Universidad de los Andes
Facultad de Educación

ANEXO 1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN PARA EL TEMA INTERVALOS

En este anexo, presentamos los sistemas de representación propuestos para el diseño previo de la unidad didáctica intervalos (figura 1).

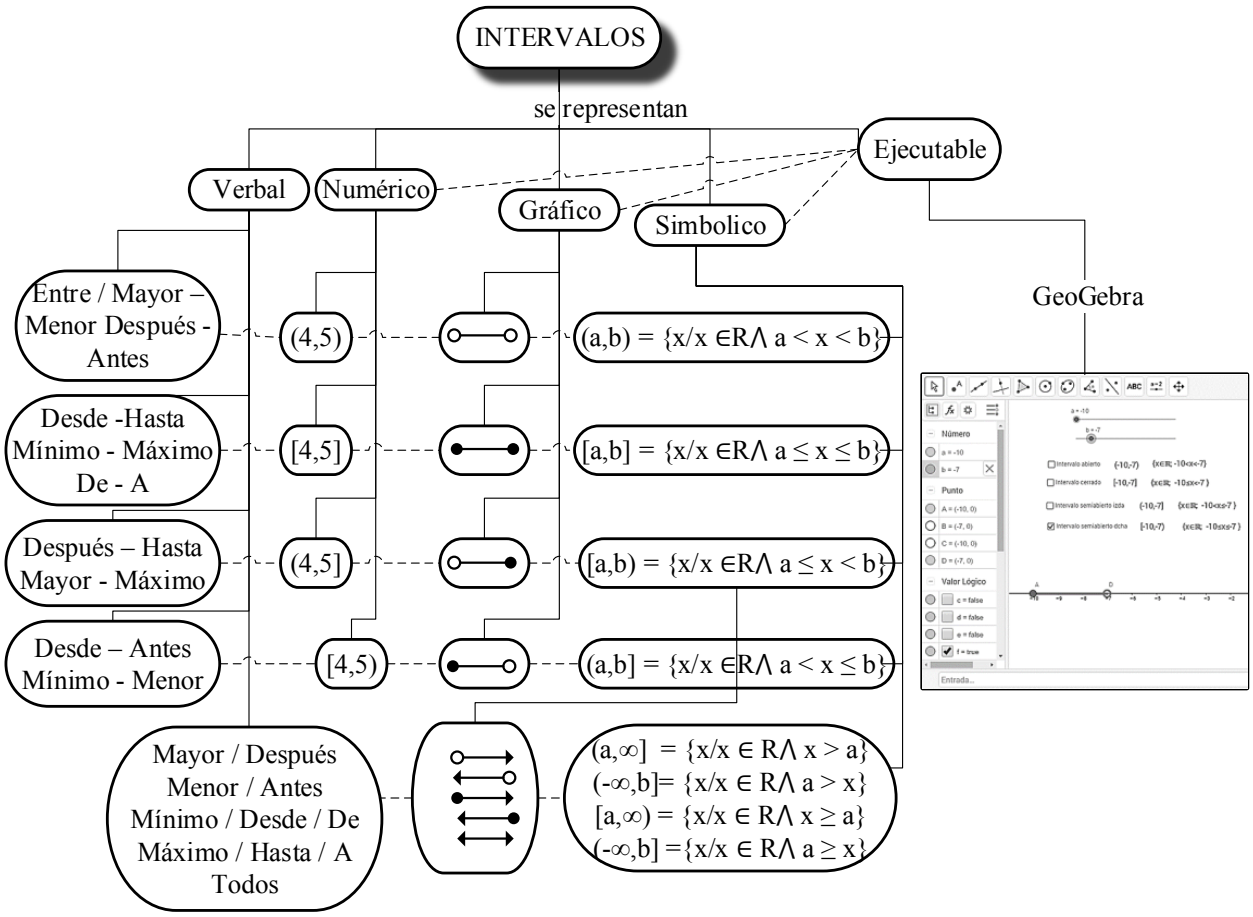

Figura 1. Sistemas de representación para el tema intervalos

1. Sistema de representación verbal

Consideramos que los intervalos tienen un sistema de representación verbal por la existencia de palabras que expresan su significado. Las palabras que más utilizamos para referirnos al tema son: desde, hasta, entre, mayor, menor, máximo, mínimo, después, antes y todos. Las palabras "desde" y "mínimo" se refieren a la cota inferior del intervalo cuando está incluida; las palabras "hasta" y "máximo" se refieren a la cota superior cuando está incluida; la palabra "entre" indica que existen dos cotas no incluidas en el intervalo; las palabras "mayor" y "después" expresan que existe una cota inferior no incluida; las palabras "menor" y "antes" indican que existe una cota superior no incluida; las expresiones "hasta" y "máximo" indican que existe una cota superior incluida y "desde" y "mínimo" indican que existe una cota inferior incluida. Es posible combinar estas palabras dependiendo del intervalo que se desea expresar verbalmente.

Un ejemplo de intervalo en esta representación es: “solo pueden ingresar los niños entre dos y cinco años” esta expresión hace referencia a que el intervalo está acotado inferiormente por el número dos no incluido y acotado superiormente por el cinco no incluido.

2. Sistema de representación numérico

El sistema de representación numérico, para el tema intervalos, está compuesto por números y por los signos de agrupación: paréntesis y corchetes. Para representar un intervalo se emplean dos números separados por una coma, los convenios existentes indican que el primer valor numérico corresponde a la cota inferior ubicada a la izquierda y el segundo a la cota superior ubicada a la derecha. Los signos de agrupación describen si esta cota se incluye o no en dicho intervalo.

Los paréntesis son usados para expresar que la cota no está incluida en el intervalo. En algunos textos, el paréntesis es sustituido por un corchete invertido. Los corchetes expresan que la cota está incluida en el intervalo. Las expresiones [-4, 5], (-4,5) o]-4,5[, [-4,5) o [-4, 5[y (-4, 5] o]-4,5], son ejemplos de intervalos en este sistema de representación.

Para los intervalos no acotados no existe una representación numérica, debido a que cuando existe una prolongación indefinida del conjunto este se nota mediante el símbolo del infinito, representación que consideramos de tipo simbólico.

3. Sistema de representación simbólico

El sistema de representación simbólico de los intervalos utiliza símbolos y números que, según las convenciones y reglas del sistema, se combinan de diferentes formas para hacer referencia a un intervalo específico. Los intervalos se pueden representar simbólicamente por: notación de conjuntos o notación de intervalos.

3.1. Notación de conjuntos

La notación de conjuntos utiliza los siguientes símbolos: (a) las llaves “{ }” para denotar al conjunto, (b) la barra “/” y los puntos “:” que se leen “tal que”, (c) el símbolo “∈”, que se lee “pertenece” e indica que un elemento hace parte de un conjunto, (d) letras minúsculas como “x” para representar elementos de un conjunto, (e) la letra mayúscula “R” que representa el conjunto de los números reales, (f) los símbolos “<” (menor que), “>” (mayor que), “≤” (menor o igual que) y “≥” (mayor o igual que) que expresan relaciones de orden, (g) letras minúsculas como “a” y “b” o números que se utilizan para designar las cotas del conjunto. Esta notación fue introducida por Thomas Harriot y según Apóstol (1984) fue formalizada por Boole y Cantor a finales del siglo XIX.

3.2. Notación de intervalos

La notación de intervalos utiliza, de la misma forma que en la representación numérica, los símbolos de paréntesis “()” y corchetes “[]” y letras minúsculas como “a” y “b” para designar las cotas inferiores y superiores. El símbolo “(∞)”, establecido por John Wallis en su obra Arithme-

tica infinitorum (1655), puede ser utilizado cuando el conjunto no está acotado superiormente y "$(-\infty)$" cuando no está acotado inferiormente.

En la tabla 1, presentamos ejemplos de intervalos en las dos representaciones simbólicas explicadas anteriormente.

Tabla 1
Ejemplos de representación simbólica de intervalos

Notación de intervalo	Notación de conjunto
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$
$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R}/a \leq x\}$
$(5, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R}/5 < x\}$

4. Sistema de representación gráfico

La recta real es una representación gráfica de los números reales, que los presenta de forma ordenada, siguiendo una serie de convenciones y reglas. Como los intervalos son subconjuntos de los números reales, también pueden ser representados en una recta.

Cada número real se simboliza en la recta numérica como un punto. El conjunto de los números reales es representado por una línea continua, mediante la cual, se puede observar que el conjunto de los números reales es denso, pues, "entre cualesquiera dos números reales diferentes a y b, no importa que tan cercanos se encuentren, existe otro número real" Purcell (2007).

El orden de los números reales en la recta numérica se establece según la posición relativa en la que se encuentran dos números. Es decir, teniendo como referencia un número, todos los que se encuentran a su izquierda son menores que él y los que están a su derecha son mayores que él. Generalmente, se utiliza el cero como punto de referencia para dividir la recta entre números positivos, a su derecha, y negativos, a su izquierda. Dado que, el plano cartesiano es un sistema de coordenadas que está conformado por dos rectas numéricas, los intervalos se pueden representar también en la recta numérica vertical (eje "y" del plano cartesiano). En este caso, el cero también sirve de punto de referencia para dividir la recta entre números positivos, arriba del cero y negativos, debajo de él.

Para el análisis del sistema de representación grafico del tema intervalos, consideramos las siguientes imágenes y los convenios para su representación. Las imágenes que se pueden utilizar a la hora de representar un intervalo son: (a) un segmento de recta para representar un intervalo acotado superior e inferiormente, (b) una semirrecta para representar un intervalo que tiene una sola cota, dependiendo del sentido de la prolongación de la recta se entiende si la cota es superior o inferior, (c) una recta para representar un intervalo que no tiene cota ni inferior ni superior y

corresponde a todo el conjunto de los números reales, (d) una circunferencia en un extremo de una semirrecta o de un segmento de recta, para representar que la cota no está incluida en el intervalo y (e) un círculo en un extremo de una semirrecta o un segmento, para representar que la cota está incluida en el intervalo. En la figura 2 presentamos las imágenes correspondientes a este sistema de representación.

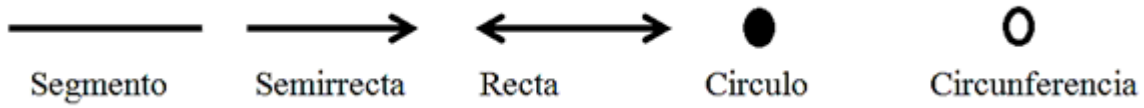

Figura 2. Imágenes del sistema de representación simbólico para el tema intervalos.

Un ejemplo de intervalo en este sistema de representación es el que presentamos en la figura 3, que corresponde a un intervalo con cota inferior en tres incluida y con cota superior en ocho no incluida.

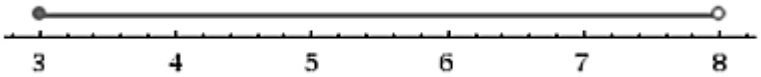

Figura 3. Ejemplo de intervalo en el sistema de representación gráfica.

5. Sistema de representación ejecutable

En el sistema de representación ejecutable, consideramos que GeoGebra es un recurso tecnológico útil en el trabajo con intervalos. A continuación, describimos las reglas para usar y operar los elementos propios del programa.

"GeoGebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo. Lo ha elaborado Markus Hohenwarter junto a un equipo internacional de desarrolladores, para la enseñanza de matemática escolar" (Markus. 2009). Este programa nos permite graficar intervalos en la recta numérica, crear animaciones de representaciones gráficas de varios intervalos en una sola recta numérica, y comparar un intervalo con otro. Además, GeoGebra presenta intervalos en diferentes representaciones: numérica, simbólica y gráfica como se muestra en la figura 4.

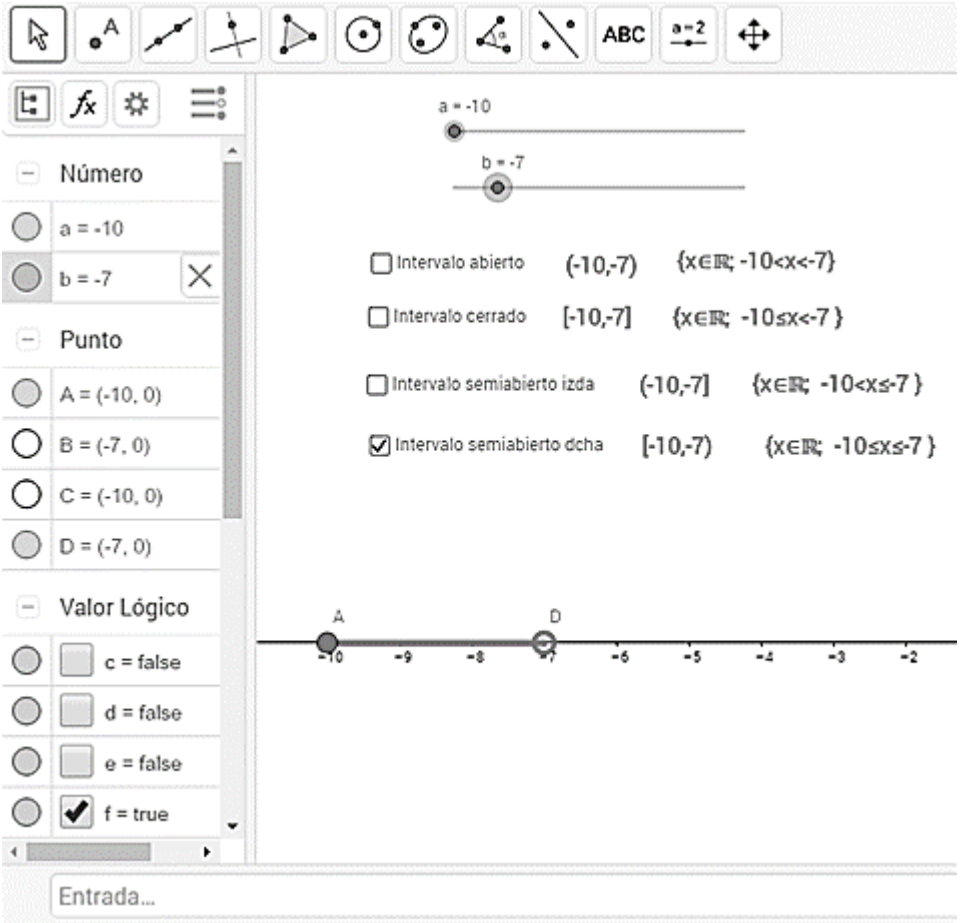

Figura 4. Representación de intervalos en GeoGebra.

Necesitamos de elementos propios del programa como lo son: deslizador, casilla de control, texto, punto, segmento, eje "x", entre otros, para poder realizar la animación presentada en la figura 4. Estos elementos permiten diferenciar esta representación de la representación gráfica por características como la interfaz y el zoom de acercamiento o de alejamiento. Además, los parámetros de cada elemento, mostrados en esta animación, nos permiten construir reglas para operarlos entre ellos, haciendo de este programa un sistema de representación ejecutable para el tema intervalos.

Este programa también nos permite realizar operaciones entre intervalos como unión e intersección como se muestra en la figura 5.

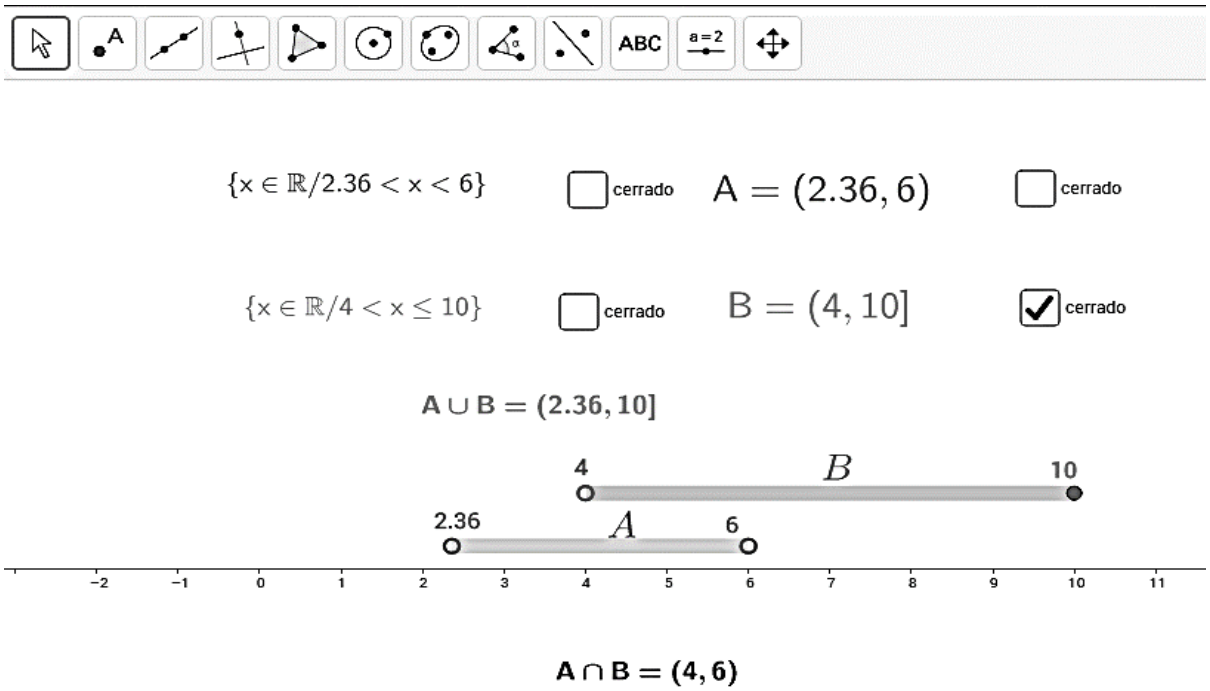

Figura 5. Operaciones entre intervalos en GeoGebra.