PROBABILIDAD, JUEGOS DE AZAR Y EDUCACIÓN ESTADÍSTICA CRÍTICA

Campos, Celso Ribeiro
crcampos@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica (Brasil)

RESUMEN

El concepto de Probabilidad es de fundamental importancia para la Estadística, porque trae consigo la idea de aleatoriedad e incertidumbre, que forman los pilares de esta ciencia. La Probabilidad se puede estudiar desde la escuela primaria hasta el nivel terciario, con mayor o menor profundidad. En este breve taller, se hace un acercamiento a los conceptos clásico y frecuentista de la Probabilidad, con un enfoque centrado en el salón de clases, adoptando algunos principios de la Educación Estadística Crítica. Así, se presentan algunas actividades y sugerencias para un enfoque más aplicado de la Probabilidad, con ejemplos reales que evocan diferentes debates y reflexiones.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, Teoría Frecuentista de Probabilidad, Educación Estadística Crítica.

INTRODUCCIÓN

El punto de partida de la moderna Teoría de la Probabilidad se debe al matemático Cardano (1501–1576). En el siglo XVI, su adicción condujo a un pequeño tratado, titulado *El Libro de los juegos de azar*, considerado el primer análisis científico de la Probabilidad, que sin embargo, no fue publicado hasta un siglo después de su muerte. Blaise Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat (1601–1665), en el siglo XVII se intercambiaron correspondencias con el fin de estudiar los juegos de azar y avanzar en el estudio de la Probabilidad. La primera publicación de estas correspondencias se debe a Huygens (el libro se llamaba *De ratiociniis in ludo aleæ* - Sobre el razonamiento en juegos de dados) en 1657 (Boyer, 1994). Las leyes axiomáticas de la Teoría Matemática de la Probabilidad fueron publicadas en el siglo XX por el matemático ruso Kolmogorov.

La Probabilidad, como concepto matemático, tiene como objetivo formular cuantitativamente las predicciones en un contexto de incertidumbre. Se puede calcular por una relación entre el número de casos favorables y el número total de posibilidades para un experimento aleatorio. Este enfoque, sin embargo, sufre graves limitaciones debido a su falta de generalidad. En vista de esto, es posible entender la Probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia de un determinado resultado en un gran número de repeticiones del experimento. Por lo tanto, se puede definir la Probabilidad de dos maneras:

1. La Probabilidad de un evento A es igual al número de casos favorables al evento dividido por el número total de resultados posibles del experimento, es decir, $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$, donde S representa el espacio muestral, esto es, el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

   Este es el concepto clásico de Probabilidad, también llamada ley de Laplace, en el que los resultados del experimento se consideran equiprobables.

2. La Probabilidad de un evento A es igual al límite dado por el número de ocurrencias del evento dividido por el número total de repeticiones del experimento, siendo este un muy gran número, es decir:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

   Este es llamado el método empírico de cálculo de las probabilidades, base de la ley de los grandes números (o Teorema de Jacob Bernoulli), que aquí denominamos definición frecuentista de probabilidad.

Hoy se sabe que las aplicaciones de la Teoría de la Probabilidad son extensas y superó el universo de los juegos de azar. Los gobiernos y las empresas utilizan sus conceptos para llevar a cabo análisis calificados, y tomar decisiones más racionales.

Detrás de estas definiciones matemáticas, y aún más importante que ellas, está el concepto de aleatoriedad, que tiene una asimilación más compleja y que no se traduce en pocas palabras. En este sentido, el trabajo pedagógico que trate de episodios vinculados a contextos reales o realistas, con entornos familiares a los estudiantes, puede ayudar enormemente a su comprensión.

MARCO DE REFERENCIA

El objetivo de este taller es promover algunas actividades educativas que aborden diferentes conceptos de Probabilidad (clásico y frecuentista), en diversos contextos. Estas actividades abren el camino a la discusión de temas sociales y económicos que involucran la realidad de los estudiantes, adoptando los principios de la Educación Estadística Crítica, que se describen a continuación.

LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA CRÍTICA

La Educación Estadística Crítica consiste en una Teoría Didáctica que establece sus bases en el desarrollo de cuatro competencias: la alfabetización, el razonamiento, el pensamiento estadístico, y la capacidad crítica.

Las tres primeras competencias son ampliamente estudiadas por profesores e investigadores de la Educación Estadística. La cuarta competencia aparece como resultado de los estudios hechos en Campos (2007) y en Campos, Wodewotzki y Jacobini (2011), pero que se describe formalmente en Campos (2016). Esta es el resultado de la combinación de los objetivos de la Educación Estadística y de la Educación Crítica, que da a la enseñanza y al aprendizaje de la Estadística un carácter socio-crítico. Esto significa de manera simplista, defender la idea en la cual se debe añadir a las actividades educativas en el campo de la Estadística, cuestiones temáticas, en contexto, donde se utilicen datos reales, que reflejen situaciones que conducen a los estudiantes a reflexionar sobre la realidad, acerca de cuestiones políticas, sociales, económicas y ambientales que afecten a su comunidad.

La competencia crítica agrega valor a las otras tres competencias estadísticas y estas pueden ser trabajadas sin salirse de los contenidos de la disciplina, pero añadiéndoles un enfoque diferenciado, práctico, centrado en la acción-reflexión sobre la realidad.

Para preparar el terreno para actividades pedagógicas, se sugieren algunos enfoques diferenciados para el concepto de Probabilidad, que pueden resultar ser muy útiles para las clases en diferentes niveles escolares.

LA PROBABILIDAD, LOS CASINOS Y LA LOTERÍA

Los casinos y las loterías son un terreno fértil para los estudios de Probabilidad y pueden ser útiles en la composición de actividades pedagógicas, porque habitualmente despiertan gran interés en los estudiantes. A continuación, se describe dos episodios reales.

1. Develando la ruleta

   Un caso muy interesante fue reportado por Mlodinow (2008). En 1873, un ingeniero británico llamado a Joseph Jagger se preguntó: ¿Con qué perfección realmente funciona la ruleta del casino de Monte Carlo? Después de estudiar la materia, el ingeniero reunió sus ahorros, viajó a Mónaco y contrató a seis asistentes para que observaran las ruletas todos los días, teniendo en cuenta todos los resultados durante las 12 horas en que el casino estaba abierto. Después de seis días, tabulando los resultados, Jagger observó que una de las ruletas presentaba nueve números que aparecían con más frecuencia en los resultados.

   Así, en el séptimo día, él fue al casino y apostó pensado en esos números, ganando en una noche cerca de 70 mil dólares. Al final de cuatro días de apuestas, él ya había ganado más de 300 mil dólares. En poco tiempo, sus ganancias llegaran a casi un millón de dólares.

   Infelizmente para Jagger, los gerentes del casino develaron su estrategia y pasaron a cambiar los números de las ruletas todos los días después que el casino cerraba.. Jagger percibió la diferencia entre la Probabilidad Clásica y la Frecuentista, construyendo una estrategia que lo dejó rico.

2. La estrategia vencedora
   Bellos (2010) cuenta en su obra una estrategia supuestamente ganadora para el juego de la ruleta, que es llamada *martingale*, o doblar el dinero, que es más fácil de entender con el ejemplo de una moneda.

   Considerando la siguiente regla: si cae cara usted gana \$1, pero si no cae, usted pierde \$1. La apuesta inicial es \$1 y si usted gana, continua apostando \$1. Sin embargo, si usted pierde, la apuesta debe ser doblada (\$2), porque, si gana, usted recupera el \$1 perdido inicialmente y aún gana \$1 adicional. Así, en caso de que gane, usted debe volver a apostar solamente \$1. No obstante, si usted pierde nuevamente, deberá doblar otra vez la apuesta, o sea, debe apostar \$4. Una victoria lo hará recuperar las dos perdidas anteriores y aún tener un lucro de \$1. Si ocurre nuevamente una derrota, usted deberá doblar la apuesta nuevamente: \$8. Y así sucesivamente.

   La estrategia *martingale* funciona para juegos con una probabilidad de aproximadamente 50:50, como en el caso de la ruleta, cuando apuesta al negro o al rojo. No obstante, el jugador debe estar preparado para una larga secuencia de derrotas, porque en caso de diez derrotas seguidas, la apuesta ya llegará a \$512. Pero ¿cuál es la Probabilidad de que ocurran diez derrotas seguidas en la ruleta, apostando al negro o rojo?

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1: COMPRUEBA TUS INTUICIONES SOBRE EL AZAR

El objetivo de esta actividad es comprobar las intuiciones sobre el azar. Por lo tanto, se cita un problema que fue propuesto por Batanero (2001), para ser presentado a alumnos de la Educación Básica:

> ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad? O, ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa? (Batanero, 2001, p. 154).

Para esta tarea, se usará una moneda supuestamente honesta para testar las intuiciones respecto a los resultados aleatorios.

ACTIVIDAD 2: EL DILEMA DE MONTY HALL

El objetivo de esta actividad es conocer el dilema de Monty Hall, que trata de la probabilidad simple, pero que no es trivial. Supongamos que se encuentra en un programa de concurso y que el presentador muestra en el escenario tres puertas. El explica que atrás de una de las puertas está un coche nuevo, el cual puede ganar, y que atrás de las otras dos puertas no hay nada. Siendo usted seleccionado para participar en el juego, deberá elegir una puerta. Después de elegida la puerta, el presentador (que sabe dónde está el coche) se dirige a una de las puertas no seleccionadas y la abre, mostrando que atrás de ella no hay nada. Sobran entonces solamente dos puertas, la que usted eligió y otra, que permanecen cerradas. Acto continuo, el presentador le pregunta si usted desea permanecer con su elección o si prefiere cambiar de puerta. Esa es la pregunta crucial que comprende la raíz del problema: ¿Cuál decisión debe ser tomada? ¿La posibilidad de ganar, cambiando o no de puerta, es de 50%?

La solución o la explicación de ese problema aparentemente simple no es nada trivial. Si usted no cambia de puerta, su posibilidad de ganar el coche es de 1/3, pero si cambiara, su chance aumenta a 2/3. Para explicar esta solución, se establece que las tres puertas son A, B y C. Supongamos por hipótesis, que se elija la puerta A. Existen, por tanto, tres posibilidades identificadas:

1. El coche está atrás de la puerta A.
2. El coche está atrás de la puerta B.
3. El coche está atrás de la puerta C.

Solamente el presentador sabe dónde está el coche. Supongamos inicialmente que el coche está atrás de la puerta A – el presentador abrirá una de las otras puertas (B o C) y, si usted cambia de puerta, perderá el coche. Ahora imaginemos que el coche está atrás de la puerta B – el presentador abrirá la puerta C y, si usted cambia de puerta, ganará el coche. Por último, supongamos que el coche está atrás de la puerta C – el presentador abrirá la puerta B y, si usted cambia de puerta, ganará el coche. Analizando de esa forma, vemos que si usted cambia de puerta, tendrá dos chances en tres de ganar el coche, o sea, su probabilidad de ganar es de 2/3. Si usted no cambia de puerta, tendrá una chance en tres de ganar el coche, o sea, la Probabilidad de que usted gane es de 1/3.

CONCLUSIONES

Las competencias de Alfabetización, Razonamiento y Pensamiento Estadístico son estimuladas cuando se trabaja con datos reales, preferiblemente recolectados por los propios alumnos, cuando los problemas son contextualizados, cuando los estudiantes identifican la importancia de las herramientas estadísticas para el análisis de fenómenos concretos, cuando los resultados obtenidos son analizados e interpretados usándose argumentación específica provenida por la ciencia estadística. Las actividades aquí propuestas buscan seguir esa línea, de modo que tienden a contribuir al desarrollo de las competencias citadas.

Con relación a la competencia crítica, ella emerge en las actividades cuando los alumnos son confrontados con cuestionamientos que tienen en cuenta problemáticas sociales y políticas ligadas a la realidad que los rodea. En esas actividades, fueron planteadas cuestiones que abordan temas como los juegos de azar, que son estimulados por el gobierno con las loterías oficiales.

En la medida en que se alienta a los estudiantes para debatir esas cuestiones y reflexionar sobre sus actitudes frente a los problemas, se fomenta la criticidad. Por lo tanto, los estudiantes son animados a abandonar sus posiciones de comodidad, que reflejan la alienación y la pasividad frente a los problemas sociales y políticos que afectan a la comunidad en que viven.

No menos importante es el hecho de que las actividades se desarrollan con el fin de instigar la curiosidad de los estudiantes, abordando temas de gran interés, correspondientes a distintos niveles de la escuela, buscando además del desarrollo de las capacidades ya mencionadas, fomentar el entretenimiento y aumentar la importancia que los estudiantes le dan a la disciplina, sin perder de vista el contenido estadístico.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Bellos, A. (2010). *Alex's adventures in Numberland: dispatches from wonderful world of mathematics*. London: Bloomsbury.

Boyer, C. (1994) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher.

Campos, C. (2007). *A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação*. (Tesis de doctorado). Rio Claro: UNESP-IGCE.

Campos, C. (2016). *Towards Critical Statistics Education: theory and practice*. Saarbrücken, Alemania: Lambert Academic Publishing.

Campos, C., Wodewotzki, M. & Jacobini, O. (2011). *Educação Estatística – teoria e prática em ambientes de modelagem matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Mlodinow, L. (2008). *The drunkard's walk: how randomness rules our lives*. New York: Pantheon.

ANEXO 1: PROBLEMAS

Problema 1:

Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas, escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda, lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Ponga C para cara y + para cruz.

Secuencia estimada:

Secuencia real:

Cuestiones para discusión:

¿Cómo podremos distinguir una secuencia realmente aleatoria de otra que hemos inventado? ¿Cuántas caras hay en la secuencia real?

Problema 2:

En un juego de cara-o-cruz, fueran realizados dos lances independientes de una moneda honesta. Es sabido que por lo menos uno de los resultados fue cara. La probabilidad de que los dos resultados hayan sido cara, es:

a) 1/4 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 3/4

Cuestión para discusión:

¿Sus intuiciones sobre aleatoriedad fueron suficientes para resolver este problema?

Problema 3:

Considerando los resultados obtenidos en el lanzamiento de una moneda 20 veces realizado en la actividad 1, ¿es posible decir, en un nivel de significancia del 5%, que su moneda es honesta?

Preguntas para discusión:

¿El dinero recaudado con las apuestas en la lotería es destinado a qué? ¿Qué decir sobre blogs, post en redes sociales o materias divulgadas en los medios de comunicación en general que ponen en duda la honestidad del sorteo de la lotería? ¿Conoces alguna estrategia ganadora para el juego de la lotería? ¿Cree que es digno apostar?