■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 2 - No. 2 • Agosto 1990 ■ © GEI ■ Pág. 53 ■

ARTICULOS

Algunas curiosidades sobre geometrías las en el plano

El presente artículo apareció publicado en el N° 0 de nuestra revista (agosto 1988). Sin embargo, debido a los problemas de producción y distribución que enfrentó el Comité Editorial para la publicación de este número, los artículos que ahí aparecieron no han tenido la difusión debida. Por este motivo, hemos decidido incluir en éste y en cada uno de nuestros próximos números los artículos publicados en el N° 0, adicionalmente a los artículos que se seleccionaron para cada número.

COMITÉ EDITORIAL

Introducción

La geometría, etimológicamente hablando, es la ciencia o el arte de medir. Pero, ¿qué es lo que se mide? Desde los elementos de Euclides, cuando se trató de describir a la geometría en una forma axiomática, completamente formal, la relación entre geometría y medición ha quedado un tanto oculta. Sin embargo, podemos decir que en estas formulaciones axiomáticas de la geometría se parte siempre de la suposición de un conjunto subyacente, al que podemos llamar con el nombre genérico de "espacio", junto con ciertos subconjuntos de interés, cuyas propiedades son las que interesa estudiar: por ejemplo, en el caso del "plano", caso al que restringiremos nuestra atención en lo sucesivo y pensando en la geometría euclidiana, los conjuntos de interés son básicamente los puntos, rectas y, posteriormente en una etapa más avanzada del estudio, las secciones cónicas, etcétera.

En general, los conjuntos básicos se definen axiomáticamente enumerando las propiedades de interés, con definiciones como: "dos puntos definen una recta", "dos rectas no paralelas se intersecan en un punto", etc. Sin embargo, como lo hizo notar Riemann, con frecuencia estos axiomas sólo reflejan una parte de la situación, ya que la definición del espacio suele quedar implícita en estas formulaciones, de modo que pueden existir muchos modelos fundamentalmente distintos de una misma geometría.

Si estudiamos con cuidado algún sistema de axiomas para la geometría, rápidamente veremos que los axiomas se refieren no sólo a los conjuntos de interés, sino más bien a ciertas manipulaciones que se

Fausto Ongay
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT)
Guanajuato, Guanajuato, México

pueden hacer con parejas de ellos. Esto nos da la clave para responder a la pregunta original: lo que se mide (o lo que interesa medir, si se prefiere) son "distancias entre parejas de estos conjuntos". Un momento de reflexión nos muestra que, en el caso euclidiano, las "distancias" entre puntos se miden con la noción usual de distancia, en tanto que la manera fundamental de medir "distancias" entre rectas es mediante el ángulo que forman éstas entre sí.

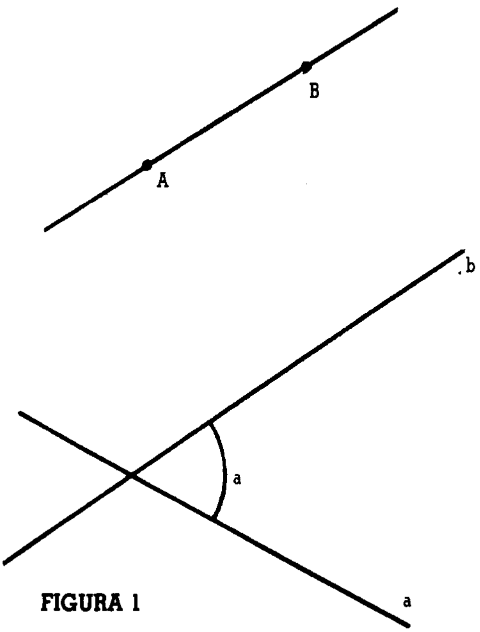

FIGURA 1
Dos medidas de separación: distintas entre rectas

Un gran logro de la geometría a fines del siglo pasado fue precisamente el percatarse de que hay múltiples maneras de medir tanto distancias como ángulos, y dependiendo de las maneras que se escojan, se tienen distintas geometrías. En este trabajo describiremos de manera muy intuitiva algunas de estas ideas y, en particular, describiremos someramente las nueve geometrías planas de Cayley y Klein, a quienes en esencia se deben estos resultados. Debido al nivel relativamente elemental de estas notas no nos será posible discutir el programa de Erlangen de Felix Klein, donde se define en términos de teoría de grupos lo que significa el estudio de la geometría, y por ello remitimos al lector interesado en el tema al excelente libro de I.M. Yaglom que damos como referencia.

Por otra parte, un hecho muy interesante es observar que hay una cierta "dualidad" (noción que por lo demás puede definirse en forma precisa) entre los puntos y las rectas: por ejemplo, el axioma que dice que dos puntos que no coinciden determinan una única recta, tiene su contrapartida en el axioma que dice que dos rectas no paralelas determinan un único punto. Aunque no insistiremos mayormente en ello, esta idea de dualidad es muy importante dentro del orden de ideas que discutiremos.

Finalmente, para tranquilizar un poco las conciencias, podemos decir que algunas de las geometrías que describiremos aquí son bastante más que un ejercicio mental: tienen utilidad en la práctica, en particular dentro de la teoría de la relatividad de Einstein.

Diferentes maneras de medir ángulos y distancias

En lo que sigue, que es una discusión informal de algunas posibilidades de medición de ángulos y distancias, usaremos como marco de referencia las nociones usuales de la geometría euclidiana, así como un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, pero con la advertencia de que intentamos describir geometrías en el plano que no coinciden con la geometría euclidiana.

Podemos tomar como punto de partida un detalle sutil en cuanto a la medición de ángulos en la geometría euclidiana, y es el hecho que en la práctica los ángulos se miden por el arco que subtienden en un círculo de radio uno. Esto nos permite hacer la importante observación de que las cónicas desempeñan un papel importante en el proceso de medición de ángulos y, como veremos más adelante, también en la medición de distancias.

En vista de lo anterior, quizá no resulte tan sorprendente la siguiente construcción:

Consideremos dos rectas a, b que pasan por el origen y el círculo unitario como se muestra en la figura siguiente.

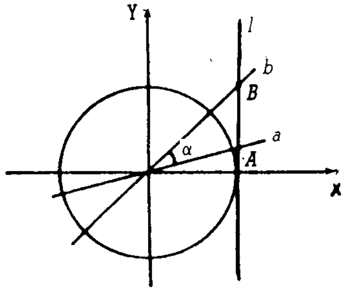

FIGURA 2

Ángulos parabólicos

Por lo dicho anteriormente, podemos pensar que el ángulo subtendido por las rectas como una medida de la distancia entre ellas y este ángulo es precisamente la longitud del segmento de círculo subtendido por las rectas. Pero notemos ahora que tenemos básicamente la misma información si consideramos en vez de α, $\tan \alpha$. Esencialmente, esto no es más que considerar la distancia euclidiana entre los puntos de intersección de las rectas con la recta mostrada en la figura. (Aunque el hecho de tener tangentes negativas es importante, pues nos da información del orden en que estamos considerando las rectas y, como es bien sabido, para algunos resultados es importante considerar ángulos dirigidos.) Esta es una manera de medir ángulos completamente satisfactoria, que sin embargo es radicalmente distinta de la manera usual, para distinguirlas llamaremos a estos ángulos parabólicos (por razones que explicaremos después) en tanto que a los ángulos usuales les llamaremos ángulos elípticos.

Por supuesto que con esta nueva medida de ángulos ocurren cosas extrañas, algunas de cuyas consecuencias mencionaremos después; pero podemos señalar que en particular, a diferencia del caso elíptico, se tienen ángulos parabólicos arbitrariamente grandes, además de que el ángulo parabólico no está definido cuando una de las rectas es paralela al eje Y (no es un número real).

Notemos por otra parte, la siguiente analogía notable entre los ángulos parabólicos y elípticos, definidos como lo hicimos arriba: ambos se pueden calcular como la mitad del área del sector comprendido entre las rectas y la curva que usamos como referencia, el círculo en el caso elíptico y la recta $x = 1$ en el caso parabólico (Figura 3).

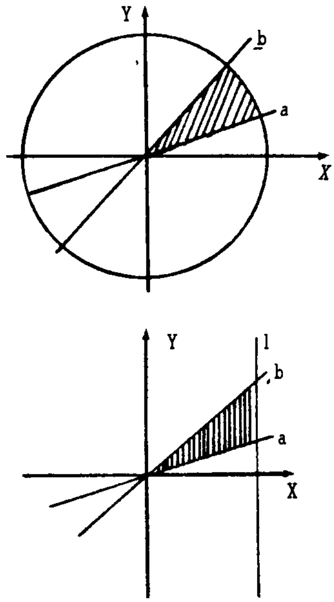

FIGURA 3

Ángulos y áreas en las geometrías euclidiana y parabólica

Vamos a analizar exactamente la misma construcción desde un punto de vista diferente, comenzando ahora no por la pareja de rectas a, b sino por los puntos de intersección de éstas con l, que llamamos A, B. (Esto, por cierto es un ejemplo de la idea de dualidad a que hacíamos alusión arriba.) La distancia entre A y B queda entonces determinada por $\tan \alpha$, por ejemplo, si una de las rectas es el eje X, la distancia es simplemente $|\tan \alpha|$.

De esta manera, escogiendo el origen fuera de l y midiendo ángulos (¡elípticos!) como en la figura recuperamos las propiedades básicas de la geometría en la recta; en definitiva, esto nos proporciona una forma de medir distancias sobre rectas que una vez más es distinta de la manera usual, euclidiana. Igual que hicimos con los ángulos, llamaremos a esta medida de distancias elíptica y a la medida euclidiana, parabólica y podemos por lo pronto señalar que en la medida elíptica de distancias, las distancias están acotadas (por π). Si combinamos las distintas posibilidades de medición de ángulos y distancias que hemos descrito se tiene un total de 4 diferentes geometrías para el plano.

(Antes de seguir adelante conviene insistir en que las propiedades básicas de estas maneras "exóticas" de medir distancias y ángulos en el fondo no dependen de su relación con la geometría euclidiana y en particular son independientes de la elección de sistemas de referencia fijos: ésto lo hemos hecho tan sólo para facilitar la discusión.)

La terminología misma que hemos usado sugiere que debe haber una manera hiperbólica de medir distancias y ángulos y en efecto, se tiene tal manera, que podemos describir como sigue:

Para el caso de ángulos, consideremos la hipérbola equilátera de la Figura 4 y las rectas a, b que pasan por el origen y definimos el ángulo hiperbólico entre a y b como el área de la región comprendida entre las rectas a y b y el segmento de la hipérbola subtendido por éstas.

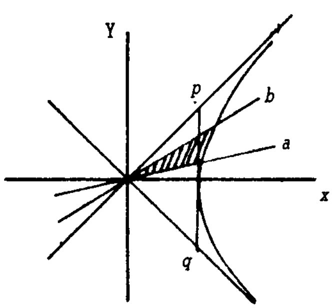

FIGURA 4

Ángulos hiperbólicos

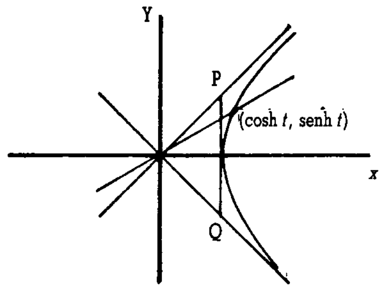

FIGURA 5

Distancias hiperbólicas

Para definir las distancias hiperbólicas, la manera más simple de proceder es definir a la recta hiperbólica como el segmento PQ (sin los extremos) y definir la distancia hiperbólica entre dos puntos del segmento como el ángulo hiperbólico entre las rectas que pasan por el origen y esos puntos. (Notemos que la longitud hiperbólica del segmento PQ es infinita; para aquellos a quienes esto resulte molesto, se puede describir a la recta hiperbólica usando las funciones hiperbólicas, recordando que si el punto P está descrito por $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$ entonces el ángulo hiperbólico entre la recta que pasa por el origen y el punto P y el eje X está dado por $t/2$.)

Las nueve geometrías planas de Cayley y Klein

Con las tres maneras de medir ángulos y las tres de medir distancias podemos formar 9 distintas geometrías en un plano, las que se resumen en la Tabla 1. Es conveniente señalar que 8 de esas geometrías son no euclidianas.

Estas geometrías fueron estudiadas primero por Cayley y posteriormente de una forma más sistemática por Klein y de ahí el nombre. Las geometrías cuyos nombres no están explícitamente mencionados son las menos usuales y, excepto GDH, que significa "geometría doblemente hiperbólica" son "duales" de las geometrías que aparecen en el otro extremo de la tabla,

		Medida de ángulos		
		Elíptica	***Parabólica***	***Hiperbólica***
Medidas de distancias	Elíptica	Geometría Elíptica	GCE	GCH
	Parabólica	Geometría Euclidiana	Geometría Galileana	Geometría Minkovskiana
	Hiperbólica	Geometría Hiperbólica	GCM	GDH

con respecto a la diagonal principal (lo que en el lenguaje de las matrices se llama trasponer una matriz). Esto se expresa con el prefijo "co", por ejemplo se habla de la geometría coeuclidiana y lo que significa es que los resultados válidos en una geometría se trasladan a su geometría dual por medio del principio de dualidad.

Es interesante notar que las geometrías que se encuentran en la diagonal principal son autoduales, es decir, son iguales a sus duales lo que tiene interesantes consecuencias. Por ejemplo, en la geometría elíptica vale el axioma que dice que cualesquiera dos puntos determinan una recta y éste tiene como dual el axioma que postula que cualesquiera dos rectas se intersecan en un punto, es decir, ¡no existen rectas paralelas en la geometría elíptica! Algo semejante ocurre en la geometría "esférica", que es la que sucede sobre la superficie de una esfera (¡la Tierra por ejemplo!), donde los arcos de círculo máximo las geodésicas) desempeñan el papel de rectas. Sin embargo, aunque la geometría esférica nos es más simple de visualizar, tiene la desventaja teórica con respecto a la geometría elíptica de que las rectas se intersecan en dos puntos: las antípodas. Es interesante notar que la geometría esférica es la geometría no euclidiana más antigua históricamente hablando y sin embargo hubo que esperar al siglo XIX para que la gente tuviera conciencia de la existencia de geometrías no euclidianas y, para colmo fue a través de una geometría sensiblemente más compleja, la geometría hiperbólica de Gauss, Bolyai y Lobachevsky, que se obtuvo esta conciencia.

Para darnos una idea de la multitud de posibilidades que hemos creado, en las siguientes dos tablas se describen algunas peculiaridades de las geometrías de Cayley y Klein con respecto al axioma de las paralelas. Obsérvese que las tablas son "duales" entre sí.

TABLA 2

NÚMERO DE RECTAS QUE PASAN POR UN PUNTO A FUERA DE UNA RECTA Y QUE NO INTERSECTAN A ÉSTA

		Medidas de distancias		
		E	**P**	**H**
Medidas de ángulos	**E**	0	1	∞
	P	0	1	∞
	H	0	1	∞

TABLA 3

NÚMERO DE PUNTOS FUERA DE UNA RECTA a QUE NO PUEDEN UNIRSE POR UNA LÍNEA CON UN PUNTO A FUERA DE AQUELLA

		Medidas de distancias		
		E	**P**	**H**
Medidas de ángulos	**E**	0	0	0
	P	1	1	1
	H	∞	∞	∞

Modelos euclidianos de las geometrías de Cayley y Klein

Uno de los aspectos más importantes con respecto a estas geometrías, que además tuvo una gran importancia histórica, es el hecho de que existen modelos euclidianos para tales geometrías. Es decir, es posible construir superficies "sumergidas" en un espacio euclidiano (o más en general seudoeuclidiano) de dimensión apropiada, donde con una definición apropiada de recta se realicen los postulados de dichas geometrías. Una de las consecuencias de esto es que tales geometrías son igualmente válidas que la geometría euclidiana, este hecho puso fin a la larga búsqueda de una demostración del postulado de las paralelas de Euclides (la interesante historia de esta búsqueda puede leerse por ejemplo en el libro de Coxeter).

Vamos a describir brevemente modelos para tres de las geometrías de Cayley y Klein: para la geometría elíptica, para la geometría galileana, para la geometría hiperbólica.

Para la geometría elíptica el modelo más simple de visualizar consiste en un hemisferio donde los puntos antípodas sobre el ecuador han sido identificados. Debido a esta identificación la superficie resultante ya no puede ser incluida en el espacio euclidiano de dimensión tres (aunque puede meterse en R4, que es la mayor complicación con este modelo, pero al mismo tiempo, la identificación de puntos antípodas es importante para evitar que las rectas de esta geometría (i.e. las geodésicas) se intersequen en más de un punto.

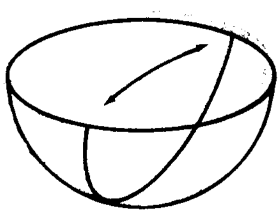

FIGURA 6

El "plano" elíptico

En general, para entender los resultados correspondientes a esta geometría, conviene tener presente la figura del hemisferio, observar lo que sucede ahí y finalmente recordar que si en alguna construcción aparecen puntos antípodas, éstos deben ser identificados. Por ejemplo, para verificar el postulado de las paralelas a que hacíamos alusión arriba, basta con notar que sobre el hemisferio si un par de geodésicas se intersectan en dos puntos, éstos son necesariamente antípodas sobre el ecuador; pasar a la geometría elíptica es simplemente identificar estos dos puntos en uno, de modo que, en efecto, todo par de rectas que no coincidan se intersectan en un único punto. Algunas particularidades de esta geometría que son fáciles de verificar son el hecho de que todas las geodésicas son de longitud finita y que la suma de los ángulos internos de un triángulo está acotada (por 3), pero es siempre mayor que π. Otro hecho menos evidente pero más interesante, es el que los ángulos de un triángulo determinan su área, y de hecho se puede escribir una fórmula sencilla para esta relación. Como se puede observar, ¡todos estos hechos son radicalmente diferentes de lo que sucede en el caso euclidiano!

Para la geometría galileana, que por cierto es una de las más simples, el modelo más sencillo es pensar en el plano cartesiano usual pero considerando como rectas solamente a aquéllas que no son verticales (es decir, paralelas al eje de las Y) y definiendo la distancia entre pares de puntos como la diferencia de las abscisas. Por cuestiones formales, pero también de conveniencia en la escritura de las fórmulas, se define una "distancia especial" para los puntos sobre una recta vertical fija como la diferencia de las ordenadas de éstos (recuérdese que esto no es otra cosa que un ángulo parabólico).

En la geometría parabólica, que es autodual, tanto los ángulos como las distancias no están acotados; el equivalente de los círculos son pares de rectas verticales o parábolas con eje vertical: las primeras porque son el conjunto de puntos que son equidistantes de un punto fijo y las segundas porque son el conjunto de

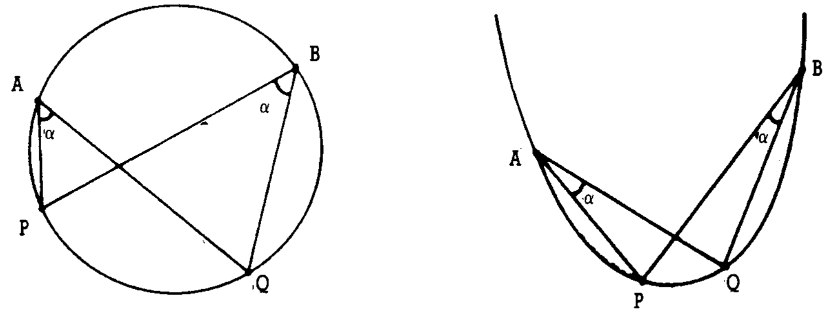

FIGURA 7

Círculos euclidianos y ciclos parabólicos

puntos desde el cual un segmento fijo determina el mismo ángulo (obsérvese una vez más la dualidad entre puntos y rectas); esto último, que en cierta forma justifica el calificativo de parabólica para esta geometría, es un ejercicio sencillo, pero no trivial, de geometría analítica.

Cabe asimismo señalar que la geometría galileana desempeña para la mecánica newtoniana (en una dimensión) el mismo papel que la geometría de Minkowski para la relatividad especial de Einstein. La razón es que, si dentro de esta geometría identificamos al eje X con el eje del tiempo y al eje Y con el eje de posiciones (recuérdese que estamos describiendo movimientos en una dimensión), las transformaciones que preservan la distancia entre dos puntos, es decir las transformaciones rígidas, que son el equivalente de las traslaciones y las rotaciones en la geometría euclidiana usual, son precisamente las transformaciones que cambian de un sistema de referencia a otra que se mueve con velocidad constante con respecto al primero.

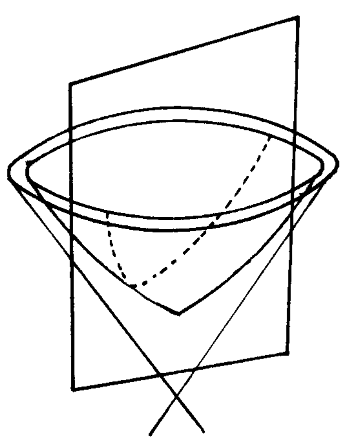

FIGURA 8

Un modelo euclidiano de la geometría hiperbólica

Finalmente, para la geometría hiperbólica, un modelo fácil de visualizar y que justifica ampliamente el calificativo hiperbólico para esta geometría, es pensar en un manto de un hiperboloide de dos mantos, como el que se muestra en la figura, y tomar como geodésicas a las hipérbolas que resultan de intersectar tal manto con planos que pasan por el origen.

Podemos señalar que en esta geometría, al igual que en el caso euclidiano usual, las rectas tienen longitud infinita pero los ángulos están acotados, sin embargo, la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que π y, al igual que en el caso de la geometría elíptica, la medida de los ángulos de un triángulo determina el área de éste. Asimismo, como se indica en la Tabla 2, el número de paralelas a una recta dada y que pasan por un punto dado fuera de esa recta, es infinito; ésta fue la manera en que inicialmente se construyó esta geometría, negando el quinto postulado de Euclides.

Un comentario final con respecto a las geometrías elíptica e hiperbólica. Obser-

FIGURA 9

Ángulos de triángulos en las geometrías hiperbólica y elíptica

vemos que, para regiones muy pequeñas de los respectivos espacios, las construcciones geométricas se asemejan considerablemente a las correspondientes en la geometría euclidiana usual. Esta situación se ilustra con los triángulos de la Figura 9 y tiene bastante interés histórico: en efecto, al comenzar el estudio de las geometrías no-euclidianas surgió de manera natural la pregunta de ¿cuál es la geometría que rige en nuestro Universo?

La respuesta a esta pregunta aún no se ha dado, pero esta observación muestra que hay varios candidatos igualmente aceptables desde un "punto de vista experimental", es decir, teniendo en cuenta que al medir se cometen errores, si restringimos nuestra atención a una región demasiado pequeña del espacio, restricción que puede ser inevitable por la imposibilidad que tenemos de observar el Universo de un sólo golpe, quizá no nos sea posible distinguir entre una geometría euclidiana y una geometría hiperbólica, por ejemplo. A la luz de los conocimientos actuales, la geometría que más se asemeja a la de nuestro Universo parece ser la geometría de Minkowski, pero en 4 dimensiones.

Bibliografía

H.M.S. COXETER. "Non-Euclidean Geometry". Mathematical Expositions Vol. 2, University of Toronto Press, 5a. ed. 1978.

I.M. YAGLOM. "A simple Non-Euclidean Geometry and his Physical Basis". Springer-Verlag, 1979.