matrices T , σT y T_h son funciones de este producto en X .

$$\begin{array}{ccccc}
 (i, j) & \xrightarrow{\sigma} & (k, l) & & \\
 & \searrow \sigma T & \downarrow T & \searrow T_h & \\
 & & t_{kl} & \xrightarrow{h} & h * t_{kl}
 \end{array}$$

Puesto que los dos triángulos que constituyen el diagrama son conmutativos, las tres maneras de recorrerlo conducen al mismo resultado. \square

Teorema 3. *Para cualquier tabla T , $G_2(T)$ es un subgrupo del grupo diédrico D_4 .*

Demostración. $i \in G_2$ pues $iT = T = T_{e_H}$. Si $\sigma, \tau \in G_2$ existen $h, k \in H$ tales que $\sigma T = T_h$ y $\tau T = T_k$ y entonces $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma(T_k) = (\sigma T)_k = (T_h)_k = T_{kh}$, de donde $\sigma\tau \in G_2$. Si $\sigma \in G_2$ sea $\sigma T = T_h$ para $h \in H$ entonces $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(T_{e_H}) = \sigma^{-1}((T_h)_{h^{-1}}) = \sigma^{-1}((\sigma T)_{h^{-1}}) = \sigma^{-1}(\sigma(T_{h^{-1}})) = iT_{h^{-1}} = T_{h^{-1}}$, así que también $\sigma^{-1} \in G_2$. \square

Se recibe una prueba alternativa al leer el lema como *conmutatividad* entre las dos acciones sobre $M(X)$, la de D_4 y la inducida por H . Existe una correspondencia biyectiva natural entre las parejas de acciones sobre un mismo conjunto que conmutan entre sí y las acciones del grupo producto sobre el conjunto. En particular, el lema implica que se tiene una acción del grupo $D_4 \times H$ sobre $M(X)$; como en la prueba del teorema 1, para cada tabla cuadrada $T \in M(X)$ el conjunto

$$\{ (\sigma, h) \mid \sigma T_{h^{-1}} = T \} = \{ (\sigma, h) \mid \sigma T = T_h \}$$

es un subgrupo del grupo producto; $G_2(T)$ es la proyección en D_4 de este subgrupo y, por lo tanto, un subgrupo de D_4 .

Convención. Sea T cualquier tabla cuadrada. El *segundo grupo de simetría de T* relativo a la acción de H es $G_2(T)$.

Ejemplo. El segundo grupo de simetría de una matriz cuadrada —respecto a la acción de \mathbb{Z}_2 — contiene la reflexión en la diagonal principal si y solo si la matriz es simétrica o antisimétrica. Idéntico comentario puede hacerse sobre las reflexiones en los ejes.

Ejemplo. Tomando $X = \{1, 2, 3, 4\}$ sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Como se observó en la sección 2, $G_1(T)$ es el grupo trivial con un solo elemento.

El conjunto X es un grupo con la operación módulo 4. Si se considera la acción de \mathbb{Z}_2 sobre X en tanto grupo aditivo, $G_2(T)$ también es el grupo trivial pues

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si se considera la acción de \mathbb{Z}_4 sobre X por adición entonces $G_2(T)$ es un grupo de dos elementos —por tanto, isomorfo a \mathbb{Z}_2 — pues

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 3+2 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

que se obtiene de T por reflexión en el eje horizontal.

La unosimetría puede considerarse un caso particular de la dosimetría, caso que se obtiene al tomar la acción trivial de H —esto es, $T_h = T$ para cada tabla T —, de manera que con la dosimetría se gana precisión en el estudio. El hecho siguiente es un reflejo de ello.

Teorema 4. *Para cualquier tabla cuadrada T , el primer grupo de simetría es un subgrupo del segundo. En símbolos:*

$$G_1(T) \subseteq G_2(T).$$

Demostración. Si $\sigma \in G_1$ entonces $\sigma T = T$ luego existe el elemento neutro e_H tal que $\sigma T = T_{e_H}$, de donde $\sigma \in G_2$. \square

El primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla, el segundo *mide* la dosimetría *módulo* D_4 — pues el auténtico grupo de dosimetría es el subgrupo de $D_4 \times H$ que se indicó.

La unosimetría es la simetría *global* de una tabla; la dosimetría es la *coherencia* entre la simetría *global* de la tabla y la simetría *local* de sus componentes.

4 Tresimetría

En la sección precedente un grupo cualquiera H actúa de manera arbitraria sobre el conjunto X mientras el grupo diédrico D_4 actúa de manera natural sobre el conjunto $M(X)$ de tablas cuadradas con componentes de X .

Supóngase ahora que el grupo que actúa sobre el conjunto de componentes X es el mismo grupo de los movimientos rígidos del cuadrado, D_4 . Además de lo dicho en las secciones anteriores, ahora cabe la posibilidad —remota— de que al realizar un movimiento rígido con una tabla, esto induzca entre sus componentes una permutación que corresponde al *mismo* movimiento rígido, realizado *en sentido contrario*.

Definición. Fijado un movimiento rígido $\sigma \in D_4$, una tabla $T \in M(X)$ es *tresimétrica respecto a σ* si $\sigma T = T_{\sigma^{-1}}$.

Ejemplo. La tabla presentada en la página 2 es tresimétrica respecto a todos los movimientos rígidos del cuadrado, considerando la acción natural de D_4 sobre el conjunto $X = \{ \boxtimes, \boxminus, \boxplus, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes \}$.

Una tabla es tresimétrica respecto a un movimiento de orden 1 o 2 (reposo, reflexión en cualquier diagonal o en cualquier eje, rotación en 180 grados) si y solo si al realizarlo con la tabla, esto induce entre sus componentes el mismo movimiento. En efecto, en este caso $\sigma^{-1} = \sigma$.

Cuando una tabla es tresimétrica respecto a una reflexión, al colocar un espejo físico sobre el eje de reflexión y en el plano perpendicular a la tabla, la imagen especular es *exactamente* igual a la cara oculta de la tabla — este fenómeno se observa en la tabla de la página 2 así como en el *Espejo Mágico* de Escher [4]. Más aun, cuando una tabla es tresimétrica respecto a cualquier movimiento rígido, al escribirla en una superficie plana transparente y realizar el movimiento en cuestión con la superficie, la imagen final es *exactamente* igual a la inicial — de nuevo, eso sucede con la tabla de la página 2.

De cualquier tabla T puede considerarse el conjunto de todos los movimientos rígidos respecto a los cuales ella es tresimétrica, denotado $G_3(T)$.

$$G_3(T) = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T = T_{\sigma^{-1}} \} = \{ \sigma \in D_4 \mid \sigma T_\sigma = T \}$$

De nuevo, es importante resaltar que G_3 depende de la acción de D_4 sobre el conjunto X .

Teorema 5. *Para cualquier tabla T , $G_3(T)$ es un subgrupo del grupo diédrico D_4 .*

Demostración. $i \in G_3$ pues $iT = T = T_i = T_{i^{-1}}$. Si $\sigma, \tau \in G_3$ entonces $\sigma\tau T = \sigma(\tau T) = \sigma(T_{\tau^{-1}}) = (\sigma T)_{\tau^{-1}} = (T_{\sigma^{-1}})_{\tau^{-1}} = T_{\tau^{-1}\sigma^{-1}} = T_{(\sigma\tau)^{-1}}$, de donde $\sigma\tau \in G_3$. Si $\sigma \in G_3$ entonces $\sigma^{-1}T = \sigma^{-1}(\sigma(T_\sigma)) = (\sigma^{-1}\sigma)T_\sigma = iT_\sigma = T_\sigma = T_{(\sigma^{-1})^{-1}}$, así que también $\sigma^{-1} \in G_3$. \square

De nuevo, como las dos acciones de D_4 sobre $M(X)$ conmutan entonces corresponden a una acción del grupo producto $D_4 \times D_4$; para cada tabla $T \in M(X)$ el conjunto

$$\{ (\sigma, \sigma) \mid \sigma T = T_{\sigma^{-1}} \} = \{ (\sigma, \sigma) \mid \sigma T_{\sigma} = T \}$$

es un subgrupo del grupo producto; $G_3(T)$ es la proyección en D_4 de este subgrupo.

Convención. Sea T cualquier tabla cuadrada. El *tercer grupo de simetría de T* relativo a la acción de D_4 sobre X es $G_3(T)$.

Como se espera y como se aprecia en los ejemplos siguientes, el tercer grupo de simetría mide la tresimetría de la tabla.

Ejemplos. El grupo D_4 actúa de manera natural sobre cualquier conjunto con cuatro elementos si estos se colocan en los vértices de un cuadrado. Por ejemplo, la ubicación

1	2
3	4

corresponde a la siguiente acción en el conjunto $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

	1	2	3	4
Reposo	1	2	3	4
Rotación 90° (↻)	3	1	4	2
Rotación 180°	4	3	2	1
Rotación 270° (↺)	2	4	1	3
Reflexión en diagonal ppal	1	3	2	4
Reflexión en 2ª diagonal	4	2	3	1
Reflexión en eje vertical	2	1	4	3
Reflexión en eje horizontal	3	4	1	2

A continuación se indican los grupos de simetría —referentes a esta acción— de algunas tablas. En vez de describir el subgrupo en sí, se consignan los grupos a los cuales son isomorfos: por ejemplo V y \mathbb{Z}_4 tienen ambos cuatro elementos pero no son isomorfos pues el último es cíclico y el primero no. En realidad, las copias de V que aparecen en la lista corresponden a dos subgrupos diferentes de D_4 .

tabla T	$G_1(T)$	$G_2(T)$	$G_3(T)$
1 2 3 4	0	D_4	D_4
2 4 1 3	0	D_4	\mathbb{Z}_4
1 3 2 4	0	D_4	V
1 3 2 4	0	D_4	\mathbb{Z}_4
1 2 4 3	0	V	\mathbb{Z}_2
1 1 2 2	\mathbb{Z}_2	V	0

Las últimas dos tablas mostradas ilustran el hecho de que, en general, no se tiene $G_1 \subseteq G_3$ ni $G_3 \subseteq G_1$. La relación siguiente, por el contrario, es evidente de las definiciones pues una tabla es tresimétrica respecto a σ si y solo si es dosimétrica respecto a σ y σ^{-1} .

Teorema 6. *Para cualquier tabla cuadrada T , el tercer grupo de simetría es un subgrupo del segundo. En símbolos:*

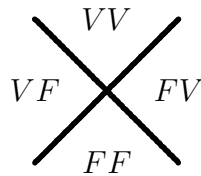
$$G_3(T) \subseteq G_2(T).$$

El primer grupo de simetría *mide* la unosimetría de la tabla, el segundo *mide* la dosimetría *módulo* D_4 y el tercero *mide* la tresimetría.

La unosimetría es la simetría *global* de una tabla; la dosimetría es la *coherencia* entre la simetría global y la simetría local de sus componentes; la tresimetría es la *coincidencia* entre la simetría global de la tabla y la simetría local de sus componentes.

5 Las Tablas de Peirce

Como se indicó en la Introducción, en 1902 Peirce propuso una notación para los dieciséis conectivos proposicionales binarios. La idea de Peirce es sencilla en extremo: la tabla de verdad que define un conectivo binario tiene cuatro renglones, cada uno de los cuales puede ser V o F; el símbolo \times tiene cuatro cuadrantes, cada uno de los cuales puede dejarse abierto o bien cerrarse uniendo los extremos correspondientes. La convención adoptada es la siguiente.



La tabla 4 (página 20) contiene la lista de los conectivos con sus signos respectivos. Peirce también propuso y empleó variantes cursivas de estos símbolos para facilitar su escritura, variantes que en esta monografía solo se emplean en la presentación de las tablas originales (tablas 1, 2, 3).

En su búsqueda sistemática de tautologías, Peirce procedió como sigue. Inicialmente escogía una *forma*, una expresión de lógica proposicional en la cual

VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠
	⊠	∧	<	>	∨	△	▽	∞	8	∇	∇	∞	∞	∞	∞	×
								=								

Tabla 4: Notación de Peirce para los conectivos binarios (1902).

no solo las proposiciones sino también los conectivos son incógnitas; luego, empleando propiedades de su notación, establecía todas —o muchas de— las *sustituciones* de los conectivos que hicieran una tautología de la forma.

Además de sus variantes, las formas estudiadas por Peirce son las siguientes.

$$\begin{aligned}
 &x \text{ O } x \\
 &x \diamond (x \text{ O } x) \\
 &(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x) \\
 &(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y) \\
 &(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \text{ O } z)]
 \end{aligned}$$

Aquí O, \diamond , \heartsuit , \spadesuit y \clubsuit son *variables* y en cada forma se buscan los valores tales que la expresión es verdadera para *cualesquier* proposiciones x, y, z .

En el análisis de tres de estas formas, Peirce consignó todas sus soluciones en sendas tablas... *¡tresimétricas!* En este capítulo se presenta de manera sucinta el estudio de las diferentes formas y se investigan las simetrías de las tablas que surgen.

6 Primera Forma

La expresión $x \text{ O } x$ corresponde a un conectivo de aridad 1 luego, en principio, puede tomar cuatro valores: V, F, x, \bar{x} ($= \text{no } x$). Para obtener el primero se requiere que el conectivo O asigne V a las parejas VV, FF —las únicas que pueden intervenir—, lo cual en la notación de Peirce equivale a que los cuadrantes superior e inferior estén abiertos. Así, los conectivos O que hacen de esta expresión una tautología son $\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \times$.

De igual manera se analizan los otros tres valores posibles de $x \text{ O } x$, forma que induce una *clasificación* de los conectivos binarios mostrada por Peirce en la tabla 1 (página 3) [2]. Una versión de esta tabla aparece en 4.268 de *Collected Papers* [15] (4.268 significa apartado 268 del volumen 4), pero por desgracia los editores en vez de reproducir los signos introducidos por Peirce los sustituyeron por “un simbolismo más convencional”. En 4.270 de la obra citada, Peirce rotula las cuatro clases con las letras $\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{W}, \mathcal{S}$. La tabla 5 es la misma tabla 1 de Peirce, con la notación ‘no cursiva’ y con los cuadrantes rotulados como él lo indicó.

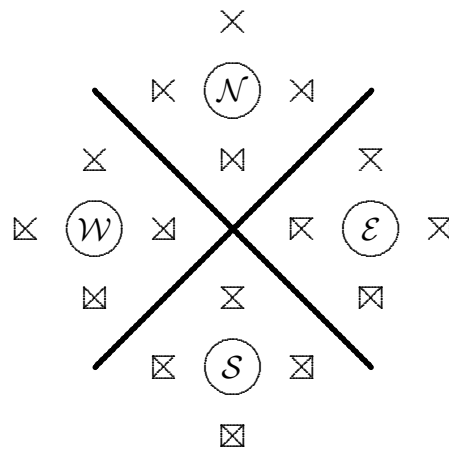


Tabla 5: Clasificación de los conectivos según $x \text{ O } x$.

Si $O \in \mathcal{N}$ entonces $x O x$ es una tautología; si $O \in \mathcal{W}$, la forma equivale a x ; si $O \in \mathcal{E}$ entonces $x O x$ es \bar{x} ; y si $O \in \mathcal{S}$, es siempre F . La ubicación de las cuatro clases en una gran \times es coherente con la convención para cada signo: en el cuadrante superior siempre V , en el inferior siempre F , etcétera.

Esta forma aporta 4 tautologías.

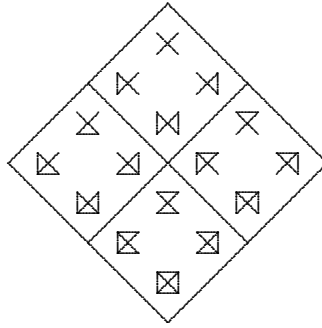


Tabla 6: Clasificación de los conectivos (Tabla inclinada).

Para analizar su simetría, la tabla 5 puede presentarse de manera más concisa como la tabla 6. Esta tabla no es unosimétrica respecto a ningún movimiento rígido salvo el reposo, de hecho no tiene ninguna componente repetida, luego $G_1 = 0$. Es claro que la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a una rotación en 180 grados de cada uno de los signos componentes y que ningún otro movimiento rígido tiene un efecto semejante, luego $G_2 = \mathbb{Z}_2$ y $G_3 = 0$.

La dosimetría mencionada en el párrafo anterior se refiere a la acción natural de D_4 sobre los signos de Peirce. Sobre este conjunto también actúa el grupo $\mathbb{Z}_2 \times D_4$ (el 0 de \mathbb{Z}_2 deja invariante el signo, el 1 lo ‘complementa’: cambia los cuadrantes abiertos en cerrados y viceversa [7, 8]) y respecto a esta acción, la rotación de la tabla 6 en 180 grados corresponde a complementar cada signo mientras la reflexión en el eje horizontal de la tabla corresponde a una rotación en 180 grados seguida del complemento. En este caso, entonces,

$G_2 = V$ y $G_3 = 0$.

No es posible distribuir los conectivos en una tabla inclinada que tenga tresimetría no trivial. Sin embargo, la reflexión de la tabla 7 en su diagonal principal corresponde a la misma reflexión de los conectivos —en el mismo sentido o en sentido contrario—, luego $G_1 = 0$, $G_2 = \mathbb{Z}_2$ y $G_3 = \mathbb{Z}_2$.

\mathcal{N}	\mathcal{E}	\mathcal{W}	\mathcal{S}
\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes

Tabla 7: Clasificación de los conectivos (Tabla horizontal).

7 Segunda Forma

El análisis de la expresión $x \diamond (x \circ x)$ es sencilla en la medida en que contiene la forma $x \circ x$, estudiada de manera completa en el apartado 6. Por ejemplo si $\circ \in \mathcal{N}$ entonces $x \circ x$ es una tautología, de manera que la segunda forma se reduce a $x \diamond V$; para que esta forma sea tautología, basta que \diamond asigne V a los valores VV y FV —los únicos posibles—; en la notación de Peirce, esto equivale a que los cuadrantes superior y derecho estén abiertos. De esta manera, las parejas (\diamond, \circ) que arrojan una tautología de la segunda forma con $\circ \in \mathcal{N}$ son (\boxtimes, \circ) , (\boxtimes, \circ) , (\boxtimes, \circ) y (\times, \circ) .

De la misma manera se analizan las otras tres elecciones posibles de \circ . Los resultados se consignan en la tabla 8 (página 24), no presentada antes ni por Peirce ni por otros investigadores.

Cada punto de la tabla 8 representa 4 fórmulas —el conectivo \circ puede es-

		O			
		\mathcal{N}	\mathcal{W}	\mathcal{E}	\mathcal{S}
\diamond	\boxtimes				
	\boxtimes				
	\boxtimes				
	\boxtimes				
	\boxtimes				
	\boxtimes				
	\boxtimes	•			
	\boxtimes		•		
	\boxtimes			•	
	\boxtimes				•
	\boxtimes			•	•
	\boxtimes	•	•		
	\boxtimes		•		•
	\boxtimes	•		•	
	\boxtimes	•	•	•	•

Tabla 8: Tautologías de la forma $x \diamond (x \text{ O } x)$.

cogerse de un subconjunto de tantos conectivos— luego hay 64 tautologías de la forma $x \diamond (x \text{ O } x)$. De la forma variante $(x \text{ O } x) \diamond x$ hay otras 64 tautologías, de manera que en total se han encontrado ya 132 tautologías.

Es evidente que la tabla 8 no presenta simetría alguna, a menos que los integrantes de las clases \mathcal{N} , \mathcal{W} , \mathcal{E} , \mathcal{S} se distribuyan de manera simétrica respecto al eje vertical, obteniendo unosimetría forzada respecto a este eje.

8 Tercera Forma

Como antes, el estudio de la expresión $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$ se basa en la clasificación inducida por la forma $x \text{ O } x$. Si $\diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{N}$, la forma se reduce a $V \text{ O } V$ que es tautología si O asigna V a la pareja VV , es decir, si su cuadrante superior está abierto. De esta manera, las ternas $(\diamond, \text{O}, \heartsuit)$ con $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{N}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ y $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$. Como otro ejemplo, si $\diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{W}$ entonces la forma se reduce a $V \text{ O } x$ que es tautología si O asigna V a las parejas VV y VF , es decir, si están abiertos sus cuadrantes superior e izquierdo. Las ternas $(\diamond, \text{O}, \heartsuit)$ con $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{W}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ y $(\diamond, \boxplus, \heartsuit)$.

De esta manera pueden estudiarse los dieciséis casos posibles. Hasta donde se sabe, ni Peirce ni otros investigadores han consignado los resultados en una tabla, pero es sencillo hacerlo con la técnica empleada por Peirce para las otras formas. En cada caso, se escoge el conectivo con más cuadrantes cerrados que haga tautología la expresión estudiada. Por ejemplo, para $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{N}$ se escoge \boxtimes ; para $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{W}$ se escoge \boxplus . Todas las demás soluciones se obtienen abriendo uno por uno los cuadrantes cerrados del conectivo elegido, en todas las formas posibles. En el primer ejemplo se consigna \boxtimes y las soluciones posibles son $\boxtimes, \boxplus, \boxtimes, \boxplus, \boxtimes, \boxplus, \boxtimes, \boxplus$; en el segundo ejemplo se registra \boxplus y las soluciones posibles son $\boxplus, \boxtimes, \boxplus, \boxtimes$.

La tabla 9 contiene todos los conectivos ‘máximos’. En la intersección de la fila \mathcal{N} y la columna \mathcal{N} está \boxtimes ; en la intersección de la fila \mathcal{N} y la columna \mathcal{W} está \boxplus .

¿Cuántas tautologías contiene la tabla 9? Si en la casilla i aparece un conectivo con n_i cuadrantes cerrados, está representando un conjunto de 2^{n_i} posi-

		♡			
		\mathcal{N}	\mathcal{S}	\mathcal{W}	\mathcal{E}
◇	\mathcal{N}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{S}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{W}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{E}	⊠	⊠	⊠	⊠

Tabla 9: Tautologías de la forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$.

bles soluciones. La suma $\sum 2^{n_i}$ es 80 pero esa cantidad debe multiplicarse por 16, el número de las posibles elecciones de la pareja (\diamond, \heartsuit) —cada componente puede elegirse de un conjunto de 4 elementos—. Así hay 1280 tautologías de la forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$, para un total acumulado de 1412 tautologías.

La tabla 9 no es unosimétrica respecto a ningún movimiento rígido no trivial —pues contiene más de una componente que no se repite—, es decir, $G_1 = 0$. La reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión en el eje vertical de las componentes, de hecho $G_2 = \mathbb{Z}_2$ y $G_3 = 0$.

Pero si se cambia el orden de las filas y las columnas, la simetría aumenta de manera considerable. La tabla 10 es la misma 9 cambiando el orden $\mathcal{N} - \mathcal{S} - \mathcal{W} - \mathcal{E}$ por $\mathcal{N} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{S}$.

		♡			
		\mathcal{N}	\mathcal{E}	\mathcal{W}	\mathcal{S}
◇	\mathcal{N}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{E}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{W}	⊠	⊠	⊠	⊠
	\mathcal{S}	⊠	⊠	⊠	⊠

Tabla 10: Forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$.

En la tabla 10, además de la dosimetría mencionada en la anterior, la reflexión de la tabla en la segunda diagonal corresponde a la reflexión en el eje horizontal de las componentes y, por lo tanto, la rotación en 180 grados de la tabla corresponde a la misma rotación de los signos. Más aun, la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión en la diagonal principal de los signos; la reflexión de la tabla en el eje horizontal corresponde a la reflexión en la segunda diagonal de los signos; por lo tanto, la rotación en 90 grados de la tabla corresponde a la misma rotación —en el mismo sentido— de las componentes. Así, $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = \mathbb{Z}_2$.

Peirce presentó sus diversas tablas siempre inclinadas (\diamond). Al inclinar la tabla 10... *¡aumenta la tresimetría!*

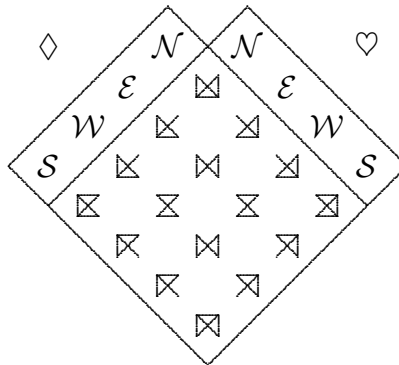


Tabla 11: Forma $(x \diamond x)$ O $(x \heartsuit x)$ (Tabla inclinada).

En la presentación 11, las reflexiones de la tabla en los ejes corresponden a los mismos movimientos rígidos de las componentes —en sentido contrario, porque son de orden 2— luego ahora $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = V$.

Otra manera sorprendente de aumentar la tresimetría de la tabla 10 es reflejándola en su diagonal principal, pues mientras la simetría respecto a las reflexiones se mantiene, la rotación en 90 grados de la tabla corresponde a la misma rotación *en sentido contrario* de las componentes. En la tabla 12 se tiene $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = \mathbb{Z}_4$.

		\diamond			
		\mathcal{N}	\mathcal{E}	\mathcal{W}	\mathcal{S}
\mathcal{N}	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\mathcal{E}	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\mathcal{W}	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\mathcal{S}	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes

Tabla 12: Forma $(x \diamond x)$ O $(x \heartsuit x)$ (Tabla traspuesta).

Ahora tal vez ya no es tan extraño el hecho de que al inclinar la tabla 12, o lo que es lo mismo, al reflejar la tabla 11 en el eje vertical, se recibe una tabla *tresimétrica*: en la 13 se tiene $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = D_4$.

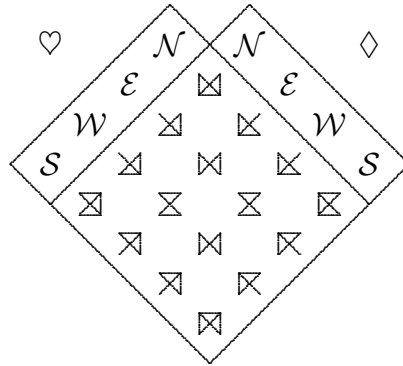


Tabla 13: Forma $(x \diamond x)$ O $(x \heartsuit x)$ (Presentación tresimétrica).

La tabla puesta como ejemplo al principio de este trabajo (página 2) se obtuvo de la tabla 13 cambiando el orden $\mathcal{N} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{S}$ por el orden $\mathcal{S} - \mathcal{E} - \mathcal{W} - \mathcal{N}$. Otra tabla tresimétrica es la 14 (página 29), obtenida de la tabla 11 intercambiando solo tres pares de componentes. Su lectura para las tautologías de la forma $(x \diamond x)$ O $(x \heartsuit x)$, sin embargo, se complica pues en ella cada cuadrante tiene sus propios rótulos.

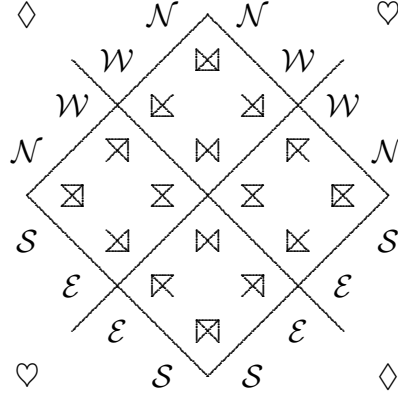


Tabla 14: Forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$ (Otra presentación tresimétrica).

9 Cuarta Forma

La expresión $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ se diferencia de manera sutil de la forma estudiada en el apartado 8. En vez de una variable proposicional ahora aparecen dos —lo cual hace disminuir el número de tautologías posibles— pero aparecen de manera ordenada —lo cual permite considerar de manera simultánea las expresiones $x \diamond y$ y $x \heartsuit y$ —. La técnica empleada por Peirce para encontrar todas las tautologías de esta forma consiste en escoger de manera libre los conectivos \diamond y \heartsuit y, a partir de ellos, encontrar los conectivos O que hagan siempre verdadera la expresión analizada. Por ejemplo, si \diamond es \boxtimes y \heartsuit es \boxtimes entonces $x \diamond y$ siempre es F y $x \heartsuit y$ puede tomar los valores V y F , luego se requiere que O asigne V a las combinaciones FV y FF o, lo que es lo mismo, que sus cuadrantes derecho e inferior estén abiertos: en este caso, las soluciones posibles para O son \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes . Si \diamond es \boxtimes y \heartsuit es \boxtimes entonces $x \diamond y$ toma los valores F, F, F, V —en ese orden— mientras $x \heartsuit y$ toma los valores V, F, F, V ; la forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ se reduce a las cuatro posibilidades $F \text{ O } V, F \text{ O } F, F \text{ O } F, V \text{ O } V$; para obtener una tautología se requiere que O asigne V a las parejas FV, FF, VV , es decir,

que sus cuadrantes superior, derecho e inferior estén abiertos; las soluciones posibles para \circ son \bowtie y \times .

Como en el apartado anterior, la tabla 15 (página 30) contiene en cada casilla el conector \circ máximo que arroja una tautología de esta forma. En la intersección de la fila \boxtimes y la columna \bowtie está \boxtimes ; en la intersección de la fila \boxtimes y la columna \boxtimes está \boxtimes .

\heartsuit

	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\bowtie	\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times
\boxtimes	\bowtie	\times	\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\boxtimes	\bowtie	\times	\times	\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\boxtimes	\bowtie	\times	\times	\times	\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\boxtimes	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\diamond	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie	\times
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\bowtie
\times	\bowtie	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\times

Tabla 15: Tautologías de la forma $(x \diamond y) \circ (x \heartsuit y)$.

La suma $\sum 2^{n_i}$ para la tabla 15 es 680 luego el número total de tautologías encontradas hasta el momento asciende a 2092. Aunque Peirce no lo hizo, con facilidad podría estudiarse la forma variante $(x \diamond y) \circ (y \heartsuit x)$, para

lo cual sería suficiente ‘convertir’ (reflejar en el eje vertical) el conectivo \heartsuit en la tabla 15. Esto aportaría otras 680 tautologías nuevas para un total acumulado de 2772.

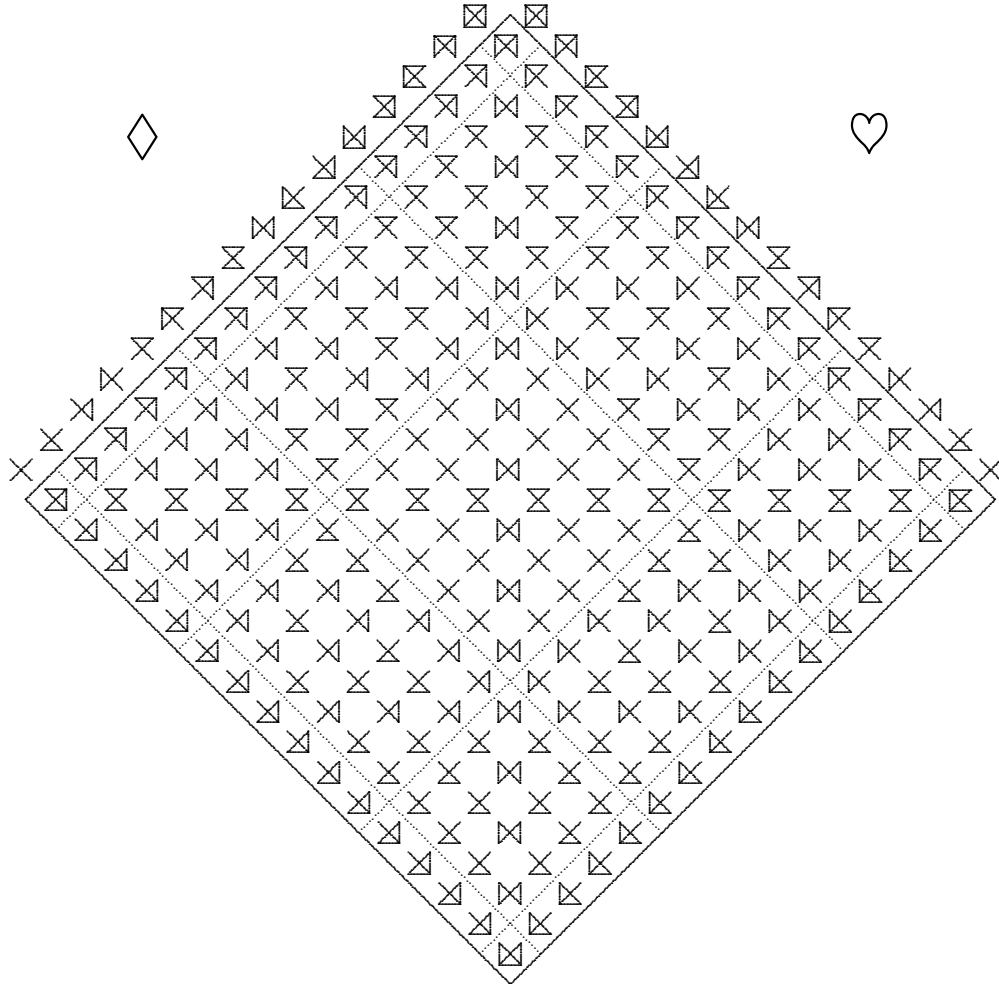


Tabla 16: Forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$ (Tabla inclinada).

Basta observar las esquinas de la tabla 15 para probar que no es unosimétrica respecto a movimiento rígido alguno, de manera que $G_1 = 0$. Las dosimetrías son más ricas: la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde

a la reflexión de cada componente en el eje vertical, mientras la reflexión en la segunda diagonal corresponde a la reflexión de cada signo en el eje horizontal. De manera *simétrica*, la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión de cada componente en la diagonal principal y la reflexión de la tabla en el eje horizontal equivale a la reflexión de cada signo en la segunda diagonal. La rotación de la tabla en 90 grados —en cualquier sentido— equivale a la rotación de las componentes en 90 grados —en el mismo sentido—, luego la rotación de la tabla en 180 grados corresponde a la rotación de cada signo en 180 grados —en el mismo sentido o en el sentido contrario, pues este movimiento es de orden 2—. En resumen, $G_2 = D_4$ mientras $G_3 = \mathbb{Z}_2$.

Obsérvese que las dosimetrías de esta tabla corresponden *de manera exacta* a las de la tabla 10. En realidad, la ‘subtabla’ 4×4 de la tabla 15 obtenida al considerar solo las filas y columnas $\boxtimes - \boxtimes - \boxtimes - \boxtimes$ es la tabla 10 rotada 180 grados.

Una versión de esta tabla 15 aparece en 4.273 de *Collected Papers* [15], con la notación usada por los editores. De la tabla presentada allí, los editores dicen que “es una representación más clara (y precisa) de la tabla dada por Peirce, en razón de una reducción en el número de signos usados”. El estudio presente permite refutar de manera técnica esa afirmación: el grupo D_4 no actúa de manera *natural* sobre el conjunto de signos colocados por los editores, y la dosimetría y tresimetría de la tabla 15 se ocultan totalmente.

La tabla original dada por Peirce para este caso es inclinada y, al igual que en el caso anterior, con ello aumenta la tresimetría: en la tabla 16 (página 31) se tiene $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$ y $G_3 = V$. Salvo el orden de los conectivos, esta es la misma tabla 2 (página 4) elaborada por Peirce en 1902 [2].

Igual que en la sección 8, si la tabla 15 se refleja en la diagonal principal su tresimetría aumenta a $G_3 = \mathbb{Z}_4$; si la tabla de Peirce (cualquiera de las

tablas 2 o 16) se refleja en el eje vertical —cambiando los lugares de \diamond y \heartsuit — resulta una tabla tresimétrica, esto es, con $G_3 = D_4$.

10 Quinta Forma

Es evidente que el estudio de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$ es más complejo que el de las formas anteriores, pues aumenta el número de variables proposicionales y el de conectivos. Para esta forma Peirce renuncia a encontrar *todas* las tautologías, como lo ha logrado en las formas anteriores, y se conforma con *algunas*. Por ejemplo, no cuenta las $16^4 = 65536$ tautologías ‘triviales’ que se obtienen cuando el conectivo principal \heartsuit es \times .

La técnica empleada por Peirce puede describirse como sigue. En primer lugar, se escogen los conectivos \heartsuit, \diamond de tal manera que la forma auxiliar $P\heartsuit(Q\diamond R)$ sea verdadera excepto quizás para cierta combinación preestablecida de valores para P, Q, R . Luego se determinan los conectivos $\spadesuit, \clubsuit, \circ$ de tal manera que las tres proposiciones $(x \spadesuit y), (y \clubsuit z), x \circ z$ no tomen los valores establecidos. Por una razón muy precisa —que no se explica aquí— Peirce rotuló las combinaciones preestablecidas con $\boxtimes, \boxminus, \boxplus$ y \boxtimes .

Sin entrar en los detalles del cálculo de las tablas, el procedimiento para encontrar tautologías es el siguiente. En primer lugar se escoge un pivote del conjunto $\{\boxtimes, \boxminus, \boxplus, \boxtimes\}$. En segunda instancia y con la tabla 17, se toma una pareja de conectivos (\heartsuit, \diamond) entre las dos asignadas al pivote elegido.

pivote	\boxtimes	\boxminus	\boxplus	\boxtimes
$\heartsuit \diamond$	$\times \times$	$\times \times$	$\times \times$	$\times \times$
	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$	$\times \boxtimes$

Tabla 17: Conectivos \heartsuit, \diamond para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$.

Para los conectivos restantes se procede como en el apartado 9. Se toman de manera libre dos conectivos \spadesuit, \clubsuit ; en la esquina superior izquierda de la tabla 18 (página 34) se busca el pivote escogido; en la columna del pivote se toma \spadesuit y en la fila del mismo se toma \clubsuit ; al interior de la tabla, en el cruce de la fila y la columna correspondientes, se encuentra el conectivo máximo O que completa la tautología.

\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\times	\times	\times	\times	\times	\times	\boxtimes	\times	\times	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\times	\times	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\times	\times	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
\boxtimes	\boxtimes	\times	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes

Tabla 18: Conectivos \spadesuit, \clubsuit, O para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)]$.

Por ejemplo, se escoge el pivote \boxtimes . De la tabla 17 se toma $(\heartsuit, \diamond) = (\boxtimes, \boxtimes)$. Se escogen $(\spadesuit, \clubsuit) = (\boxtimes, \boxtimes)$ y la tabla 18 indica —buscando \boxtimes en la segunda columna exterior y \boxtimes en la primera fila exterior— que puede tomarse $O = \boxtimes$

o cualquier conectivo obtenido de él abriendo sus cuadrantes cerrados. Luego

$$(x \boxtimes y) \boxtimes [(y \boxtimes z) \boxtimes (x \boxtimes z)]$$

es una tautología.

La suma $\sum 2^{n_i}$ para la tabla 18 es 1699, cantidad que debe multiplicarse por la cantidad de pivotes y luego por la de opciones que da la tabla 17 a cada pivote, así que este método arroja 13592 tautologías de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$. Pero el mismo Peirce consideró las siguientes doce variantes de esta forma, que pueden atacarse con el mismo método —de hecho, la tabla 18 sirve para todas las variantes—.

$$\begin{array}{ll}
 (x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)] & [(x \spadesuit y) \diamond (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \circ z) \\
 (x \spadesuit y) \heartsuit [(x \circ z) \diamond (y \clubsuit z)] & [(x \spadesuit y) \diamond (x \circ z)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
 (y \clubsuit z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamond (x \circ z)] & [(y \clubsuit z) \diamond (x \spadesuit y)] \heartsuit (x \circ z) \\
 (y \clubsuit z) \heartsuit [(x \circ z) \diamond (x \spadesuit y)] & [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)] \heartsuit (x \spadesuit y) \\
 (x \circ z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamond (y \clubsuit z)] & [(x \circ z) \diamond (x \spadesuit y)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
 (x \circ z) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \spadesuit y)] & [(x \circ z) \diamond (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \spadesuit y)
 \end{array}$$

Luego la cantidad de tautologías asciende a $1699 \times 4 \times 2 \times 12 = 163104$. En 4.271 de *Collected Papers* [15] se indica un total de 24376, que debe ser $24576 = 256 \times 4 \times 2 \times 12$, producto obtenido de considerar una tautología por cada casilla de la tabla 18 en vez de 2^{n_i} . El gran total de tautologías halladas por Peirce en las diversas formas estudiadas es entonces 165876.

Se ve de inmediato que la tabla 18 no es unosimétrica ni dosimétrica respecto a movimiento rígido alguno, luego $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ y $G_3 = 0$. El segundo grupo de simetría se conserva al inclinar la tabla, luego en este caso no se gana simetría con ese solo cambio.

Pero Peirce no sólo inclinó la tabla, también *cambió el orden de las filas*. Intercambiando solo cuatro parejas de filas —correspondientes a los 8 conectivos no conmutativos [7, 8]— se logra que las dos columnas exteriores de la tabla 18 sean la imagen especular de las dos filas exteriores: en el puesto i de la columna no está siempre el mismo conectivo que está en el puesto i de la fila, sino el que se obtiene de él por reflexión en el eje vertical. Al inclinar luego la tabla, esa propiedad se extiende a todo el contenido y la tabla interior 16×16 es *tresimétrica respecto a la reflexión en el eje vertical*. En la tabla 19 (página 37) se tiene $G_1 = 0$, $G_2 = \mathbb{Z}_2$, $G_3 = \mathbb{Z}_2$.

De nuevo, salvo el orden de los conectivos, esta tabla 19 es la misma tabla 3 (página 5) dada por Peirce para sintetizar sus resultados en la búsqueda de tautologías de la quinta forma. A la asombrosa tabla de Peirce está ligada una historia casi simbólica: en *Collected Papers* [15] no aparece, pero se la confunde con la tabla 15 (página 30); estuvo perdida durante muchos años en el inmenso legado manuscrito de Peirce; fue reubicada y comprendida apenas en las últimas décadas del siglo XX [2].

La tabla 19 contiene varias subtablas cuadradas simétricas. Por ejemplo si las filas y columnas se agrupan como sigue:

$$\begin{array}{c} 2 - 3 - 4 - 5 \\ 6 - 7 - 10 - 11 \\ 12 - 13 - 14 - 15 \end{array}$$

entonces aparecen nueve bloques 4×4 : el cruce de las filas 2 - 5 con las columnas 12 - 15, el cruce de las filas 6 - 7 - 10 - 11 con las columnas 2 - 5, etcétera. Todos estos bloques son tresimétricos respecto a la rotación en 180 grados mientras los bloques sobre el eje vertical son, además, tresimétricos respecto a la reflexión en los ejes. Es decir, se distinguen por lo menos seis subtablas 4×4 con $G_3 = \mathbb{Z}_2$ y tres con $G_3 = V$.

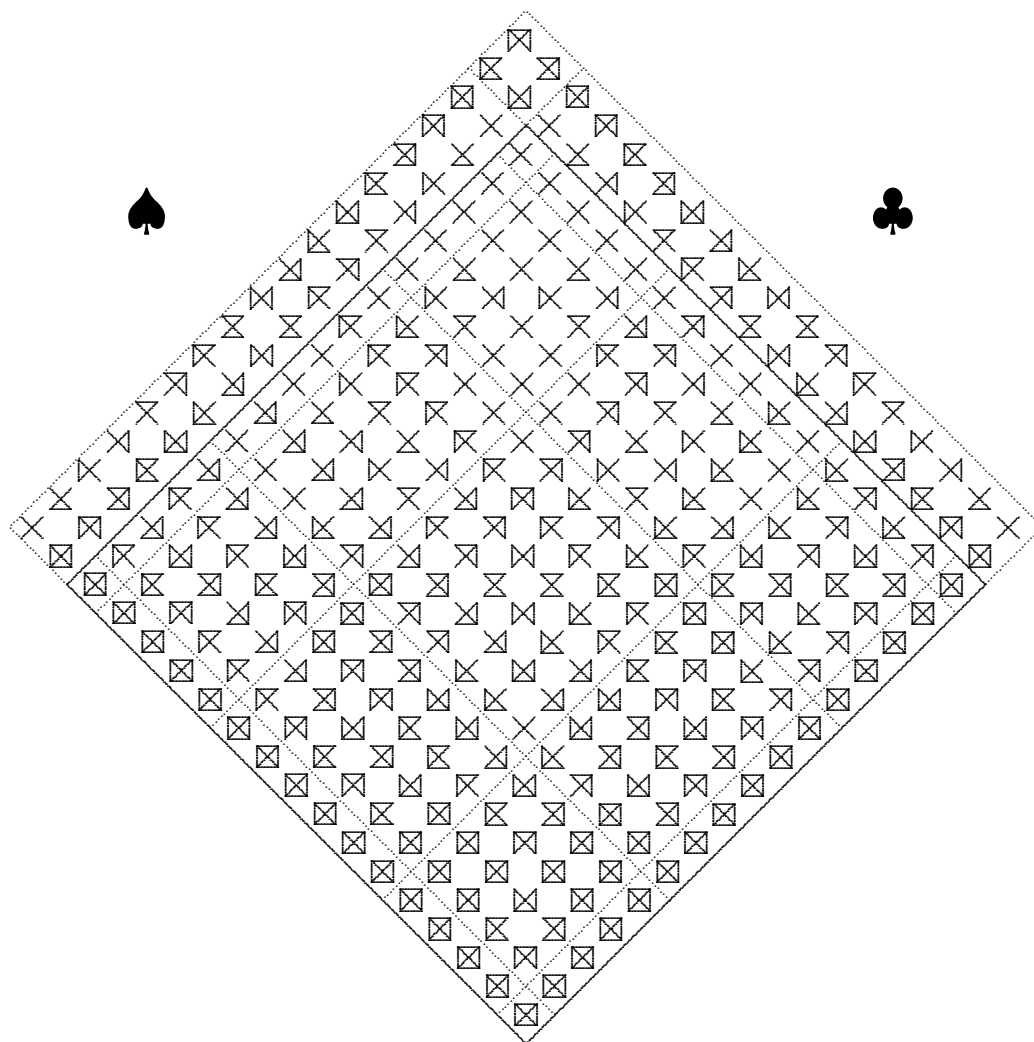


Tabla 19: Forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$ (Tabla inclinada).

La tabla 19 —sin inclinar— se obtuvo de la 18 reflejando en el eje vertical los conectivos de las columnas exteriores y alterando así el orden de las filas. Puede verificarse que al realizar el mismo experimento con todos los movimientos rígidos, solo en cuatro casos se obtiene una tabla con dosimetría

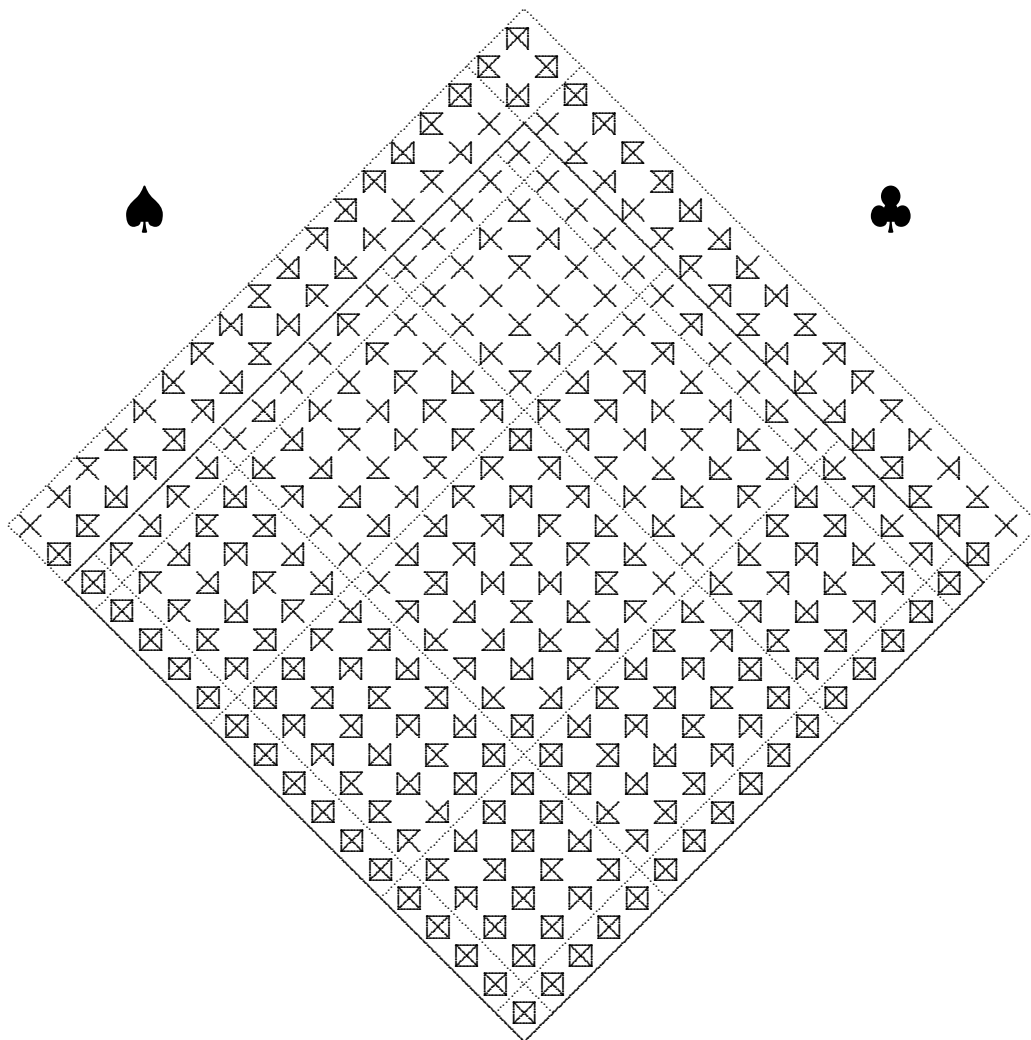


Tabla 20: Forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$ (Otra tabla inclinada).

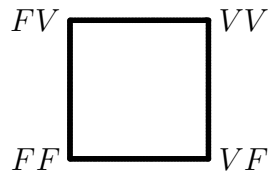
no trivial. En dos casos la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje vertical mientras en los otros dos corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje horizontal. Por lo tanto, con este método sólo pueden obtenerse *dos* tablas con tresimetría no

trivial: una es la tabla 19 —debida a Peirce—, la otra es la tabla 20 (página 38). En la tabla 20, en el puesto i de la columna exterior está el conectivo que se obtiene por rotación en 90 grados del que está en el puesto i de la correspondiente fila. De nuevo $G_1 = 0$, $G_2 = \mathbb{Z}_2$, $G_3 = \mathbb{Z}_2$ y esta tabla tiene las mismas subtablas simétricas 4×4 indicadas en la tabla 19.

11 Tablas con la Notación de Zellweger

Durante las últimas décadas del siglo XX, el investigador norteamericano Shea Zellweger desarrolló una notación para los conectivos binarios [1, 19]. Él mismo indica que su trabajo es “una continuación directa de lo que se encuentra en Peirce”, pero introduce varios cambios pequeños que conducen a una notación que, además de compartir el carácter icónico de la notación debida a Peirce, presenta algunas ventajas sobre ésta como el hecho de que la mayoría de los signos empleados son letras del alfabeto común y las demás son variantes de ellas.

La idea fundamental de la notación de Zellweger es la siguiente: los cuatro vértices de un cuadrado pueden marcarse con un punto grueso que indica que se asigna V a la correspondiente combinación de valores de verdad. La convención adoptada es la siguiente.



En cada caso, los vértices marcados sugieren ‘ramas’ del símbolo. La tabla 21 muestra los conectivos con sus signos respectivos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	□	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻	◻
	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	ɔ	h	μ	ɗ	ϣ	x

Tabla 21: Notación de Zellweger para los conectivos binarios.

Por su construcción a partir de un cuadrado, sobre este conjunto de signos también actúa de manera natural el grupo diédrico D_4 pero esta acción *no coincide* con la acción natural sobre la notación de Peirce. Por ejemplo el signo \bowtie representa el mismo conectivo que el signo **c**; la reflexión en el eje vertical de \bowtie es \boxtimes que corresponde a **u** mientras la reflexión en el eje vertical de **c** es **ɔ** que corresponde a \boxtimes . Este hecho hace que si las tablas de la sección 5 se miran con la notación de Zellweger entonces, aunque la unosimetría y dosimetría se conservan, la tresimetría con seguridad cambia.

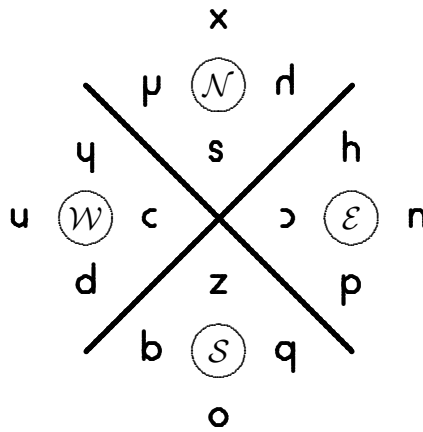


Tabla 22: Clasificación de los conectivos según $x \circ x$.

Con el fin de profundizar en las simetrías presentadas por Peirce, en este apartado se repasarán sus tablas con la notación nueva.

La tabla 22 (página 40) corresponde a la tabla 5 (página 21) y resume el estudio de la forma $x \circ x$. Como allí, $G_3 = 0$.

La tabla 23 es una distribución de los signos por ‘niveles’, casi igual a la tabla 7 (página 23), en la cual de nuevo la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde al mismo movimiento rígido de los conectivos: $G_3 = \mathbb{Z}_2$. No es posible distribuir estos signos de manera similar en una tabla horizontal (\square) con tresimetría no trivial.

Tabla 23: Clasificación de los conectivos (Tabla por niveles).

La tabla correspondiente al estudio de la forma $x \diamond (x \circ x)$ es la misma tabla 8 (página 24) y no vale la pena repetirla.

La tabla 24 (página 42) es la tabla dosimétrica que surge en el estudio de la forma $(x \diamond x) \circ (x \heartsuit x)$ (tabla 10, página 26), con la notación de Zellweger. La reflexión de esta tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en la segunda diagonal y viceversa —luego no se gana tresimetría al inclinarla como se hizo en el apartado 8—; la reflexión de la tabla en el eje vertical corresponde a la reflexión de los conectivos en el eje horizontal y viceversa; la rotación de la tabla en 90 grados corresponde a la

$$\diamond \begin{array}{c} \heartsuit \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \mathcal{N} & \mathcal{E} & \mathcal{W} & \mathcal{S} \\ \hline \mathcal{N} & \mathbf{d} & \mathbf{c} & \mathbf{c} & \mathbf{q} \\ \mathcal{E} & \mathbf{u} & \mathbf{s} & \mathbf{z} & \mathbf{n} \\ \mathcal{W} & \mathbf{u} & \mathbf{z} & \mathbf{s} & \mathbf{n} \\ \mathcal{S} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{c} & \mathbf{p} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Tabla 24: Tautologías de la forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$.

misma rotación de los conectivos en sentido contrario. Así, $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = \mathbb{Z}_4$: obsérvese que, en este caso, se ha ganado un poco de tresimetría con el cambio de notación.

Al rotar esta tabla 24 en 90 grados —o, lo que es lo mismo, reflejarla en la diagonal principal y luego en el eje horizontal— se obtiene la tabla 25 que es tresimétrica en el sentido de que $G_3 = D_4$.

$$\heartsuit \begin{array}{c} \diamond \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & \mathcal{N} & \mathcal{E} & \mathcal{W} & \mathcal{S} \\ \hline \mathcal{S} & \mathbf{q} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{p} \\ \mathcal{W} & \mathbf{c} & \mathbf{z} & \mathbf{s} & \mathbf{c} \\ \mathcal{E} & \mathbf{c} & \mathbf{s} & \mathbf{z} & \mathbf{c} \\ \mathcal{N} & \mathbf{d} & \mathbf{u} & \mathbf{u} & \mathbf{b} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Tabla 25: Forma $(x \diamond x) \text{ O } (x \heartsuit x)$ (Tabla tresimétrica).

Al traducir a la notación de Zellweger la tabla 15 (página 30) correspondiente a la forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$, se obtiene la tabla 26 (página 43). De nuevo, las dosimetrías de esta tabla coinciden con las de la tabla 24 y aquí también se tiene $G_1 = 0$, $G_2 = D_4$, $G_3 = \mathbb{Z}_4$ ganando un poco de simetría sobre la tabla 15. Al igual que en la forma anterior, basta rotar 90 grados la tabla 26 para obtener la tresimetría $G_3 = D_4$, es la tabla 27 (página 44).



	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	p	d	y	x	
o	p	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	b
p	n	s	h	h	h	h	h	p	h	p	p	p	p	p	p	z	u
b	n	h	s	h	h	h	p	h	p	h	p	p	p	p	z	p	u
q	n	h	h	s	h	p	h	h	p	p	h	p	z	p	p	u	
d	n	h	h	h	s	p	p	p	h	h	h	z	p	p	p	u	
c	n	h	h	d	d	s	x	x	x	x	z	y	y	p	p	u	
u	n	h	d	h	d	x	s	x	x	z	x	y	p	y	p	u	
s	n	d	h	h	d	x	x	s	z	x	x	y	p	p	y	u	
z	n	h	d	d	h	x	x	z	s	x	x	p	y	y	p	u	
n	n	d	h	d	h	x	z	x	x	s	x	p	y	p	y	u	
o	n	d	d	h	h	z	x	x	x	x	s	p	p	y	y	u	
h	n	d	d	d	z	y	y	y	d	d	d	s	y	y	y	u	
p	n	d	d	z	d	y	d	d	y	y	d	y	s	y	y	u	
d	n	d	z	d	d	d	y	d	y	d	y	y	y	y	s	y	u
y	n	z	d	d	d	d	d	y	d	y	y	y	y	y	y	s	u
x	q	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	d

Tabla 26: Tautologías de la forma $(x \diamond y) \circ (x \heartsuit y)$.

En el estudio de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$, la tabla para los conectivos $\spadesuit, \clubsuit, \circ$ (tabla 18) no es dosimétrica respecto a movimiento rígido alguno, $G_2 = 0$, y eso no se altera al cambiar la notación luego no vale la pena repetir aquí dicha tabla.

Al variar el orden de las filas de la tabla 18 (página 34) con la notación de Zellweger, realizando todos los movimientos rígidos posibles sobre los conectivos en las columnas exteriores, de nuevo se obtienen solo cuatro tablas con dosimetría no trivial. Ahora en dos casos la reflexión de la tabla en la diagonal principal corresponde a la reflexión de los conectivos en la misma diagonal



	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	p	d	y	x	
x	b	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	d
y	o	z	p	p	p	p	p	y	p	y	y	y	y	y	s	c	
d	o	p	z	p	p	p	y	p	y	p	y	y	y	s	y	c	
p	o	p	p	z	p	y	p	p	y	y	p	y	s	y	y	c	
h	o	p	p	p	z	y	y	y	p	p	p	s	y	y	y	c	
o	o	p	p	h	h	z	x	x	x	x	s	d	d	y	y	c	
n	o	p	h	p	h	x	z	x	x	s	x	d	y	d	y	c	
z	o	h	p	p	h	x	x	z	s	x	x	d	y	y	d	c	
s	o	p	h	h	p	x	x	s	z	x	x	y	d	d	y	c	
u	o	h	p	h	p	x	s	x	x	z	x	y	d	y	d	c	
c	o	h	h	p	p	s	x	x	x	x	z	y	y	d	d	c	
d	o	h	h	h	s	d	d	d	h	h	h	z	d	d	d	c	
q	o	h	h	s	h	d	h	h	d	d	h	d	z	d	d	c	
b	o	h	s	h	h	h	d	h	d	h	d	d	d	z	d	c	
p	o	s	h	h	h	h	d	h	d	d	d	d	d	z	c		
o	p	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	q	

Tabla 27: Forma $(x \diamond y)$ O $(x \heartsuit y)$ (Tabla tresimétrica).

mientras en los otros dos corresponde a la reflexión de los conectivos en la segunda diagonal. Así pues, con este método sólo pueden obtenerse dos tablas con tresimetría no trivial, ambas horizontales y en ambas $G_1 = 0$, $G_2 = \mathbb{Z}_2$, $G_3 = \mathbb{Z}_2$. En la tabla 28 (página 45), las columnas exteriores se obtienen de las filas correspondientes por rotación de 90 grados de cada conectivo; en la tabla 29 (página 46), por reflexión en la diagonal principal. A pesar de la ‘isomorfía’ aparente, el orden de las filas *no* es el mismo que en las tablas 19 y 20.

p	q	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	μ	η	γ	x
b	d	x	γ	η	μ	h	o	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
o	x	x	x	x	x	x	n	x	x	u	x	u	n	u	n	o	o
q	μ	x	x	x	μ	h	o	n	h	μ	u	x	u	n	b	p	o
p	γ	x	x	x	γ	η	c	n	η	γ	u	x	u	n	d	q	o
d	h	x	μ	h	x	x	x	n	μ	h	u	o	b	p	u	n	o
b	η	x	γ	η	x	x	x	n	γ	η	u	c	d	q	u	n	o
u	n	x	u	n	x	x	x	n	u	n	u	o	o	o	u	n	o
o	c	c	c	c	c	c	q	c	c	d	c	d	q	d	q	o	o
z	s	x	γ	η	μ	h	o	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
s	z	x	μ	h	γ	η	c	n	s	z	u	o	b	p	d	q	o
c	o	o	o	o	o	o	o	p	o	o	b	o	b	p	b	p	o
n	u	x	x	x	u	n	o	n	n	u	u	x	u	n	o	o	o
η	b	o	o	o	b	p	o	p	p	b	b	o	b	p	o	o	o
h	d	c	c	c	d	q	o	q	q	d	d	c	d	q	o	o	o
γ	p	o	b	p	o	o	o	p	b	p	b	o	o	o	b	p	o
μ	q	c	d	q	c	c	c	q	d	q	d	o	o	o	d	q	o
x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Tabla 28: Forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$ (Primera tabla tresimétrica).

Conclusiones

El estudio presentado en esta monografía puede conducir a diversas reflexiones, algunas de las cuales se indican a continuación.

- El desarrollo del trabajo enfatiza un mensaje implícito en la teoría de los signos formulada por Peirce: *la elección de una notación es relevante, más aun, puede jugar un papel decisivo en el trabajo en cuestión*. Por ejemplo con la notación usual de los conectivos, las tablas de Peirce ni

p	q	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	o	h	μ	η	γ	x
b	d	x	γ	η	μ	h	o	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
o	x	x	x	x	x	x	n	x	x	u	x	u	n	u	n	o	o
d	h	x	μ	h	x	x	x	n	μ	h	u	o	b	p	u	n	o
b	η	x	γ	η	x	x	x	n	γ	η	u	c	d	q	u	n	o
q	μ	x	x	x	μ	h	o	n	h	μ	u	x	u	n	b	p	o
p	γ	x	x	x	γ	η	c	n	η	γ	u	x	u	n	d	q	o
n	u	x	x	x	u	n	o	n	n	u	u	x	u	n	o	o	o
o	c	c	c	c	c	c	q	c	c	d	c	d	q	d	q	o	o
s	z	x	μ	h	γ	η	c	n	s	z	u	o	b	p	d	q	o
z	s	x	γ	η	μ	h	o	n	z	s	u	c	d	q	b	p	o
c	o	o	o	o	o	o	p	o	o	b	o	b	p	b	p	o	o
u	n	x	u	n	x	x	x	n	u	n	u	o	o	o	u	n	o
γ	p	o	b	p	o	o	o	p	b	p	b	o	o	o	b	p	o
μ	q	c	d	q	c	c	c	q	d	q	d	o	o	o	d	q	o
η	b	o	o	o	b	p	o	p	p	b	b	o	b	p	o	o	o
h	d	c	c	c	d	q	o	q	q	d	d	c	d	q	o	o	o
x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Tabla 29: Forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)]$ (Segunda tabla tresimétrica).

siquiera podrían escribirse por falta de signos; con la notación empleada por los editores de *Collected Papers* [15], las simetrías observadas en ellas se pierden del todo. La relevancia de la notación, ya subrayada antes por Leibniz (véase por ejemplo [11]), por desgracia se pasa por alto muchas veces en matemáticas y en lógica

- En una tabla tresimétrica, la simetría *local* de las componentes armoniza con la simetría *global* de la tabla y a veces, incluso, la determina. Por ejemplo en algunas tablas con la notación de Peirce, la tresimetría solo se logra inclinando la tabla; en la misma tabla con la notación de

Zellweger, la tresimetría solo se logra con la tabla horizontal. Esta interacción mutua entre lo local y lo global quizás puede —debe— verse como otra aparición del *continuo* de Peirce [18].

- Al final de su tesis sobre los gráficos existenciales de Peirce, Jay Zeman escribió: “...es otro tributo al poder de los gráficos y al ingenio del hombre que pensó por primera vez en ellos” [20]. En todos los trabajos alrededor del legado de Charles S. Peirce vuelven a encontrarse la agudeza y la versatilidad de su mente privilegiada. En este caso, no solo el diseño de la notación y el planteamiento de la búsqueda de tautologías —y su solución— son geniales, también lo es el hecho de que para presentar sus resultados Peirce siempre escogió con exactitud la manera más (tre)simétrica y sencilla.

Bibliografía

- [1] Glenn Clark and Shea Zellweger, *Let the mirrors do the thinking*, Mount Union Magazine **93** (1993), 2–5.
- [2] Glenn Clark, *New light on Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 304–333.
- [3] Gerard Deledalle, *Leer a Peirce Hoy*, Gedisa, Barcelona, 1996.
- [4] M. C. Escher, *Estampas y Dibujos*, Taschen, Köln, 1992.
- [5] Ramón Eduardo Fandiño Arbeláez, *Reflexión de Matrices y Palindromía con Resultados Estadísticos*, Tesis de Magister (Estadística), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1984.

- [6] John B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra* (Third Edition), Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1982.
- [7] Mireya García, Jhon Fredy Gómez y Arnold Oostra, *Simetría y Lógica: La notación de Peirce para los 16 conectivos binarios*, Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá (2001) 1–26.
- [8] Mireya García y Jhon Fredy Gómez, *Notación de Peirce para los Conectivos Binarios*, Tesis (Matemáticos), Universidad del Tolima, Ibagué, 2002.
- [9] Kenneth Hoffman y Ray Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1971.
- [10] Nathan Houser, *Introduction: Peirce as logician*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 1–22.
- [11] Frederick C. Kreiling, *Leibniz*, in: Morris Kline (Ed.), *Mathematics: An Introduction to its Spirit and Use*, W. H. Freeman, San Francisco (1978), 33–38.
- [12] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1965.
- [13] Saunders MacLane and Garrett Birkhoff, *Algebra*, MacMillan, London, 1967.
- [14] Arnold Oostra, *Acercamiento lógico a Peirce*, Boletín de Matemáticas - Nueva Serie **VII** (2000), 60–77.
- [15] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 1–6, Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), Harvard University Press, 1931–1934.

- [16] Humberto Sarria, *Algunos problemas de preservación lineal sobre los espacios de matrices simétricas, antisimétricas y hermitianas*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **XXVI** 99 (2002), 261–270.
- [17] Fernando Zalamea, *Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX*, Mathesis **9** (1993), 391–404.
- [18] Fernando Zalamea, *El Continuo Peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: Una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, 2001.
- [19] Shea Zellweger, *Untapped potential in Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives*, in: Nathan Houser, Don D. Roberts and James Van Evra (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*, Indiana University Press, Bloomington and Indianapolis (1997), 334–386.
- [20] J. Jay Zeman, *The Graphical Logic of C. S. Peirce*, Ph. D. dissertation, University of Chicago, 1964.