

GEOMETRÍA AFÍN DEL Λ -DODECAEDRO

Luis Enrique Ruiz Hernández

Profesor Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Duitama, Colombia

leruizh@hotmail.com

Resumen

Se indaga sobre la geometría afín del Λ -dodecaedro, uno de los 92 poliedros convexos (no uniformes) de caras regulares mixtas. Es un 12-edro con simetría central y un eje de simetría, de cuatro caras cuadradas en su zona ecuatorial y cuatro caras triangulares en cada polo (Ver Figura 1), cuyas propiedades descriptivas son tabuladas en una matriz Λ de orden 2×5 . Su imagen automorfa afín es el Λ -dodecaedro afín (Ver Figura 2), considerado estratégicamente como una esfera respecto a una norma sobre \mathbb{R}^3 , concebida para unificar y estudiar la geometría del sólido. También, además de obtener su representación cartesiana, se describe la estereometría del 12-edro afín.

Introducción

Se dice que un poliedro es uniforme si todas sus caras son polígonos regulares (no necesariamente de la misma especie) y todos los vértices son congruentes. Además de las dos familias de prismas y antiprismas (o prismas oblicuos, o prismatoides o prismoides) de caras regulares, hay 18 poliedros convexos uniformes, a saber, los cinco sólidos platónicos y los trece sólidos arquimedianos. En total, 20 poliedros convexos uniformes ([3] pp. 148 - 151; [5] pp. 147 - 149; [6] pp. 187 - 188).

Sin embargo, en general y de acuerdo a V. A. Zalgaller ([11] y N.W. Johnson, existen 92 poliedros convexos de caras regulares no necesariamente de la misma especie, además de los 20 poliedros anteriores ([7] pp. 24 - 27). Uno de tales poliedros es el Λ -dodecaedro (a falta de nombre llamado así en el presente documento), cuyas propiedades descriptivas están tabuladas en una matriz Λ de orden 2×5 (Ver 1.2.1 y definición 1.2). Es un 12-edro convexo con simetría central y un eje de simetría, de cuatro caras cuadradas y ocho caras triangulares (Ver Figura 1).

Su geometría aún se encuentra en un letargo clásico y añejo, razón por la cual, en el presente trabajo, acometeremos un estudio novedoso y sistemático del poliedro, enmarcado en una trama matemática de álgebra lineal, análisis convexo y topología, que potencializa, unifica y clarifica su geometría afín.

En efecto, se indaga sobre el Λ -dodecaedro afín (Ver Figura 2), la imagen automorfa afín del Λ -dodecaedro, considerándolo metodológicamente como una esfera respecto a una norma sobre \mathbb{R}^3 (Lema 2.1). Dicha norma y la combinación lineal promedio de los vértices (Lema 1.5) flexibiliza la geometría del 12-edro afín, obteniéndose para él una representación cartesiana reducida (Teoremas 2.2, 3.1 y Corolario 4.1).

Finalmente, utilizando un importante resultado del álgebra lineal (ignorado en nuestro medio), según el cual se correlaciona el volumen de un sólido y el de su imagen automorfa afín, se describe la estereometría más importante del Λ -dodecaedro afín (Teorema 5.1).

Denotaremos con letra mayúscula los puntos de \mathbb{R}^3 , su producto interior usual por un punto \cdot y el producto vectorial mediante una cruz \times .

Los lemas 1.5 y 2.1, los teoremas 2.2, 3.1 y 5.1, como el corolario 4.1, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. Un dodecaedro de caras regulares mixtas

1.1. Descripción del poliedro

Consideremos el dodecaedro convexo de caras regulares mixtas, vértices V'_1, \dots, V'_{10} y centro

$$G' = \frac{1}{2}(V'_i + V'_{i+5}) \quad i = 1, \dots, 5, \quad (1.1.1)$$

dispuestos como en la Figura 1.

Utilizando la simbología consignada en el libro de Robert Williams ([10] p. 61), entonces el poliedro tiene las siguientes **propiedades descriptivas**,

F_3	F_4	V_4	E_{4-4}	E_{3-4}	
8	4	10	4	8	,

donde F, V y E son las iniciales de las palabras inglesas face (cara), vertex (vértice) y edge (arista). En esta notación los enteros de la segunda fila denotan: 8 caras triangulares (equiláteras), 4 caras cuadradas, 10 vértices con 4 aristas, 4 aristas comunes a caras cuadradas, 8 aristas comunes a caras triangulares y cuadradas, respectivamente.

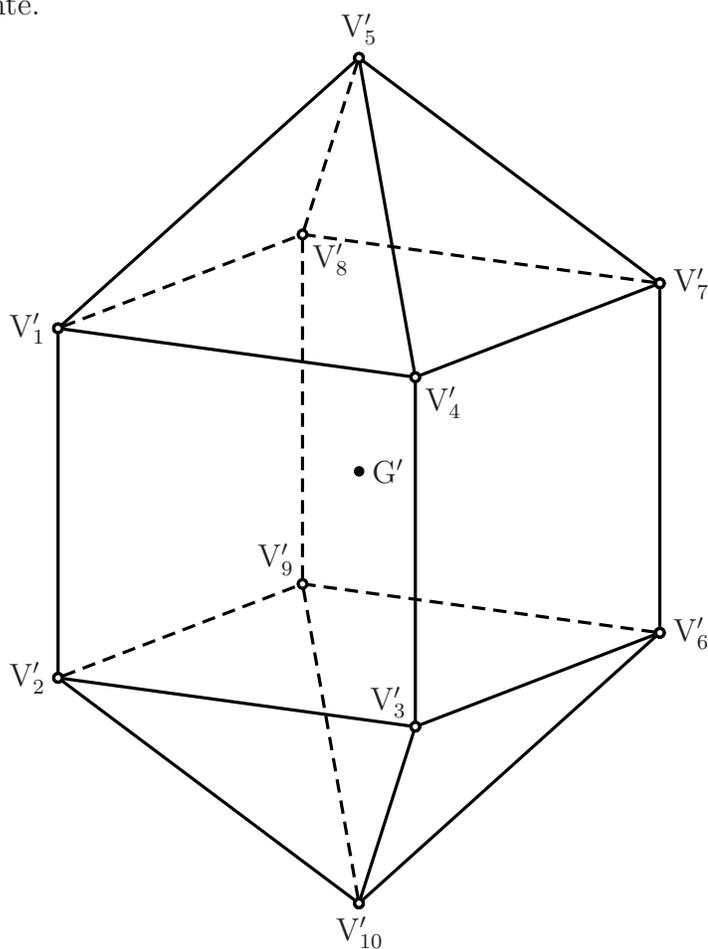


Figura 1: El Λ -dodecaedro de centro $G' = \frac{1}{2}(V'_i + V'_{i+5}), i = 1, \dots, 5$

Fuente: El Autor

1.2. Definición

Por esto, interpretando sus columnas como anteriormente, la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} F_3 & F_4 & V_4 & E_{4-4} & E_{3-4} \\ 8 & 4 & 10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

describe, de manera completa y genérica, el dodecaedro de la Figura 1, el cual llamaremos el Λ -dodecaedro.

1.3. Ilustración

A continuación se dan los vértices de un *Lambda*-dodecaedro de centro el origen $\mathbf{0}$ y arista 2,

$$\begin{cases} V'_1 = (-1, -1, -1) & , & V'_2 = (1, -1, -1) & , \\ V'_3 = (1, 1, -1) & , & V'_4 = (-1, 1, -1) & , \\ V'_5 = (-\sqrt{2} - 1, 0, 0) & , & & \\ V'_{i+5} & , & i = 1, \dots, 5, & \end{cases} \quad (1.3.1)$$

dispuestos como en la Figura 1, donde $V'_1, \dots, V'_4, V'_{i+5} = -V'_i, i = 1, \dots, 4$, son los vértices del cubo de Edmund Hess de centro $\mathbf{0}$ y arista 2 ([4] p. 52).

Si $\theta_{12} = \angle V'_1 \mathbf{0} V'_2$ entonces

$$V'_1 \cdot V'_2 = 1 \quad \text{y} \quad V'_1 \cdot V'_2 = \|V'_1\| \|V'_2\| \cos \theta_{12} = 3 \cos \theta_{12},$$

expresiones que implican

$$\cos \theta_{12} = \frac{1}{3} \quad (1.3.2)$$

1.4. Definición

Un Λ -dodecaedro afín es la imagen de un Λ -dodecaedro bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (Ver Figura 2).

En el siguiente lema se expresa explícitamente cada vértice del Λ -dodecaedro como una combinación lineal promedio (la suma de cuyos coeficientes es uno) del centro y tres vértices fijos.

1.5. Lema

Sea $V'_1 \dots V'_{10}$ un Λ -dodecaedro de centro G' dado en (1.1.1), y vértices dispuestos como en la figura 1. Entonces

$$\begin{cases} V'_4 = V'_1 - V'_2 + V'_3 & , \\ V'_5 = G' + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(V'_1 - V'_2) & , \\ V'_i = 2G' - V'_{i-5} & , \quad i = 6, 7, 8, \\ V'_9 = 2G' - V'_1 + V'_2 - V'_3 & , \\ V'_{10} = G' + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(V'_2 - V'_1) & \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Demostración. Puesto que $V'_1 \dots V'_4$ es un cuadrado, entonces sus lados opuestos son iguales y paralelos, tal como se indica en la primera ecuación de (1.5.1).

Teniendo presente que los puntos $V'_1, \dots, V'_4, V'_{i+5} = 2G' - V'_i, \quad i = 1, \dots, 4$, son los vértices de un cubo de centro G' y circunradio R , entonces por el Teorema del Coseno aplicado al triángulo isósceles $V'_1 G' V'_2$,

$$l^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta_{12} = \frac{4}{3} R^2 \quad (\text{Por (1.3.2)}),$$

o bien,

$$l = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \quad , \quad (1.5.2)$$

donde l es la arista del Λ -dodecaedro. Se sigue para la diagonal d del cuadrado $V'_1 V'_4 V'_7 V'_8$ (esto es, de las caras cuadradas del Λ -dodecaedro) la expresión

$$d = \frac{2}{3}\sqrt{6} R \quad (1.5.3)$$

Ahora, dado que los cuatro triángulos en V'_5 y $V'_{10} = 2G' - V'_5$ son equiláteros (Ver Figura 1), entonces las pirámides regulares que determinan tienen como bases dos caras opuestas del mencionado cubo, cuyos centros son las proyecciones ortogonales (sobre dichas caras) de sus ápices V'_5 y V'_{10} . Por esto la recta a través de éstos dos puntos, es un eje de simetría común del cubo y el Λ -dodecaedro. Y por ende, los vectores $V'_1 - V'_2$ y $V'_5 - G'$ son paralelos y del mismo sentido, es decir, existe un escalar $t > 0$ tal que

$$V'_5 - G' = t(V'_1 - V'_2) \quad (1.5.4)$$

De este modo, si C es el centro del cuadrado $V'_1 V'_4 V'_7 V'_8$ (la base de la pirámide de ápice V'_5) entonces por el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $V'_1 C V'_5$,

$$C V'_5 = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad ,$$

esto es, según (1.5.2) y (1.5.3),

$$C V'_5 = \frac{\sqrt{6}}{3} R \quad , \quad (1.5.5)$$

razón por la cual

$$\|V'_5 - G'\| = \frac{l}{2} + C V'_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + \sqrt{2}) R$$

De aquí, al tomar norma en ambos miembros de (1.5.4), hallamos

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + \sqrt{2}) R = t \|V'_1 - V'_2\| = lt,$$

lo que implica, a la luz de (1.5.2),

$$t = \frac{1 + \sqrt{2}}{2},$$

y por ende,

$$V'_5 = G' + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(V'_1 - V'_2)$$

Las demás combinaciones lineales promedio para V'_6, \dots, V'_{10} en (1.5.1) resultan de (1.1.1),

$$V'_{i+5} = 2G - V'_i \quad ,$$

teniendo en mente las correspondientes combinaciones lineales promedio de V'_4 y V'_5 .

2. Geometría y Topología del Λ -Dodecaedro afín

2.1. Lema

Si $a > 0$ y A, B, C son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , entonces la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representada por

$$\varphi(X) = \max \left\{ a(|A \cdot X| + |B \cdot X|) + |C \cdot X|, |A \cdot X| + |B \cdot X| \right\} \quad (2.1.1)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. Siendo $a > 0$ y el valor absoluto una función no negativa, la afirmación $\varphi(X) = 0$ es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$A \cdot X = 0 \quad , \quad B \cdot X = 0 \quad , \quad C \cdot X = 0 \quad ,$$

para el cual $\det(A, B, C) \neq 0$ por ser A, B y C linealmente independientes. La solución única del sistema es, por tanto, $X = \mathbf{0}$.

La propiedad $\varphi(\lambda X) = |\lambda|\varphi(X)$, λ es un escalar, es inmediata de la misma representación de φ en (2.1.1). Además, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} a\{|A \cdot (X + Y)| + |B \cdot (X + Y)|\} + |C \cdot (X + Y)| &\leq \left\{ a(|A \cdot X| + |B \cdot X|) + |C \cdot X| \right\} \\ &+ \left\{ a(|A \cdot Y| + |B \cdot Y|) + |C \cdot Y| \right\} \leq \varphi(X) + \varphi(Y) \quad (\text{Por (2.1.1)}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |A \cdot (X + Y)| + |B \cdot (X + Y)| &\leq (|A \cdot X| + |B \cdot X|) + (|A \cdot Y| + |B \cdot Y|) \\ &\leq \varphi(X) + \varphi(Y) \quad (\text{Por (2.1.1)}) \end{aligned}$$

relaciones que implican

$$\varphi(X + Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Concluimos que φ es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

2.2. Teorema

Sean A, B y C vectores en \mathbb{R}^3 . tales que

$$\Delta = \det(A, B, C) \neq 0 \quad \text{y} \quad A \cdot C = B \cdot C = 0 \quad (2.2.1)$$

Si $r > 0$ y G es un vector de \mathbb{R}^3 , hagamos

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = G + \frac{r}{\Delta} A \times C + (\sqrt{2} - 1) r \|C\|^{-2} C \quad , \\ V_2 = G + \frac{r}{\Delta} A \times C - (\sqrt{2} - 1) r \|C\|^{-2} C \quad , \\ V_3 = G + \frac{r}{\Delta} B \times C - (\sqrt{2} - 1) r \|C\|^{-2} C \quad , \\ V_4 = G + \frac{r}{\Delta} B \times C + (\sqrt{2} - 1) r \|C\|^{-2} C \quad , \\ V_5 = G + r \|C\|^{-2} C \quad , \quad \text{y} \\ V_{i+5} = 2G - V_i \quad , \quad i = 1, \dots, 5 \end{array} \right. \quad (2.2.2)$$

Si φ es la norma sobre \mathbb{R}^3 representada en (2.1.1) con

$$a = 2 - \sqrt{2} \quad ,$$

entonces $S_r[G]$, la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a φ , es un *Lambda*-dodecaedro afín macizo y cerrado, de centro G y vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 2, con las siguientes características

(i) $V_1 \dots V_4, V_4 V_3 V_6 V_7$ (y sus opuestas respecto a G) son caras rectangulares del poliedro, por lo cual la recta $\overleftrightarrow{V_5 V_{10}}$ es un eje de simetría del mismo, y así el paralelepípedo $V_1 \dots V_4 V_6 \dots V_9$ de centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad , \quad i = 1, \dots, 4,$$

tiene rectangulares las cuatro caras laterales paralelas a dicho eje

(ii) El paralelogramo $V_1 V_4 V_7 V_8$ (y su opuesto respecto a G) es un rectángulo (esto es, $V_1 \dots V_4 V_6 \dots V_9$ es un ortoedro), si y solo si $\|A\| = \|B\|$

(iii) Los planos faciales del poliedro tienen las siguientes representaciones. Las caras (triángulos y rectángulos)

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \dots V_4 \quad , \quad V_3 V_6 V_7 V_4 \quad , \quad V_1 V_4 V_5 \quad , \\ V_4 V_7 V_5 \quad , \quad V_7 V_8 V_5 \quad , \quad V_8 V_1 V_5 \quad , \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

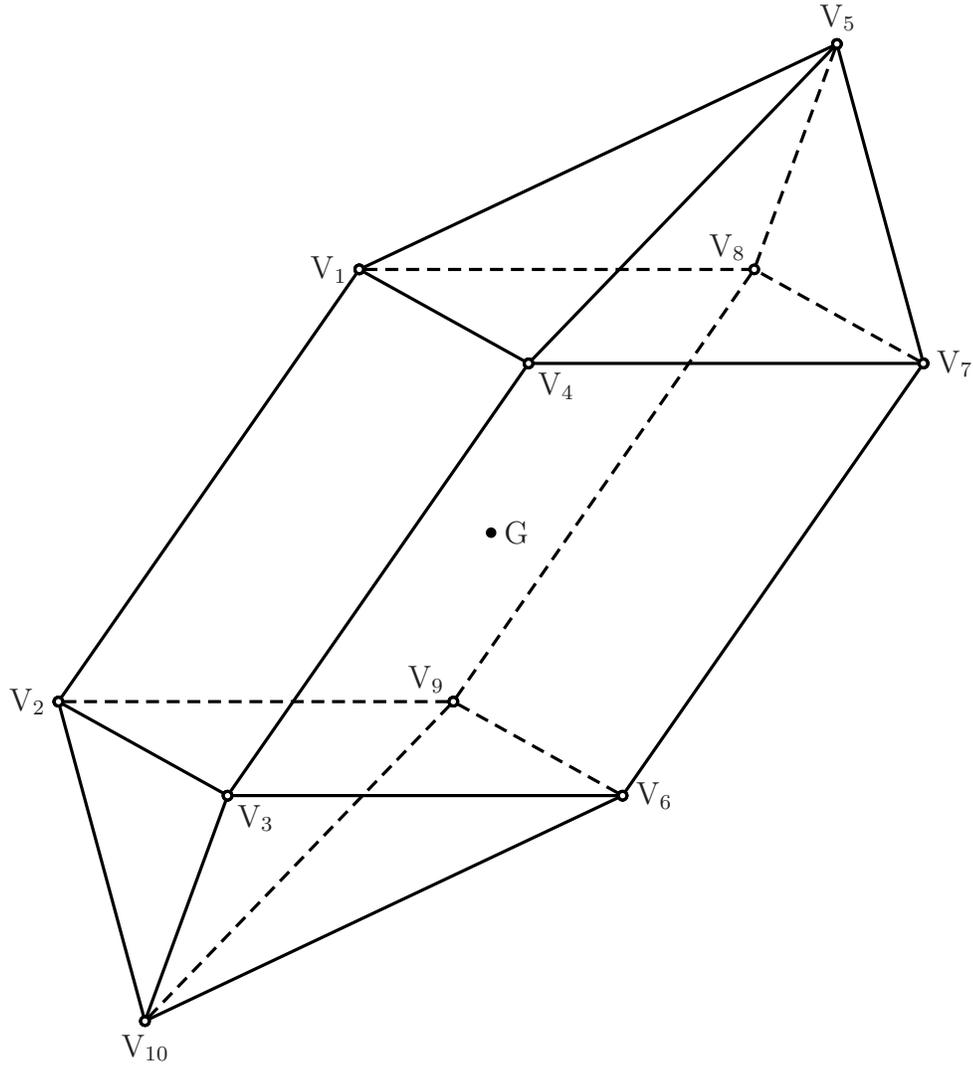


Figura 2: $G + \varphi^{-1}([0, r])$ es un Λ -dodecaedro afín de centro G , para cada $r > 0$
 Fuente: El Autor

están en los planos

$$\begin{cases} (A - B) \cdot (X - G) = r & , & (A + B) \cdot (X - G) = r & , \\ (aA - aB + C) \cdot (X - G) = r & , & (aA + aB + C) \cdot (X - G) = r & , \\ (-aA + aB + C) \cdot (X - G) = r & , & (-aA - aB + C) \cdot (X - G) = r & , \end{cases} \quad (2.2.4)$$

respectivamente.

Los planos faciales de sus correspondientes caras opuestas (y paralelas) respecto a G , tienen representaciones de la misma forma anterior, cambiando r por $-r$.

Demostración. Aplicando propiedades de los determinantes y la relación $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$, encontramos que

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = \frac{2r^3}{\Delta} (\sqrt{2} - 1) \neq 0,$$

teniendo presente (2.2.1); es decir, G, V_1, V_2, V_3 son afín mente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, V'_3 en el Λ -dodecaedro de la Figura 1 (de hecho no degenerado).

Por tanto existe un único automorfismo afín $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(G') = G, \quad f(V'_k) = V_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.2.5)$$

([2] p. 429; [8] p. 8).

Puede verificarse que los puntos V_4, \dots, V_{10} definidos en (2.2.2) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2, V_3 , análogas a las correspondientes en (1.5.1). Por tanto, se sigue de (1.5.1) y (2.2.5) que

$$f(V'_i) = V_i, \quad i = 1, \dots, 10,$$

dado que f preserva tales combinaciones. Se sigue, de acuerdo a la definición 1.4, que $V_1 \dots V_{10}$ es un Λ -dodecaedro afín de centro G y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 2.

A continuación trataremos con los planos faciales de $V_1 \dots V_{10}$:

$$(A - B) \cdot (V_1 - G) = (A - B) \cdot \left\{ \frac{r}{\Delta} A \times C + (\sqrt{2} - 1) r \|C\|^{-2} C \right\} \quad (\text{Por (2.2.2)})$$

$$= -\frac{r}{\Delta} B \cdot A \times C \quad (\text{Por (2.2.1)})$$

$$= -\frac{r}{\Delta} \det(B, A, C) = \frac{r}{\Delta} \det(A, B, C) = r$$

Análogamente se prueba que los vértices V_2, V_3, V_4 satisfacen $(A - B) \cdot (X - G) = r$. Procediendo de este modo y según (2.2.2), se demuestra que las caras (2.2.3) del dodecaedro están, respectivamente, en los planos dados en (2.2.4). Similarmente para los planos faciales de sus caras opuestas.

Consideremos ahora el dodecaedro $V_1 \dots V_{10}$ como un sólido macizo cerrado \mathfrak{C} , esto es,

$$\mathfrak{C} = \text{conv}\{V_1 \dots V_{10}\},$$

la envolvente convexa de sus vértices ([8] p. 158 Theorem 17,2; p.12 Corollary 2.3.1). Siendo cada X en \mathfrak{C} una combinación convexa de la forma

$$\begin{aligned}
 X &= \sum_{j=1}^{10} \lambda_j V_j = \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} V_{j+5} = \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j \\
 &\quad + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} (2G - V_j) \quad (\text{Por (2.2.2)}) \\
 &= \sum_{j=1}^{10} \lambda_j \{(V_j - G) + G\} - \sum_{j=1}^{10} \lambda_{j+5} \{(V_j - G) - G\} \\
 &= G + \sum_{j=1}^5 (\lambda_j - \lambda_{j+5})(V_j - G),
 \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{10} = 1 \quad \text{y} \quad \text{cada} \quad \lambda_i \geq 0 \quad ,$$

se desprende

$$\begin{cases}
 (X - G) \cdot A = r\{(\lambda_3 - \lambda_8) + (\lambda_4 - \lambda_9)\} \quad , \\
 (X - G) \cdot B = r\{-(\lambda_1 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_7)\} \quad , \\
 (X - G) \cdot C = r\{(\sqrt{2} - 1)[(\lambda_1 - \lambda_6) - (\lambda_2 - \lambda_7) - (\lambda_3 - \lambda_8)] \\
 \quad + (\lambda_4 - \lambda_9) + (\lambda_5 - \lambda_{10})\} \quad ,
 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

expresiones, que de acuerdo a la desigualdad triangular, arrojan

$$\begin{aligned}
 &a\{|A \cdot (X - G)| + |B \cdot (X - G)|\} + |C \cdot (X - G)| \\
 &\leq a\{r(|\lambda_3 - \lambda_8| + |\lambda_4 - \lambda_9|) + r(|\lambda_1 - \lambda_6| + |\lambda_2 - \lambda_7|)\} \\
 &\quad + r\{(1 - a)(|\lambda_1 - \lambda_6| + |\lambda_2 - \lambda_7| + |\lambda_3 - \lambda_8| + |\lambda_4 - \lambda_9|) + |\lambda_5 - \lambda_{10}|\} \\
 &= \left\{ a \sum_{j=1}^4 |\lambda_j - \lambda_{j+5}| + (1 - a) \sum_{j=1}^4 |\lambda_j - \lambda_{j+5}| + |\lambda_5 - \lambda_{10}| \right\} \\
 &= r \sum_{j=1}^5 |\lambda_j - \lambda_{j+5}| \leq r(\lambda_1 + \dots + \lambda_{10}) = r \quad ,
 \end{aligned}$$

y

$$|A \cdot (X - G)| + |B \cdot (X - G)| \leq r \sum_{j=1}^4 |\lambda_j - \lambda_{j+5}| \leq r \sum_{j=1}^5 |\lambda_j - \lambda_{j+5}| \leq r(\lambda_1 + \dots + \lambda_{10}) = r ;$$

y por ende, a la luz de (2.1.1), $\varphi(X - G) \leq r$, esto es, $\mathfrak{C} \subseteq S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r respecto a la norma φ .

Por ser $\varphi(X - G)$ una función real convexa, propia y cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$Fr(S_r[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 | \varphi(X - G) = r\}$$

([8] p. 59, Corollary 7.6.1).

Si $X \in \text{conv}\{V_1, \dots, V_4\} \subseteq \mathfrak{C}$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ no negativos, $\lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_4 V_4 + oV_5 + \dots + oV_{10} \quad ,$$

reduciéndose las expresiones en (2.2.6) a

$$\begin{aligned} (X - G) \cdot A &= r(\lambda_3 + \lambda_4) \quad , & (X - G) \cdot B &= -r(\lambda_1 + \lambda_2) \quad , \\ (X - G) \cdot C &= (1 - a)r(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) \quad , \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} &a\{|A \cdot (X - G)| + |B \cdot (X - G)|\} + |C \cdot (X - G)| \\ &= a(r|\lambda_3 + \lambda_4| + r|\lambda_1 + \lambda_2|) + (1 - a)r|\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4| \\ &= ar(\lambda_1 + \dots + \lambda_4) + (1 - a)r|\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4| \\ &= ar + (1 - a)r|\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4| \leq ar + (1 - a)r(\lambda_1 + \dots + \lambda_4) = r \quad , \end{aligned}$$

y

$$|A \cdot (X - G)| + |B \cdot (X - G)| = r(\lambda_1 + \dots + \lambda_4) = r \quad ,$$

por lo cual, según (2.1.1),

$$\varphi(X - G) = r \quad y \quad \text{conv}\{V_1, \dots, V_4\} \subseteq Fr(S_r[G])$$

Así, utilizando (2.2.6) en general se prueba que todas las caras de \mathfrak{C} están contenidas en la frontera de $S_r[G]$. Por tanto

$$\mathfrak{C} \subseteq S_r[G] \quad y \quad Fr(\mathfrak{C}) \subseteq Fr(S_r[G]) \quad (2.2.7)$$

Si $X \in S_r[G] \sim \mathfrak{C}$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 \sim \mathfrak{C}$ por ser \mathfrak{C} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq S_r[G]$ interseca a $Fr(\mathfrak{C})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathfrak{C} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(S_r[G])$ ([8] p. 45 Theorem 6.1) y además por (2.2.7) $P \in Fr(S_r[G])$ lo cual es imposible. Así que $S_r[G] \subseteq \mathfrak{C}$.

Teniendo presentes (2.2.1) y (2.2.2) obtenemos

$$(V_4 - V_1) \cdot (V_2 - V_1) = (V_7 - V_4) \cdot (V_3 - V_4) = 0 \quad y$$

$$(\mathbf{V}_7 - \mathbf{V}_4) \cdot (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_4) = -\frac{r^2}{\Delta^2} \|\mathbf{C}\|^2 \left(\|\mathbf{A}\|^2 - \|\mathbf{B}\|^2 \right) \quad ,$$

expresiones que implican las partes (i) y (ii) del presente teorema. Advirtiendo que $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_7)$ es el centro del paralelogramo $\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_4 \mathbf{V}_7 \mathbf{V}_8$, la afirmación sobre la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{V}_5 + \mathbf{V}_{10}}$ como un eje de simetría del sólido proviene de las relaciones

$$\mathbf{V}_5 - \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_7) = (2 - \sqrt{2})(\mathbf{V}_5 - \mathbf{G}) \quad \text{y}$$

$$(\mathbf{V}_7 - \mathbf{V}_4) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_4) = -\frac{2r^2}{\Delta} (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \frac{2r^2}{\Delta} \mathbf{C} = \frac{2r}{\Delta} (\mathbf{V}_5 - \mathbf{G}) \quad ,$$

la primera nos da la colinealidad de los puntos

$$\mathbf{G}, \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_7), \mathbf{V}_5,$$

y las otras la ortogonalidad del plano del paralelogramo $\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_4 \mathbf{V}_7 \mathbf{V}_8$ y la recta $\overleftrightarrow{\mathbf{V}_5 + \mathbf{V}_{10}}$

3. Representación de un Λ -Dodecaedro afín dado

3.1. Teorema

Sea dado un Λ -dodecaedro afín \mathfrak{D} macizo y cerrado, de vértices $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{10}$ dispuestos como en la Figura 2 y centro

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_i + \mathbf{V}_{i+5}) \quad , \quad i = 1, \dots, 5,$$

con las mismas propiedades consignadas en la (i) parte del Teorema 2.2.

Si

$$\nabla = \det(\mathbf{V}_1 - \mathbf{G}, \mathbf{V}_2 - \mathbf{G}, \mathbf{V}_3 - \mathbf{G}) \quad , \quad (3.1.1)$$

sean los vectores

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \nabla^{-1}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{G}) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{G}) \\ \mathbf{B} = -\nabla^{-1}\{(\mathbf{V}_2 - \mathbf{G}) \times (\mathbf{V}_3 - \mathbf{G}) + (\mathbf{V}_3 - \mathbf{G}) \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{G})\} \quad \text{y} \\ \mathbf{C} = 2(\sqrt{2} - 1) \|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2\|^{-2} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Entonces, para dichos vectores, \mathfrak{D} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (2.1.1) con $a = 2 - \sqrt{2}$

Demostración. De acuerdo a la definición 1.4, \mathfrak{D} es un poliedro no degenerado y por tanto el determinante ∇ en (3.1.1) es no nulo. Además, teniendo en mente las expresiones en (3.1.2) hallamos

$$\Delta = \det(A, B, C) = 2(\sqrt{2} - 1)\nabla^{-1} \neq 0 \quad \text{y} \quad A \cdot C = B \cdot C = 0$$

En otras palabras, los vectores A, B, C definidos en (3.1.2) satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2 bajo las cuales consideramos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 introducida en (2.1.1) con $a = 2 - \sqrt{2}$. Por tanto, su esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ es un Λ -dodecaedro afín de centro G , de tal manera que remitiéndonos a las expresiones en (2.2.2) y a la primera en (1.5.1) (después de cuidadosos cálculos vectoriales) se demuestra que V_1, V_2 y V_3 son también vértices de $S_1[G]$.

Ahora bien, dado que \mathfrak{D} es la imagen automorfa afín de un Λ -dodecaedro, entonces sus vértices (y los de $S_1[G]$, según se estableció en la demostración del Teorema 2.2) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2 y V_3 correspondientemente análogas a las listadas en (1.5.1). Se dimana que los vértices de $S_1[G]$ son, justamente, V_1, \dots, V_{10} , es decir, $S_1[G] = \mathfrak{D}$

3.2. Ilustración

Consideremos el Δ -dodecaedro $V'_1 \dots V'_{10}$ de centro el origen descrito en la ilustración 1.3. Entonces, aludiendo al Teorema 3.1 hallamos

$$\begin{aligned} \nabla &= -4 \quad , & A &= \frac{1}{2}(0, -1, 1) \quad , \\ B &= \frac{1}{2}(0, 1, 1) \quad \text{y} & C &= (1 - \sqrt{2})(1, 0, 0) \quad , \end{aligned}$$

Por tanto, y según la norma φ en (2.1.1) con $a = 2 - \sqrt{2}$, como sólido cerrado el Λ -dodecaedro tiene la siguiente representación cartesiana

$$(1 + 2\sqrt{2})(|x_3 - x_3| + |x_2 + x_3|) + 2|x_1| + ||x_2 - x_3| + |x_2 + x_3| - 2|x_1|| \leq (1 + \sqrt{2}) ,$$

condición necesaria y suficiente para que un punto (x_1, x_2, x_3) en \mathbb{R}^3 esté en el sólido. La igualdad sólo ocurre en la frontera del poliedro.

4. Representación del Λ -Dodecaedro

Dado el carácter regular de sus caras, el Λ -dodecaedro tiene una representación cartesiana más sencilla y armoniosa.

4.1. Corolario

Sea \mathfrak{D} un Λ -dodecaedro macizo y cerrado, de arista b y vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 2, y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad , \quad i = 1, \dots, 5$$

Hagamos

$$\begin{cases} A = b^{-2}(V_1 - V_2 + 2V_3 - 2G) \quad , \\ B = b^{-2}(-V_1 - V_2 + 2G) \quad , \\ C = 2(\sqrt{2} - 1)b^{-2}(V_1 - V_2) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Entonces, para dichos vectores, \mathfrak{D} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (2.1.1) con $a = 2 - \sqrt{2}$

Demostración. Si $V'_1 \dots V'_{10}$ es el *Lambda*-dodecaedro de centro $\mathbf{0}$ de la ilustración 1.3, según se estableció en la demostración del Teorema 3.1, existe un automorfismo afín f de \mathbb{R}^3 tal que $f(V'_i) = V_i$, $i = 1, \dots, 10$ y $f(\mathbf{0}) = G$. En este caso $\theta_{ij} = \angle V_i G V_j$ implica $\theta_{ij} = \angle V_i \mathbf{0} V_j$, por lo cual cálculos directos (con los vértices V'_i) como los conducentes a (1.3.2), nos aportan que en general

$$\cos \theta_{12} = -\cos \theta_{13} = \cos \theta_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{6} \cos \theta = \frac{1}{3} \quad ,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $V'_1 \times V'_2$ y V'_3 , esto es, entre $(V_1 - G) \times (V_2 - G)$ y $V_3 - G$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \det(V_1 - G; V_2 - G, V_3 - G) \quad (4.1.2) \\ &= \{(V_1 - G) \times (V_2 - G)\} \cdot (V_3 - G) = \|(V_1 - G) \times (V_2 - G)\| \|V_3 - G\| \cos \theta \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} R \sqrt{R^4 - \frac{R^4}{9}} \quad (\text{Identidad de Lagrange}) \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{9} R^3 = -\frac{b^3}{2} \quad , \end{aligned}$$

donde $R = \frac{\sqrt{3}b}{2}$ es el circunradio del cubo $V_1 \dots V_4 \quad V_6 \dots V_9$. Así, existen escalares s, t y u tales que

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = s(V_1 - G) + t(V_2 - G) + u(V_3 - G)$$

Multiplicando interiormente ambos miembros de esta ecuación, sucesivamente por $V_i - G$, $i = 1, 2, 3$, obtenemos, respectivamente, las siguientes tres ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} s - t - 3u = 2b \\ 3s + t - u = 0 \\ s + 3t + u = 0 \end{cases},$$

resolviendo el sistema obtenemos $s = -t = \frac{u}{2} = -\frac{b}{2}$, es decir,

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = \frac{b}{2}(V_1 - V_2 - 2V_3 + 2G)$$

Procediendo análogamente encontramos

$$(V_2 - G) \times (V_3 - G) = \frac{b}{2}(-2V_1 + V_2 - V_3 + 2G) \quad y$$

$$(V_3 - G) \times (V_1 - G) = \frac{b}{2}(V_1 - 2V_2 + V_3)$$

Sustituyendo estos valores y vectores en (3.1.2) arribamos a (4.1.1)

5. Estereometría del Λ -Dodecaedro afín

5.1. Teorema

Sea dado un Λ -dodecaedro afín \mathfrak{D} con las mismas hipótesis y notación (3.1.1) del Teorema 3.1. Hagamos

$$\begin{cases} W_1 = (V_1 - G) \times (V_2 - G) - (V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G) \quad , \\ W_2 = (V_1 - G) \times (V_2 - G) - (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_3 - G) \times (V_1 - G) \quad , \\ W_3 = -(V_1 - G) \times (V_2 - G) - (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_3 - G) \times (V_1 - G) \quad , \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Denotemos por \mathfrak{L} a la matriz cuadrada no singular de orden tres cuya i -ésima columna es W_i^T . Entonces

(i) La ecuación del circunelipsoide de \mathfrak{D} (el elipsoide donde está inscrito \mathfrak{D}) es

$$(X - G)\mathfrak{L} \mathfrak{L}^T(X - G)^T = 3\nabla^2 \quad , \quad (5.1.2)$$

donde \mathfrak{L}^T (y similares) es la transpuesta de \mathfrak{L}

(ii) Si f es el automorfismo afín de \mathbb{R}^3 representado por

$$f(X) = \nabla^{-1}(X - G) \quad \mathfrak{L} \quad , X \in \mathbb{R}^3, \quad (5.1.3)$$

entonces $f(\mathfrak{D})$ es ¡ justamente! el λ -dodecaedro de vértices $f(V_i) = V'_i$, $i = 1, \dots, 10$, de la ilustración 1.3

(iii) El volumen de \mathfrak{D} es

$$\frac{2}{3}(3 + \sqrt{2})|\nabla|$$

En particular, si \mathfrak{D} es un Λ -dodecaedro de arista b , entonces su volumen es $\frac{1}{3}(3 + \sqrt{2})b^3$.

Demostración. Dado que

$$\det \mathfrak{L} = \det \mathfrak{L}^T = \det(W_1, W_2, W_3) = -4\nabla^2 \neq 0 \quad ,$$

entonces \mathfrak{L} es no singular y $\mathfrak{L} \mathfrak{L}^T$ es una matriz simétrica positivamente definida, por lo cual (5.1.2) es, en efecto, la ecuación de un elipsoide de centro G ([9] pp. 282 - 285).

Las expresiones

$$(X - G)\mathfrak{L} \mathfrak{L}^T(X - G)^T = \|(X - G)\mathfrak{L}\|^2 \quad ,$$

$$(X - G)\mathfrak{L} = ((X - G) \cdot W_1 \quad , \quad (X - G) \cdot W_2, (X - G) \cdot W_3) \quad ,$$

y las dadas en (5.1.1) pueden utilizarse para probar que los vértices V_1, V_2 y V_3 satisfacen la ecuación (5.1.2). Para verificar que los otros vértices V_4, \dots, V_{10} de \mathfrak{D} también la satisfacen, nos remitimos a sus correspondientes representaciones lineales en (1.5.1).

Procediendo así también se demuestra, teniendo presente (5.1.3), que $f(V_i) = V'_i$, $i = 1, \dots, 10$, los vértices del Λ -dodecaedro de la ilustración 1.3

Ahora consideremos en la Figura 1 la pirámide de ápice V'_5 y base el cuadrado $V'_1 V'_4 V'_7 V'_8$ de centro C . Su volumen es, de acuerdo al Λ -dodecaedro de la ilustración 1.3,

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} R \quad (\text{Por (1.5.5)})$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2}\right) = \frac{4}{3} \sqrt{2},$$

donde R es el circunradio del cubo $V'_1 \dots V'_4 V'_6 \dots V'_5$, cuyo volumen es 2^3 . Por esto el volumen del Λ -dodecaedro $V'_1 \dots V'_{10}$ es

$$2^3 + 2 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}(3 + \sqrt{2}),$$

y por ende

$$\frac{8}{3}(3 + \sqrt{2}) = v |\det(\nabla^{-1} \mathfrak{D})| = 4v |\nabla|^{-1} \quad ,$$

donde v es el volumen de \mathfrak{D} ([1] p. 243, Corollary). En particular, si \mathfrak{D} es un Λ -dodecaedro de arista b , entonces según (4.1.2), $\nabla = -\frac{b^3}{2}$

Bibliografía

- [1] BIRKHOFF G., MacLane S. *A Brief Survey of Modern Algebra*. New York: The Macmillan Company, Second Edition, 1965.
- [2] ————— *Algebra*, idem, Fourth Printing, 1970.
- [3] COXETER, H.S.M. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., Second Edition, Wiley Classics Library Edition Published 1989.
- [4] —————, *Regular Polytopes*. New York: Dover Publications, Inc., Third Edition, 1973.
- [5] LYUSTERNIK, L.A. *Convex Figures and Polyhedra*. New York: Dover Publications Inc., First Edition, 1963.
- [6] MAEDER, Roman E. *The Mathematica Programmer II*. San Diego, California: Academic Press, 1996.

- [7] MIYAZAKI, Koji. *An Adventure in Multidimensional Space*. New York: A Wiley - Interscience Publication John Wiley & Sons, 1986.
- [8] ROCKAFELLAR, Ralph T. *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1972.
- [9] STRANG, Gilbert. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1982.
- [10] WILLIAMS, Robert. *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York : Dover Publications, First edition, 1979.
- [11] ZALGALLER, V.A. *Convex Polyhedra with Regular Faces*. Consultants Bureau, 1969.