

# CRITERIOS DE IDONEIDAD COGNITIVA PARA EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA ESPACIAL EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Andrea Cruz - María Magdalena Gea - Belén Giacomone - Juan D. Godino  
andrea25@correo.ugr.es - mmgea@ugr.es - giacomone@correo.ugr.es - jgodino@ugr.es  
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Primario

Palabras clave: Geometría espacial; idoneidad didáctica; faceta cognitiva

## Resumen

*En este artículo se identifican diversos conocimientos didáctico-matemáticos sobre el estudio de la geometría espacial en los primeros niveles educativos. Se trata de una investigación cualitativa, de tipo documental, basada en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, específicamente sobre la visualización espacial de figuras de tres dimensiones. Se comienza estudiando los aportes de Piaget e Inhelder (1967), quienes presentan un modelo de desarrollo del conocimiento espacial que fundamenta la planificación de la enseñanza de la geometría, que se complementa con otras investigaciones como la clase de procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la geometría propuestos por Duval (2001) y los niveles de desarrollo espacial de Van Hiele, entre otros. Se hace uso de la Teoría de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013), como sistema teórico y metodológico de apoyo al profesor en la reflexión sobre su práctica docente, como ayuda para el diseño y mejora de la intervención educativa y a la vez, como fundamento para la formación del profesorado. Los resultados de este estudio aportan criterios o indicadores específicos, relativos a la faceta cognitiva del conocimiento geométrico, que será de utilidad para la labor docente sobre el tema.*

## 1. Introducción

Existe abundante investigación referente a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, cuyos resultados pueden orientar a los docentes; sin embargo, puede provocar una dificultad para la reflexión y la toma de decisiones en el diseño y mejora de las intervenciones educativas dada la diversidad de enfoques teóricos que las fundamentan o propósitos que abordan. En este trabajo se presenta el proceso de elaboración de indicadores que faciliten la labor docente en este sentido. Nos centramos en el tema de visualización espacial de figuras de tres dimensiones, en los primeros niveles de educación primaria y se aportan criterios específicos atendiendo al grado en que los contenidos son adecuados y se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes. A continuación, se describe el marco teórico, se sintetizan las investigaciones relevantes en el área, se muestra la construcción de los indicadores específicos. Finalmente, se incluyen las reflexiones finales y la implicación de este trabajo para la educación matemática.

## **2. Marco teórico y método**

La Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, 2013; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) dispone de una Guía de Valoración de Idoneidad Didáctica (GVID) compuesta de seis facetas con criterios que ayudan a describir, explicar y valorar diversos aspectos clave de un proceso de estudio, cuya aplicación y discusión es relevante por parte de los formadores de profesores, los propios profesores e investigadores, pues “permitirán su progresiva mejora y enriquecimiento” (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, p. 60). En esta investigación se pretende refinar esta herramienta a través de un análisis de contenido de investigaciones y publicaciones relevantes en el tema, orientadas al aprendizaje del estudiante, siendo una investigación cualitativa de tipo descriptiva. Con la información obtenida se formulan criterios específicos relativos a la idoneidad cognitiva sobre la visualización espacial de figuras de tres dimensiones en educación primaria, cuya aplicación podría ayudar a alcanzar niveles altos de idoneidad de los procesos instruccionales.

## **3. Investigaciones relevantes y resultados**

### **3.1. Desarrollo del conocimiento espacial de Piaget**

Piaget y colaboradores (Piaget e Inhelder, 1967; Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960) proponen una teoría del desarrollo de conceptos espaciales en el niño que distingue entre *percepción* y *representación* (o imagen mental). El conocimiento espacial provendrá de la práctica sensorio motriz, lo que posteriormente permitirá coordinar las imágenes mentales para concretarlas en operaciones en un nivel representativo. Estas prácticas en el espacio reflejan propiedades del pensamiento lógico-operacional y son construidas a través de la organización y coordinación progresiva de las acciones motoras e interiorizadas del niño (Gonzato, 2013, p. 73). De esto se desprende el siguiente indicador de idoneidad cognitiva:

*- Interiorizar las representaciones de manera gradual, desde la construcción del espacio perceptual a un nivel práctico, pasando por la representación de conexiones y relaciones espaciales entre objetos, favorece la adquisición de representaciones mentales que se reflejan en propiedades de pensamiento lógico-operacional.*

Piaget destaca tres tipos de relaciones espaciales que distinguen los niños. En primer lugar, las *topológicas* que son globales, independiente de la forma o el tamaño como la cercanía (proximidad), la separación, la ordenación, el cerramiento y la continuidad. El segundo grupo son las que denomina *proyectivas*, que suponen la capacidad del niño

para predecir qué aspecto presentará un objeto al ser visto desde diversos ángulos. El tercer grupo de propiedades geométricas son las *euclídeas*, que son las relativas a tamaños, distancias y direcciones, que conducen por lo tanto a la medición de longitudes, ángulos, áreas, entre otras. Con este análisis se puede establecer el siguiente indicador de idoneidad:

*- Avanzar progresivamente con el fin de capacitar al alumno en la organización espacial, desde las propiedades topológicas, como elementales entre los objetos (vecindad, separación, orden, sucesión, continuidad); las proyectivas, que se fundan en la topológicas y responden a la necesidad de situar en función de la perspectiva, un objeto o elementos de un mismo objeto en relación con los demás; hasta las euclídeas, relaciones que demuestran la capacidad de coordinar los objetos entre sí en relación con unas coordenadas de referencia (supone la utilización de medidas de longitud, capacidad, superficie, etc.).*

### **3.2. Niveles de desarrollo del pensamiento geométrico espacial de Van Hiele**

Van Hiele (2002) se enfrenta más concretamente al pensamiento geométrico y lo desarrolla en diferentes niveles de sofisticación. Cada uno de estos niveles describen los tipos de razonamiento geométrico, que parte del intuitivo de los niños de preescolar hasta el formal de los estudiantes de niveles superiores. En esta teoría se explicita que, para pasar a los niveles superiores es necesario un desarrollo mental a través de la transformación de su estructura en forma gradual o de su sustitución por otra (reestructuración) nueva o más compleja. Por lo que, en los primeros niveles es importante desarrollar el razonamiento intuitivo en que los estudiantes visualicen diferentes estructuras, lo que permitirá construir conceptos más complejos y adecuados a criterios matemáticos establecidos. El salto de un nivel a otro también dependerá de la planificación didáctica que se realice a través de una secuencia de procesos de instrucción.

Tres son los niveles que se consideran para ser desarrollados en los primeros cuatro cursos de educación primaria (Jaime y Gutiérrez, 1990) y que describen particularmente los tipos de razonamiento geométrico desde el intuitivo hasta el informal. En primer lugar, el *Nivel 0* referido al reconocimiento de figuras, en que los objetos de pensamiento son formas y se conciben según su apariencia; en segundo lugar, el *Nivel 1* referido al descubrimiento de propiedades, en que los objetos de pensamiento son clases de formas, en lugar de formas individuales; por último, el *Nivel 2* referido a la deducción informal, en que se realiza la clasificación de las figuras y sus propiedades. Por lo que se desprende el siguiente indicador referente al componente de aprendizaje:

*- Los niños comienzan por el reconocimiento de un objeto físico en el espacio sin identificar sus partes y razonan en base a sus experiencias y transformaciones visuales. Luego, pasan del razonamiento experimental en que identifican propiedades a través de la observación y la experimentación, hacia un razonamiento lógico con definiciones y argumentos informales de justificación para la definición de un concepto y clasificación de una figura.*

En este sentido, es necesario tratar el conocimiento previo para el estudio del tema:

*- Conocer el nivel de razonamiento geométrico permitirá la realización de una planificación adaptada al nivel de desarrollo mental de los estudiantes para una adecuada transformación de su estructura en forma gradual, a través de diferentes procesos de instrucción en situaciones didácticas.*

Se puede, por tanto, extraer indicadores esenciales referentes al componente de enseñanza, que coinciden en gran medida con los que Pérez (2013) propone para determinar la ubicación de un alumno en un nivel de este modelo. Estos son:

*- La realización de desarrollos espontáneos y su construcción en los primeros años que, de manera lógica y a través de su experimentación y observación, lograrán la identificación de las propiedades necesarias para una idónea visualización y construcción de los objetos.*

*- El manejo de objetos reales del entorno en forma global y unitaria; y la identificación de figuras en dibujos con orientaciones variadas para su descripción física y diferenciación de sus semejanzas y diferencias.*

*- La utilización de vocabulario geométrico acompañado de términos de uso común para describir las figuras geométricas y argumentar, que además muestra la apropiación y comprensión conceptual que sobre ellas se posee, en términos de sus propiedades.*

*- Relacionar elementos y componentes permitirá la clasificación lógica de los objetos y el descubrimiento de nuevas propiedades por medio del razonamiento informal.*

*- La formulación de generalizaciones acerca de las propiedades de figuras mediante las comprobaciones de una o pocas clases de figuras geométricas y su uso en contexto.*

*- Utilizar el dibujo de figuras geométricas que contenga información específica para justificar las conclusiones con relaciones lógicas y argumentos informales.*

### **3.3. Procesos cognitivos de Duval**

Según Duval (2001), la geometría involucra tres clases de procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas: visualización, construcción y razonamiento. Para el autor la visualización es un recurso intuitivo y no depende de la construcción, pero la construcción puede guiar a la visualización dependiendo de las conexiones entre las propiedades matemáticas y las herramientas usadas; y que puede ser necesario para encontrar una demostración. El razonamiento, en cualquier caso, nos permite desprender una nueva información de otras informaciones dadas que se

organizan a través del lenguaje y pueden ser de tres formas: inducción, abducción o inferencia. Estas tres clases de procesos cognitivos están conectadas y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría. De lo que se puede extraer el siguiente indicador de idoneidad:

*- La visualización, la construcción y el razonamiento son procesos cognitivos siendo los efectos de sus acciones necesarios para la competencia geométrica. No dependen entre sí, pero se encuentran necesariamente conectados.*

Los procesos cognitivos involucrados en la resolución de un problema o el desarrollo de una demostración son tres: *aprehensión perceptiva*, que es la identificación simple de una configuración; *aprehensión operativa*, la cual se produce cuando se modifica una configuración inicial; y *aprehensión discursiva*, que produce una asociación entre una configuración y afirmaciones matemáticas. Por tanto, se establece el siguiente indicador:

*- Es importante que en los primeros niveles de enseñanza se propongan situaciones-problema naturales, que promuevan la aprehensión perceptiva, cuya solución implique procesos de aprehensión operativa y discursiva a través de la descripción, explicación y argumentación. Poco a poco, y de modo gradual, se reforzarán estos procesos y se dará paso a aprendizajes teóricos.*

### **3.4. Ejemplos prototípicos de figuras**

Scaglia y Moriena (2005) mencionan que el prototipo de una figura es la imagen mental que un alumno posee de ella y que se ha formado a partir del encuentro reiterado con representaciones gráficas de determinadas características (conceptuales o propias del dibujo). Estas imágenes mentales prototípicas poseen, según Hershkowitz (1989), atributos propios que hacen referencia específica a aspectos conceptuales y a la posición particular de la representación gráfica del concepto geométrico utilizado, pero como Rey (2004) menciona, su uso puede traer consecuencias no deseables en la construcción de conceptos. El autor propone recurrir no sólo a ejemplos visuales sino también a las definiciones explicadas en forma verbal y al análisis de los ejemplos tomados. En este sentido, Pérez (2013) también hace referencia a las dificultades que los estudiantes pueden presentar en la representación de figuras cuando tiene que ver con la comprensión de sus características o con estrategias propias de construcción. Dado este análisis es importante considerar los siguientes indicadores:

*- La utilización de variadas representaciones gráficas, no prototípicas, con el fin de no generalizar con un solo ejemplo las definiciones de un concepto geométrico.*

- Como refuerzo y anticipación a los posibles problemas que se pueden presentar en la visualización y caracterización de los objetos, se sugiere reforzar la comprensión de los conceptos y técnicas con diferentes métodos de representación.

#### 4. Guía completa de Valoración de la Idoneidad Cognitiva

En lo que sigue, se resumen los indicadores específicos basados en las investigaciones descritas. Se incluyen además los indicadores generales descritos en la GVID de Godino (2013).

Tabla 1.  
*Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva*

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos.	<p><i>Criterios generales:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).</li> <li>- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar en sus diversas componentes (tienen una dificultad manejable).</li> </ul> <p><i>Criterios específicos:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se hace necesario conocer previamente el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes para la realización de una planificación adaptada al nivel de desarrollo mental y de una adecuada transformación de su estructura en forma gradual, a través de procesos de instrucción en situaciones didácticas.</li> <li>- Se tiene en cuenta las dificultades, sesgos y limitaciones del pensamiento geométrico de los estudiantes en el proceso de estudio.</li> </ul>
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales.	<p><i>Criterios generales:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.</li> <li>- Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.</li> </ul> <p><i>Criterios específicos:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se sugiere el desarrollo gradual e inclusivo de la competencia geométrica, considerando los niveles de visualización, construcción y razonamiento.</li> <li>- Se avanza en forma progresiva desde las propiedades topológicas y proyectivas hasta las euclídeas.</li> <li>- Se sugiere reforzar los métodos de representación conceptual a través de técnicas para comprender las características del objeto y desarrollar diferentes estrategias de dibujo o construcción.</li> </ul>
Aprendizaje (Se tienen en cuenta: los tipos de problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos).	<p><i>Criterios generales:</i></p> <p>Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; competencia metacognitiva (planificación, control, evaluación, análisis-síntesis).</li> <li>- La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.</li> <li>- Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.</li> </ul> <p><i>Criterios específicos:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Se involucra la visualización, construcción y el razonamiento en situaciones-problema con procesos de aprehensión perceptiva que deriven en procesos de aprehensión operativa y discursiva, a través de la descripción, explicación y argumentación para dar paso a aprendizajes teóricos.</li> <li>- Se utiliza un vocabulario geométrico acompañado de términos de uso común para la descripción de figuras geométricas y argumentación de la apropiación y comprensión conceptual que se tiene sobre ellas en términos de sus propiedades.</li> <li>- Se interiorizan las representaciones mentales desde el espacio perceptual, a un nivel práctico y en forma gradual, pasando por la representación de conexiones y relaciones espaciales entre objetos para contribuir en la adquisición de propiedades</li> </ul>

- de pensamiento lógico-operacional.
- Se utilizan variadas representaciones gráficas no prototípicas, lo que permitirá obtener un aprendizaje significativo, adecuado a las definiciones de un concepto.
  - Se utiliza el dibujo con información específica para la justificación de conclusiones con relaciones lógicas y argumentos informales.
  - Se promueve el manejo de objetos reales del entorno en forma global y unitaria; y la identificación de figuras en dibujos con orientaciones variadas para su descripción física y diferenciación de sus semejanzas y diferencias.
  - Se sugiere realizar desarrollos y construcción espontáneos que comiencen por el reconocimiento de un objeto en el espacio; para que a través de la experimentación y la observación se realicen transformaciones visuales y se logre identificar las propiedades para la visualización y construcción de dicho objeto.
  - Se considera el nivel de reconocimiento y el razonamiento de un objeto físico en el espacio, para reconocer la comprensión que se tiene sobre ellos con argumentos informales en su definición y clasificación.
  - Se relacionan los elementos y componentes para la clasificación lógica de los objetos y el descubrimiento de nuevas propiedades por medio del razonamiento informal.
  - Se formulan generalizaciones acerca de las propiedades de figuras mediante comprobaciones en una o pocas clases de figuras geométricas y su uso en contexto.

### **Reflexiones finales**

En este trabajo se elabora una guía de indicadores de idoneidad cognitiva, centrada en la adecuación del contenido matemático de la visualización espacial tridimensional a nivel elemental. Para ello se tuvieron en cuenta como componentes los conocimientos previos, adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y al aprendizaje en sus diferentes componentes (situaciones problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos).

El fin educativo que se persigue es aportar consideraciones que contribuyan al desarrollo del conocimiento geométrico al docente, en cuanto al grado en que los contenidos son adecuados y se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes. El uso competente de la herramienta utilizada puede servir de instrumento de reflexión tanto para el investigador en educación matemática como para el profesor (Godino, Giacomone, Batanero y Font, *en prensa*), sobre los diversos factores que afectan los procesos de estudio, en este caso, de la geometría. Por ejemplo, Beltrán (2016) elabora una guía de indicadores específicos de idoneidad didáctica para el estudio de la probabilidad; luego utiliza la guía para valorar una unidad didáctica de azar y probabilidad en la educación secundaria y propone mejoras para su futura implementación. El sistema de indicadores específicos de idoneidad cognitiva elaborado en este trabajo no se considera definitivo (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) aunque, los aportes presentados abren sin duda un amplio panorama a la aplicación, no sólo en la enseñanza y aprendizaje del tema sino en el campo de la formación docente, como así también al continuo desarrollo de la TID.

## Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y CONICYT del Ministerio de Educación de Chile.

## Referencias bibliográficas

- Beltrán-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del azar y probabilidad en tercer curso ESO* (trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Duval, R. (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME. UNISON.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (en prensa). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, (aceptado).
- Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial* (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry. Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (p.p. 295-384). Sevilla, España: Alfar.
- Pérez, J. (2003). *Análisis de los contenidos geométricos de los libros de texto de Matemática de educación básica a la luz de los planteamientos teóricos del modelo de Van Hiele* (tesis de maestría). Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Venezuela.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. New York, NY: W. W.: Norton y Co.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto. *Revista Premisa, Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 22, 3-12.
- Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120.
- Van Hiele, P. M. (2002). Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. En D. Tall y M. Thomas (Eds.), *Intelligence, learning and understanding in mathematics*. Flaxton, Australia: Post Pressed.