

ANEXO 4. DIFICULTADES Y ERRORES

En este anexo, presentamos el listado de dificultades y errores propuestos para la unidad didáctica puntos críticos de la función cúbica (tabla 1). Este listado lo organizamos según las dos primeras categorías propuestas en Socas (1997) (como se cita en Gómez & González, 2016): (a) Las dificultades que corresponden a la complejidad de los objetos matemáticos y (b) las dificultades de los procesos propios del pensamiento matemático.

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
	D1. Ausencia de nociones relacionadas con el concepto de función
E1	Afirma que la variable dependiente es la independiente y viceversa
E2	Relaciona el dominio con rango y viceversa

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
D2. Dificultad para reconocer el crecimiento o decrecimiento de una función	
E3	Asume la pendiente positiva o negativa de una recta, respectivamente al decrecimiento o crecimiento de una función
E86	Asocia la pendiente nula de una recta al crecimiento o decrecimiento de una función
E4	Asocia la variación positiva o negativa de una gráfica, respectivamente al decrecimiento o crecimiento de una función
E87	Asume el cambio de crecimiento o decrecimiento de una gráfica, respectivamente al punto mínimo o máximo local
E92	Considera que una función cúbica sólo tiene pendiente positiva o negativa
E89	Considera que el crecimiento o decrecimiento de una función cúbica es constante
E101	Relaciona intervalos de crecimiento o de decrecimiento en la variable dependiente
E102	Describe la variación del crecimiento o decrecimiento, pero no relaciona los puntos críticos en ésta
D3. Dificultad para definir de manera formal concepto de punto crítico	
E5	Afirma que todo punto de inflexión es un punto crítico
E6	Verifica y analiza puntos diferentes a los extremos relativos en representaciones gráfica o ejecutable de situaciones de optimización
E98	Realiza procedimientos y obtiene resultados que dificultan la identificación del dominio admisible
E7	Asocia el punto de inflexión y los extremos relativos a los puntos críticos de una función cúbica en situaciones de optimización
E8	Asocia la derivada de una función cúbica con la pendiente de la recta tangente en un punto que no corresponde
E9	Asocia la segunda derivada de una función cúbica como un punto crítico
E10	Considera que el criterio de la primera derivada siempre permite hallar extremos relativos

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E11	Considera que todo punto crítico determina el cambio de crecimiento o decrecimiento
	D4. Dificultad para representar una situación matematizada por una función cúbica
E12	Utiliza una representación simbólica que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación
E13	Realiza tablas cuyos datos no guardan la información ni las relaciones establecidas de la situación
E14	Halla parejas ordenadas que no guardan la información ni las relaciones establecidas de la situación
E99	Realiza una corta lista de parejas ordenadas que no le permite pronunciarse sobre el tipo de función
E100	Realiza gráficas en las cuales no se identifican variables y/o unidades
E104	Realiza una tabla sin tener precisión en los valores
E15	Obtiene representaciones gráficas o ejecutables que no modelan una función cúbica
	D5. Dificultad para reconocer una situación matematizada por una función cúbica mediante sus representaciones
E16	Asocia el mayor exponente (tres) a representaciones simbólicas de la función lineal o cuadrática
E17	Asocia características gráficas de funciones diferentes a las cúbicas.
E80	Asocia características geométricas de funciones diferentes a las cúbicas.
E81	Asocia características en la representación ejecutable de funciones diferentes a las cúbicas.
E82	Asocia características en la representación tabular o numérica a funciones diferentes a las cúbicas.
	D6. Dificultad para asociar los coeficientes de la expresión simbólica con las características gráficas de la función cúbica
E18	Confunde el uso del coeficiente a en el crecimiento o decrecimiento de la función

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E19	Asocia el valor del coeficiente b al desplazamiento horizontal de la gráfica de la función
E20	Asocia el valor del coeficiente c al desplazamiento vertical de la gráfica de la función
E21	Asocia el valor del coeficiente d a un corte de la gráfica con el eje y en un punto que no corresponde
D7. Dificultad para identificar los extremos relativos en las diferentes representaciones	
E22	Asocia el punto mínimo o máximo local de una función cúbica al punto más alto o bajo que observa en la representación gráfica, geométrica o ejecutable
E23	Expresa la abscisa y la ordenada de un punto crítico sin tener en cuenta que se relacionan como pareja ordenada, lo cual impide su análisis como extremo relativo.
E24	Asocia el signo positivo del radical en la fórmula (que relaciona los coeficientes de la función cúbica y los puntos críticos) al máximo local
E25	Asocia el signo negativo del radical en la fórmula (que relaciona los coeficientes de la función cúbica y los puntos críticos) al punto mínimo local
E26	Relaciona el valor mayor en la variable independiente en la representación tabular como el máximo local
E27	Relaciona el valor menor en la variable independiente en la representación tabular como el mínimo local
E103	Toma valores muy cercanos a los puntos críticos sin que estos sean los extremos relativos
D8. Relación implícita entre operaciones aritméticas	
E28	Halla la derivada de una potencia sumando una unidad al exponente
E29	Aplica la regla para derivar una potencia sin operar el exponente del monomio
E30	Desarrolla la regla para derivar una potencia sin operar el coeficiente del monomio

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E31	Realiza operaciones aritméticas a la función derivada que resultan en abscisas críticas que no corresponden
E32	Confunde los casos de factorización que se requieren para resolver la ecuación que resulta de la primera derivada
E33	Aplica la fórmula cuadrática confundiendo los coeficientes y operaciones
E34	Iguala la derivada de la función a un valor diferente de cero
E96	Sustituye un valor positivo en el término b^2 de la fórmula cuadrática cuando el coeficiente del término lineal, de la ecuación a resolver, es negativo.
E35	Confunde las operaciones aritméticas al reemplazar la abscisa en la función cúbica para determinar punto crítico
D9. Dificultad para relacionar los sistemas de representación con el sistema de representación ejecutable	
E36	Confunde las herramientas de GeoGebra que permiten identificar los extremos relativos
E37	Expresa la abscisa del punto crítico como si fuera la ordenada
E38	Afirma que al trazar una recta horizontal que pase por los extremos relativos en una función cúbica, se genera el punto de inflexión.
E39	Asocia los extremos relativos con el punto de inflexión en la gráfica dada por GeoGebra
E44	Confunde la simbología del sistema de representación ejecutable
D10. Obligatoriedad de encontrar única respuesta a una situación problema	
E40	Considera el punto de inflexión como máximo o mínimo relativo
E41	Afirma que la solución a un problema de optimización tiene un máximo y mínimo
E42	Afirma que una función cúbica sin extremos relativos puede ser optimizada
E43	Fija una interpretación incoherente a partir de las soluciones obtenidas

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
D11. Dificultad para realizar traducciones entre representaciones de la función cúbica	
E45	Relaciona la variable independiente con la coordenada “y” y la variable dependiente con la coordenada “x” en una tabla
E46	Confunde las características de una representación geométrica
D12. Dificultad para definir formalmente el concepto de extremo relativo	
E47	Asume que todo punto crítico es un extremo relativo
E48	Asocia el máximo local al cambio de decrecimiento de una función cúbica
E95	Asocia el mínimo local al cambio de crecimiento de una función cúbica
D13. Dificultad para identificar la información relevante del problema	
E49	Asociar las incógnitas del problema a la información dada
E50	Afirma que debe maximizarse una dimensión que en realidad debe ser minimizada
E51	Afirma que debe minimizarse una dimensión que en realidad debe ser maximizarse
E52	Confunde las variables y constantes al relacionarlas en una representación simbólica
E53	Afirma que una dimensión que están en términos de dos o más variables es monovariada
E54	Afirma que la dimensión a optimizar, que se encuentra en términos de dos o más variables, está en condiciones adecuadas para ser optimizada

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E93	Asegura que, a partir de la información inicial, no es posible abordar algún tipo de representación
E88	Asume información inexistente en la situación a la hora de validar la representación que utiliza
D14. Dificultad para interpretar los extremos relativos al realizar traducciones entre diferentes representaciones de la función cúbica	
E55.	Realiza traducciones de representaciones de la función cúbica a una gráfica que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación
E56.	Realiza traducciones de representaciones de la función cúbica a una tabla que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación
E57.	Establece una representación simbólica que no guarda información las características del análisis realizado a partir de una representación gráfica o tabular o geométrica o ejecutable o parejas ordenadas de la función cúbica.
E58.	Establece relaciones entre las diferentes representaciones de la función cúbica que no guardan información con la representación de parejas ordenadas.
E59.	Realiza traducciones de representaciones de la función cúbica a una representación geométrica que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación
E60.	Realiza traducciones de representaciones de la función cúbica a una representación ejecutable que no guarda la información ni las relaciones establecidas de la situación

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E84	Asocia $b^2 > 3ac$ correspondiente al discriminante de la fórmula con la gráfica de funciones cúbicas de crecimiento o de decrecimiento en sentido estricto.
E85	Asocia $b^2 \leq 3ac$ correspondiente al discriminante de la fórmula con la gráfica de funciones cúbicas optimizables.
D15. Dificultad para elegir un procedimiento al resolver una ecuación cuadrática	
E61	Asocia métodos de solución de ecuaciones lineales a ecuaciones cuadráticas
D16. Dificultad para resolver ecuaciones cuadráticas	
E62	Asocia arbitrariamente los coeficientes de la ecuación cuadrática a la fórmula
E63	Asocia la raíz cuadrada de un número a la mitad del mismo
E64	Utiliza casos de factorización que no corresponden con la expresión algebraica
E65	Completa cuadrados con un valor diferente a $\left(\frac{-b}{2a}\right)^2$ \square
D17. Dificultad para elegir procedimientos de acuerdo con la forma en que se representa la situación	
E66	Considera la información de partida como irrelevante para proceder frente a la información de salida (solución)
D18. Dificultad para determinar la cantidad de puntos críticos en una función cúbica	

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E67	Asocia una cantidad de puntos críticos que no corresponde al tipo de función cúbica (funciones optimizables y de decrecimiento o de decrecimiento en sentido estricto) en una representación gráfica, geométrica o ejecutable
E95	Considera que, por medio de las representaciones gráficas o geométrica, no es posible identificar la cantidad de puntos críticos
E83	Considera el método para hallar las raíces de la función como la técnica para determinar la cantidad de puntos críticos en el sistema de representación simbólico
E68	Identifica más de tres puntos críticos en una representación numérica o tabular
E69	Halla más de dos soluciones a una ecuación cuadrática
D19. Dificultad para asociar la cantidad de puntos críticos a fenómenos de optimización o de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto	
E70	Asocia una función cúbica sin puntos o con un punto crítico a fenómenos de optimización
E90	Considera que una función cúbica siempre tiene dos puntos críticos
E91	Considera que una función cúbica que modela fenómenos de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto no tiene puntos críticos
E94	Considera irrelevante la cantidad de puntos críticos de una función para describir su variación
E71	Asocia una función cúbica con dos puntos críticos a fenómenos de crecimiento o decrecimiento en sentido estricto

Tabla 1

Listado de dificultades y errores asociados a los puntos críticos de la función cúbica

E	Descripción
E72	Confunde los procedimientos que determinan los extremos relativos de una función cúbica.
E73	Confunde los procedimientos que solucionan una ecuación cuadrática.
E74	Considera la comparación de abscisas de extremos relativos para caracterizarlos como máximo y mínimo.
E75	Argumenta la solución obtenida sin tener en cuenta el contexto del problema.
E76	Construye sólidos geométricos con características distintas a las planteadas en un problema de optimización
E77	Confunde los datos relevantes del problema al utilizar material manipulable
E78	Registra información parcial incoherente con la solución de un problema de optimización
E79	Confunde los datos en la comparación de información parcial registrada en la solución de problemas de optimización.
E97	Asocia que el uso del discriminante de la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$ le permite determinar el cambio de crecimiento y decrecimiento de las funciones cúbicas.

Nota. E: error, D: dificultad.