# JACOBO BERNOULLI Y SU APORTE A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD. EL CASO DEL PROBLEMA DEL REPARTO

*Díaz Londoño, Rudy Stefany*
rudy.diaz@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle (Colombia)

## RESUMEN

*El problema del reparto que puede enunciarse de la siguiente manera: "Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?" (Fernández, 2007, pág. 12). Propuesto por Lucca Paccioli y resuelto por correspondencia epistolar entre diferentes autores, dio inicio a métodos de solución novedosos para la época que implicaron el origen de conceptos y campos de estudio potentes para la matemática, como la combinatoria, los juegos de azar y sus cálculos, la probabilidad y la esperanza. En este trabajo se realiza la traducción de cuatro proposiciones que representan el problema del reparto abordado desde las anotaciones que Jacobo Bernoulli plasma en el Ars Conjectandi, con respecto al trabajo de Huygens; reconociéndose una de aplicación más intuitiva de la probabilidad.*

## PALABRAS CLAVE

Problema del reparto, Juegos de azar, Cálculo de probabilidades, Esperanza matemática.

## INTRODUCCIÓN

> Los conceptos de probabilidad y azar son tan antiguos como la civilización; y prueba de ello son encontradas en las diferentes culturas griega y egipcia mediante los juegos que eran muy populares, como los dados, las tablas, astrágalos, cartas, entre otros sin distinguirse edades ni clases sociales (Fernández, 2007, pág. 8).

Es por estos juegos de azar que se dan los inicios del cálculo de Probabilidad Matemática y donde emergen también los primeros escritos que pueden considerarse formales, como el libro de juegos de Gerolano Cardano, las Cartas entre Blaise Pascal y Pierre Fermat y el Tratado sobre juegos de azar de Christiaan Huygens, que son el resultado del análisis de estos autores a problemas de recuento de posibilidades planteados mediante juegos de azar y los cálculos de estos que generalmente apuntaban a un reparto de un juego interrumpido. Se propone como objeto central de este trabajo, revisar los comentarios realizados por Jacobo Bernoulli al tratado de Huygens con respecto al problema del reparto que se encuentra en la primera parte del *Ars Conjectandi* (Bernoulli, 1973) en español, el Arte de Conjeturar.

## MARCO DE REFERENCIA

El problema del reparto de la apuesta o del juego interrumpido, conocido desde el renacimiento y abordado sucesivamente por diferentes matemáticos como Fra Luca Pacioli, Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, es uno de los que ilustran de forma especial, las dificultades que los matemáticos han encontrado al construir la teoría de la probabilidad. Las primeras soluciones correctas se dieron a finales del siglo XVII, mediante correspondencia en 1654 por los matemáticos Blaise Pascal y Pierre de Fermat. Luego, en Francia Huygens conoce sobre este problema y sus respuestas, más no su solución, e impresionado por el mismo decide en 1657 investigar por cuenta propia, escribiéndole a su tutor Francois van Schooten, finalizando la carta en los siguientes términos:

> Por lo tanto he tenido que examinar y profundizar por mi cuenta en esta materia, empezando con lo más básico. Por esta razón, para mi es imposible afirmar que haya partido desde los mismos principios. Finalmente he hallado que mis respuestas, en muchos casos, no difieren de las de ellos (García, 2000).

Es con la intervención de Huygens que empieza a hablarse de esperanza matemática en el campo de la Probabilidad, lo que se ve reflejado reiteradamente en su trabajo *De ratiociniis in ludo alae* que consta de catorce proposiciones (problemas propuestos que tienen la misma naturaleza que el problema del reparto) y un apéndice de cinco problemas propuestos para resolver; de las cuales se consideran aquí las cuatro primeras que es donde se muestra la solución al problema del reparto. Dichas proposiciones se traducen de la siguiente forma según se encuentran enunciadas en el *Ars Conjectandi*:

1. Proposición I: "Si espero a o b, de los cuales puedo obtener cualquiera con igual facilidad, ha de decirse que mi expectativa equivale a $\frac{(a+b)}{2}$." (Bernoulli, 1713, p. 4)
2. Proposición II: "Si esperara $a, b$ o c, cada uno de los cuales pudiese obtener con similar facilidad, ha de estimarse que mi expectativa es de $\frac{(a+b+c)}{3}$." (Bernoulli, 1713, p. 6)
3. Proposición III: "Si el número de casos en los cuales me toca a es p; y el número de casos en que me toca b es q, y considerando que todos los casos son igualmente *proclives* (posibles) a ocurrir, mi expectativa valdrá $\frac{(pa+qb)}{(p+q)}$." (Bernoulli, 1713, p. 7)
4. Proposición IV: "Supuesto que alguien compitiese conmigo de manera que el primero que ganase tres veces se apropiase de lo depositado; y supuesto que yo ya he vencido dos veces y el otro una, deseo saber (dado que no queremos proseguir con el juego sino repartir la riqueza sobre la cual competimos como es equitativo) cuánto de obtendría yo de lo suyo." (Bernoulli, 1713, p. 11)

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para adentrarse entonces en esta visión relacionada con lo que hoy se conoce como esperanza matemática, se emplea un enfoque cualitativo, utilizando específicamente la observación y análisis de la traducción realizada a las anotaciones que Jacobo Bernoulli realiza a cada una de las cuatro primeras proposiciones de Huygens.

## DESARROLLO

### PROPOSICIÓN I, ANOTACIONES DE BERNOULLI

Es necesario aclarar que Bernoulli reconoce que en el trabajo de Huygens se exponen todos los principios del azar, sin embargo explica las proposiciones de forma más cercana al sentido común. De esta manera propone el siguiente axioma dentro de esta demostración: "Cualquiera puede esperar, tanto como lo que puede adquirir sin fallar" (Bernoulli, 1713, p. 5).

Seguido de un ejemplo similar al de Huygens, expuesto de la siguiente manera:

> Pensemos que alguien ocultó en una mano tres chelines (vigésima parte de una libra esterlina) o a; y en la otra, 7 chelines o b; y que estando alguien más junto conmigo toma, uno lo que está en una mano; y el otro lo que está en la otra. Esto ocurrirá de tal suerte que cada uno de nosotros habremos de obtener (e incluso debemos de esperar) aquello que está oculto en una y otra mano; lo cual es ciertamente diez chelines o $a + b$. Pero también hay que admitir que ambos tenemos igual derecho respecto de aquello que esperamos, por lo cual se sigue que la expectación total debe dividirse en dos porciones iguales; y que a cada uno ha de atribuirse por separado la mitad de la expectativa total; es decir 5 o $\frac{(a+b)}{2}$ (Bernoulli, 1713, p. 5).

Como lo plantea Bernoulli, en total habrá $a + b$ monedas, y si se coloca a escoger entre dos personas, ambos tendrán igual derecho sobre lo que esperan, y por ende la esperanza para cada jugador debería estar dividida en dos partes iguales, y cada uno debería tener la mitad del total, esto es 5 monedas o $\frac{(a+b)}{2}$.

Posteriormente, Bernoulli establece:

> Corolario: A partir de ello se hace patente que si en una mano se ocultase algo o a, y en la otra no se oculta nada, la expectativa de cada uno por separado sería de la mitad de aquel algo, o $\frac{1}{2}a$ (Bernoulli, 1713, p. 5).

Este corolario es relevante en la comunidad académica relacionada con la Educación Estadística ya que existen diversas investigaciones en las que no se nombra a Bernoulli como precursor de esta propiedad, como las de Pollatsek, Lima y Well (1981), Mevarech (1983) y Batanero (2000) que tratan sobre el valor cero en un sistema de datos y el cálculo de la media aritmética y los errores que se cometen al no tenerlo en cuenta.

Luego, Bernoulli plantea:

> Escolio: Según lo dicho puede deducirse que la palabra "expectativa" no se toma en ningún momento como comúnmente; donde esperamos lo que es mejor de todo, sin considerar que pueda ocurrirnos lo peor. Sino que, nuestra esperanza de obtener lo mejor está a tal punto atemperada y disminuida por el miedo de conseguir lo peor, que por ella queda siempre significado algo de intermedio entre lo mejor que esperamos y lo peor que tememos. Este es el sentido en que ha de entenderse aquí y en todo lo que sigue (Bernoulli, 1713, p. 5).

En otras palabras, la esperanza debe entenderse como aquello para obtener lo mejor, disminuido por el miedo de recibir lo peor, así el valor de la esperanza está en la mitad de lo mejor a esperar y lo peor que se pueda obtener.

### PROPOSICIÓN II, ANOTACIONES DE BERNOULLI

> Imaginemos que hay tres urnas, en uno de los cuales esté escondido a; en otro b; y en el tercero c. Y admítasenos la posibilidad, a mí y a otros dos, de que cada uno tome para sí uno de las urnas y conserve lo que hay en él. Hágase de tal manera que todos tomemos todos los lugares y que tomemos todo cuanto hay en ellos; es decir $(a+b+c)$. Como no se puede decir que uno tenga una esperanza mayor que otro, se sigue que la expectación de cada uno por separado equivale a la tercera parte de ese agregado; o sea $\frac{(a+b+c)}{3}$. Del mismo modo, si hubiese 4 casilleros, en los cuales estuviesen escondidos $a, b, c$ y $d$; mi expectativa es igual a la cuarta parte de ese agregado, o $\frac{(a+b+c+d)}{4}$. Y así, si fuesen 5 casilleros, mi expectativa será $\frac{(a+b+c+d+e)}{5}$, etcétera (Bernoulli, 1713).

Esta explicación más intuitiva que la que hace Huygens, se basa en el modelo de urnas para dar solución a la mencionada proposición. Supone que hay tres urnas y en cada una de ellas hay un contenido de a, b y c unidades; y este método puede extenderse para el número de cajas que se desee.

Declarando luego que:

> Corolario: Es manifiesto también que si en uno o más casilleros no hubiese nada escondido, en ese caso mi expectativa de obtener lo que en el otro o en los otros está contenido será la tercera parte si son 3 los casilleros; o la cuarta parte si son 4; o la quinta si son 5, etcétera (Bernoulli, 1713, p. 7).

Corolario que refleja nuevamente que se debe tener en cuenta el caso en donde de las cajas que hayan se encuentra una vacía, calculando el valor a esperar con la inclusión del elemento cero $\frac{(a+b+0)}{3}$.

### PROPOSICIÓN III, ANOTACIONES DE BERNOULLI

> Supongamos que conmigo hay a la vez tantos jugadores cuantos son la totalidad de los casos (esto es $p+q$), y que uno de los casos le toque a cada cual. Esto ocurrirá si se conciben tantos casilleros como participantes y se entiende que en cada uno de ellos está escondido cuanto en cada uno de los casos es adquirido por los participantes. Tome cada uno de los jugadores un solo casillero, de modo que el total de ellos tomará todos los casilleros y obtendrán todos juntos sin falta cuanto esté escondido en los casilleros; es decir, $pa+qb$. Así pues, como todos tienen igual esperanza, ha de distribuirse eso que todos alcanzan en conjunto entre el número de jugadores o de casos; de suerte que la expectativa de cada uno sea $\frac{pa+qb}{p+q}$. Y por el mismo razonamiento se muestra que si a mí me toca en p casos a, y en q casos b, mi suerte sería $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$ (Bernoulli, 1713, p. 8).

En la proposición anterior, Bernoulli plantea el modelo de urnas y lo contenido en ellas para ejemplificar la proposición; sin embargo, cada nota y comentario que realiza, genera otros problemas que resuelve a través de sus corolarios, los cuales enuncia de la siguiente manera.

> **Corolario 1:** Si en p casos me toca a, y en q casos nada, mi expectativa sería $\frac{pa}{p+q}$.
> **2**. Si el número de casos recibe un divisor común, el valor de la expectativa puede ser reducido a términos más pequeños; por ejemplo, si me toca a en los casos mp; y b en los casos mq, mi expectativa según la regla será de $\frac{mpa+mqb}{mp+mq}$; la cual, hecha la división entre m, equivaldrá a esta: $\frac{pa+qb}{p+q}$.
> **3**. Si tuviese p casos por los cuales obtenga a, y q casos para obtener b, y r para c; esto vale para mí tanto como por medio de los casos p y q, fundidos en uno, tuviese $p + q$ casos para obtener $\frac{ap+qb}{p+q}$, y r casos para c, por lo que de uno y otro modo, se hallaría mediante la regla que mi suerte es $\frac{ap+qb+rc}{p+q+c}$ (Bernoulli, 1713, pp. 9-10).

Así sucesivamente propone tres corolarios más, teniendo en cuenta la cantidad de casos favorables para obtener un resultado y la suerte original o el estado en el que se encuentra, la suerte que le sucederá esta designada por la sumatoria de los productos a partir de lo individual o lo mezclado (según sea el caso) y su precio respectivo dividido entre la sumatoria total; lo cual puede significar ganancia o pérdida según la parte afirmada exceda a la negada, o la negada a la afirmada; llegando así a lo siguiente:

> **Escolio:** Resulta evidente a partir del cálculo de esta consideración que guarda ésta una gran afinidad con la regla de la Aritmética conocida como regla de la aligación, en latín *alligationis*.
> De allí que si tomasen los mismos números; en aquél ejemplo como cantidad de las cosas mezcladas y sus precios; y en este otro por los casos y por aquello que en cada caso se obtendría, también un mismo número denotaría allí el precio de la cosa mixta; y aquí, la expectativa. Por ejemplo, si tres cántaros de vino de precio 13 se mezclasen con 2 cántaros de precio 8, multiplicado 3 por 13 y 2 por 8 saldría el precio de todos los cántaros, 55; el cual, dividido entre 5 que es el número de los cántaros, daría 11, como precio de uno de los cántaros mixtos. En tanto habría también, según la regla, de estimarse la expectativa de cualquiera que tuviese 3 casos para 13 y 2 casos para 8 (Bernoulli, 1713, p. 10).

Con este ejemplo se hace mención al análisis realizado mediante los precios de unos productos como una forma alternativa para modelar la proposición abordada, denominado *Alligationis*; regla que refiere al promedio.

### PROPOSICIÓN IV (PROBLEMA DE LOS PUNTOS), ANOTACIONES DE BERNOULLI

1. En primer lugar es menester considerar el juego que falta a uno y a otro]] Hasta este punto, para computar las suertes, ha de tenerse en cuenta solamente la de las jugadas futuras, dado que para ninguno de los participantes hay en los juegos futuros mayor probabilidad como para que la fortuna proceda a favorecer al mismo que antes ya ha favorecido por encima del que es el más infortunado de todos (Bernoulli, 1713, p. 12).
2. Eso que se llamará a]] Por medio de la letra a. se puede entender tanto (con Huygens) la riqueza depositada que en razón de las suertes puede ser distribuida entre los jugadores, como aquello que si bien es en sí mismo indiviso, puede concebirse no obstante como divisible a partir del número de casos por los cuales puede ser adquirido o perdido, producirse o no producirse (Bernoulli, 1713, p. 12).

Para lo cual propone el siguiente ejemplo, si para dos maleantes, por una gracia especial del Príncipe, hubiesen de competir con igual suerte por su vida, acéptese que para uno cualquiera de ellos habrá (por la proposición I) $\frac{1}{2}$ de vida y $\frac{1}{2}$ de muerte, de manera tal que a un hombre en tal situación podría llamársele en sentido propio, semi-vivo tanto como semi-muerto; en un premio cualquiera, importa la naturaleza del objeto a dividir.

3. Y quedará para mi otro compañero de juego $\frac{a}{4}$]] Esto es, el residuo de todo el depósito a, puesto que, terminado el concurso, los dos en conjunto tendremos sin falta todo a. Pues si pudiese producirse el caso de que al jugar, en conjunto obtuviesen más o menos e que a, es evidente que entonces la expectativa de uno no podría completar la del otro hasta alcanzar a (Bernoulli, 1713, p. 12).

Por ejemplo, si dos se reúnen en un calabozo a jugar a los dados según esta ley: que quien arrojara menos puntos es colgado, y el otro queda vivo; pero si lanzaran el mismo número de puntos, ambos quedasen con vida, se hallaría entonces que la expectativa de uno es de $\frac{7}{12}$a o $\frac{7}{12}$ de vida; de donde no se sigue que la expectativa del otro sea sólo de $\frac{5}{12}$ de vida, dado que aquí las suertes son manifiestamente iguales. Este esperará también $\frac{7}{12}$ de vida, y para ambos a la vez, una expectativa de $\frac{7}{6}$; esto es, más que una vida, porque no existe un sólo caso en el cual, terminado el juego, no quede vivo cuando menos uno; y hay casos en los cuales ambos pueden sobrevivir.

4. En el momento de estar bajo la condición que al primer jugador le falten 2 puntos para ganar y al segundo 1, se tiene que si se continua el juego y el primer jugador obtiene punto, ambos recibirían la mitad de la apuesta, en este caso sería $\frac{a}{2}$. Pero, si el segundo jugador obtiene punto, este se llevara el total de la apuesta. Es decir, el primer jugador tiene igual facilidad de llevarse $\frac{a}{2}$ o nada y por el **corolario I** de la **proposición III** se tiene que su esperanza está dada por $\frac{a}{4}$. (Bernoulli, 1713, p. 13).

5. Y, por tanto, siempre tres contra uno etc.]] Ha de mostrarse que quien tiene 3 oportunidades de vencer y 1 de perder, o quien espera las tres cuartas partes del depósito, puede apostar 3 contra 1. Sólo debe suponerse que tiene la oportunidad de tres jugadores. Es así que si hay 4 jugadores que juegan con igual suerte, los cuales apuestan 1, cada cual tendrá la expectativa de eso mismo que han apostado; es decir, la cuarta parte de todo el depósito, según el **corolario 2** de la **proposición III**, a tal punto que un trío de ellos cualesquiera esperarán las tres cuartas partes del depósito; y el cuarto, apenas $\frac{1}{4}$. (Bernoulli, 1713, p. 13).

Con ello, quien tenga más esperanza de obtener un premio para dar su puesto a otro lugar, debería colocar más cantidad que aquel que tiene poco que esperar.

De manera general se muestra en estas cuatro proposiciones, la importancia del problema del reparto, los diferentes ejemplos que pueden emplearse para darle solución, respetando claro las reglas pre-establecidas por las soluciones correctas y por su puesto la sutileza de Bernoulli cuya intencionalidad radica en profundizar cada vez más en las aplicaciones y métodos novedosos que puede derivar del *Ratiociniis*. Una nueva interpretación y uso de acontecimientos de la vida como ejemplos, la articulación en el uso de la aritmética y el riesgo de introducir la expresión probabilidad; son algunos de los aportes que realiza Bernoulli a la teoría de la probabilidad, que apenas emergía en esa época.

## CONCLUSIONES

El Arte de Conjeturar para Jacobo Bernoulli consiste en concretar los datos repetidos del mismo experimento realizado varias veces; es decir, los principios de la probabilidad matemática no siempre son pensados o evidentes en sí mismos, sino que surgen luego de una posible representación de experimentos repetidos.

Bernoulli anota que la exposición de la demostración realizada por Huygens se hace de manera general para las proposiciones I, II y III al contrario de lo que se presenta en el fundamento del resto del Arte; lo cuál puede ser confuso para sus lectores y en consecuencia causante de errores sobre la aplicación de la probabilidad. Es por ello que realiza a cada proposición un ejemplo introductorio como primer anotación y luego para sustentar sus comentarios se vale de axiomas y corolarios, asignándoles así un aspecto más intuitivo.

Los problemas de reparto en la probabilidad y sus cálculos, son unos de muchos ejemplos donde los conceptos abstractos de las matemáticas ayudan a resolver problemas del mundo que nos rodea, lo que indica que la visión de la ciencia sobre los juegos de azar es necesaria. De esta manera, Díaz (2013) menciona que las anotaciones de Bernoulli son importantes para comunidad académica relacionada con la Educación Estadística ya que las diferentes investigaciones que existen en este campo no reconocen a Bernoulli como precursor de diferentes objetos matemáticos fundamentales en la Teoría de la Probabilidad.

## REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *Revista Uno*, 41-58.

Bernoulli, J. (1713). Ars Conjectandi Pars Prima: De Ratiociniis in Ludo Alae. In J. Bernoulli, *Ars Conjectandi* (pp. 1-13). Basilea: Hermanos Thurneysen. Traducción Díaz, Rudy.

Díaz, D. (2013). *Análisis Histórico Epistemológico de la Esperanza Matemática.* Cali: Universidad del Valle.

Fernández, S. (Junio de 2007). Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad. *Revista Summa*, 7-20.

García, J. (2000). Historia de un problema: El reparto de la apuesta. *Revista Summa*, 25-36.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students statiscal misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 415-429.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. (1981). Concept or computation: Students´ understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 191-204.

Sylla, D. (2006). *The art of conjecturing together with letter to a friend to sets in court tennis/ by Jacob Bernoulli translated with an introduction and notes. Cap 1.* Baltimore: UniversidadJohns Hopkins.