Elementos históricos y sicogenéticos en la construcción del continuo matemático

SEGUNDA PARTE

CONSTRUCCIÓN ONTOGENÉTICA DEL CONTINUO MATEMÁTICO. UNA EXPERIENCIA CON PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En el estudio histórico presentado en la Primera Parte, señalamos algunos obstáculos conceptuales y operatorios inherentes a la construcción del continuo matemático. En esta segunda, haremos un análisis cualitativo cuyo propósito es describir, en términos generales, algunas dificultades asociadas a la construccion psicogenética de la continuidad. Este análisis está basado en las respuestas a un cuestionario aplicado a un grupo de 14 profesores de matemáticas de enseñanza media, egresados de la Escuela Normal Superior, y que al momento de resolver el cuestionario habían aprobado ya varios cursos de una maestría en Matemática Educativa (Cálculo diferencial e integral, Álgebra, Ecuaciones diferenciales, Análisis matemático). El cuestionario, así como un concentrado de respuestas emitidas, se tienen en el apéndice; todas las preguntas son de respuesta abierta (se les pidió que no borraran).

2.1. Ideas prematemáticas sobre la continuidad

En la pregunta que inicia el cuestionario (Pregunta 1, que denotaremos como P. 1) se buscaba conocer la idea de continuidad que los profesores manejan en contextos generales y no necesariamente ligados a objetos matemáticos.

La mayoría de los profesores asocia la continuidad con ciertos procesos: los infinitos, o aquéllos que duran, permanecen sin intromisiones o se siguen de acuerdo con un orden, siendo continuos los fenómenos físicos o los objetos matemáticos en los que ocurren dichos procesos.

Mirela Rigo Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Los procesos que los profesores más frecuentemente relacionan con la continuidad, son los infinitos. De hecho, la continuidad y el infinito son conceptos indisolublemente vinculados. No sólo la acepción coloquial del término —como lo ininterrumpido, etc.— lleva implícita la idea de procesos infinitos (potencialmente), sino también distintas conceptualizaciones filosóficas, o bien diferentes definiciones matemáticas están sustentadas de una u otra forma en una idea de infinito (1).

El tipo de infinito que los profesores asocian con la continuidad es el potencial. Son generalmente los procesos potencialmente infinitos los que los profesores reconocen como continuos, y es lo que caracteriza a dichos procesos potenciales —es decir, la posibilidad de extenderse indefinidamente— lo que la mayoría identifica con la continuidad. Es por esto que para ellos resultan continuos el trazo de una línea, la vida del planeta, la historia, el universo. Este significado de continuo es incompatible con los procesos actualmente infinitos, en los que se hipotetiza "un fin", así como con los conjuntos infinitos considerados como un todo.

Algunos otros profesores asocian también la continuidad con procesos que se dan sin interrupciones, o sin alteraciones bruscas; los ejemplos propuestos, como una bala en el aire, un motor en aceleración, un río, un sonido, un rayo de luz en el espacio, son fenómenos físicos que se consideran continuos porque presuponen un movimiento "continuo", que sucede en un tiempo y un espacio que también lo son.

El uso adverbial que se da a la continuidad, calificando procesos y en relación con fenómenos que pueden prolongarse al infinito (virtualmente) o que se dan como resultado de movimientos ininterrumpidos, coincide con el del lenguaje cotidiano; se trata de nociones espontáneas (2), en tanto que *son resultado de construcciones personales*, y preceden a las formulaciones de la continuidad como adjetivo y como sustantivo (3).

Como veremos en lo que sigue, las ideas espontáneas sobre la continuidad prevalecen en las respuestas de la gran mayoría de los profesores a lo largo del cuestionario. Pero en pocos casos, son las únicas nociones empleadas. En

[1] En la primera parte hemos visto cómo la definición aristotélica de lo continuo está dada en términos de procesos potencialmente infinitos, y la de Dedekind, en la suposición de conjuntos y operaciones actualmente infinitas.

[2] El significado que damos a las "ideas espontáneas" coincide con el que le dan J. I. Pozo y M. Carretero en el artículo "Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?" En este escrito los autores describen una serie de características generales que comparten las ideas espontáneas. Dicho en forma muy resumida, consideran que *una noción espontánea es aquélla que surge de un modo natural en la mente del alumno; son resultado de construcciones personales; son científicamente incorrectas; suelen ser implícitas e incoherentes entre sí; son resistentes al cambio; constituyen redes de conceptos jerárquicamente organizados y tienen ante todo una función explicativa; sirven para predecir y controlar los acontecimientos.* Pensamos que no todas las ideas espontáneas cumplen con todos estos requisitos, —debido a que varían de contenido a contenido, e incluso a veces, de un individuo (genérico de un grupo) a otro. No obstante, nos parece que, en primera instancia, es un buen esquema general para referirse a ellas.

[3] En la historia de la matemática, también la continuidad aparece inicialmente en forma de adverbio. Este manejo de la continuidad como un adverbio se percibe, asimismo, en los trabajos de Newton y Descartes, para quienes las curvas o las magnitudes geométricas son implícitamente continuas, por ser generadas por movimientos que se realizan continuamente. La continuidad como atributo explícito y definido de objetos matemáticos, la encontramos —por ejemplo— en la obra de Euler, en la cual se define a las funciones continuas.

general, estas coexisten con otros criterios expresados en un lenguaje matemático, los que en muchos casos se aplican en función de los objetos en cuestion.

2.2. La continuidad matemática en la recta

El que la línea recta sea continua, es un hecho que se repite desde niveles medios de enseñanza y que los alumnos, en general, aceptan como evidente. Sin embargo, al menos para el grupo de profesores con los que se trabajó, las razones que aducen para explicar su continuidad son de muy diversa índole, pero sobre todo, difieren de la que más comúnmente se maneja en la enseñanza; es decir, aquella que se relaciona con la inexistencia de interrupciones o rupturas. Para ellos, la continuidad de la recta (P. 3) se da porque:

— es infinita
— tiene dirección o sentido
— es una sucesión o continuidad de puntos
— es densa
— no tiene interrupciones

Para la mitad de los profesores, la continuidad de la recta obedece a su infinitud. Y de igual forma que en la definición de continuidad, el infinito al cual aluden en este caso es un "infinito potencial en extensión", lo que operativamente se traduce en la posibilidad de continuar los segmentos de recta indefinidamente, proceso que para ellos define su continuidad.

Otros profesores explicaron que la recta es continua porque es una sucesión continua de puntos, comentario que —aunque puede pasar por circular— deja ver una identificación implícita entre la propiedad de orden con la continuidad lineal. Es cierto que la definición matemática de continuidad está basada en la operación de orden, pero —como apuntamos en la primera parte— también en otras operaciones lógicas; por ejemplo, con respecto al infinito actual.

La manera en la que algunos profesores caracterizaron la continuidad, con base en la densidad, resulta bastante aproximada a la definición "estructural" que se maneja en la matemática que se imparte en los niveles medios superiores (4). Pero sobre todo, es una definición operativa y aplicable a problemas matemáticos que se resuelven en estos niveles escolares. Probablemente por esto, los profesores (E y F) que emplearon la propiedad de densidad como criterio de continuidad, fueron congruentes con él casi a lo largo de todo el cuestionario.

Muy pocos de los profesores con los que se trabajó, asociaron la continuidad de la recta con la inexistencia de interrupciones. Esto parece muy significativo porque es lo que se considera como la expresión mas intuitiva de la continuidad, y de hecho, es la más socorrida en la enseñanza media. Es posible que no hayan caracterizado a la continuidad de la recta mediante este criterio, por ser un principio evidente e incontestable, y por esto, resulte difícil de tematizar (5);

(4) Hemos dicho que las definiciones de continuo matemático, como la dada por Dedekind, o las equivalentes a ella, son estructurales, en la medida en que la continuidad es un predicado de conjuntos estructurados, como es la recta, o los números reales. En estas definiciones "estructurales de continuidad", se caracteriza al conjunto haciendo alusión a la organización interna de sus elementos. La definición de continuidad con base en la densidad, la hemos catalogado como aproximada a la definición estructural, en tanto que en ella se consideran las interrelaciones entre los elementos de los conjuntos en cuestión.

(5) A esto hicimos referencia en la primera parte, cuando argumentamos por qué la toma de conciencia de la continuidad y su definición explícita no se dio, históricamente, en el ámbito de la geometría, a pesar de ser un concepto que se hallaba en sus cimientos.

o en palabras de Piaget: *lo primero en el orden de la lógica, es lo último en el del análisis*. Pero, además, porque quizá para ellos no tiene relevancia. Expliquemos esta afirmación con dos ejemplos.

Los niños que están aprendiendo a sumar números naturales, comprenden bien que al sumar dos de ellos, el resultado será otro número natural. Pero es probable que para ellos este hecho no sea relevante, precisamente por ser incuestionable y porque no se han enfrentado a una situación en la que no se siga ese principio, como por ejemplo, al restar dos naturales, uno mayor de uno menor. Sólo bajo esta experiencia, y desde este nuevo nivel de conocimiento, la cerradura de la suma en **N** (aunque no se use este lenguaje) puede volverse significativa. Esto no sucede sólo con esta propiedad aritmética; en la enseñanza de la matemática es frecuente que los estudiantes tengan que acceder a un "nivel superior de conocimiento" mediante la ampliación de dominios de objetos, la generalización de conceptos o de operaciones, la construcción de estructuras, etc., para dar sentido a hechos o propiedades que se refieren a "niveles de conocimiento" precedentes.

Este fenómeno que se observa en el plano psicogenético, se confirma en el terreno de la historia. A propósito de la construcción del número irracional de Dedekind, Lipschitz le replica:

> *Lo que usted arguye respecto al carácter completo del dominio, se confunde, de hecho, con la propiedad fundamental de una línea, sin la cual ningún ser humano puede representarse una línea.*

A esto Dedekind le responde:

> *Usted afirma que esta completitud o continuidad es obvia, y no necesita ser enunciada; que ningún humano puede representar una línea sin la propiedad en cuestión. ... En mi obra, jamás creí poner al descubierto un solo fenómeno nuevo... Con la ayuda del fenómeno universalmente conocido del corte, mi obra lleva a la demostración (según mis conocimientos, jamás realizada antes) de que los números irracionales pueden definirse sobre la base exclusiva de la aritmética ... [correspondencia Lipschitz-Dedekind, p. 154].*

La crítica de Lipschitz ejemplifica las dificultades que conlleva reconocer la importancia que dicho principio obvio tiene en la matemática. Sólo desde la teoría de Dedekind —como nivel de conocimiento superior— y desde la perspectiva de la fundamentación del análisis y del álgebra, la definición formal de continuidad adquiere significación y sentido, por ser punto de convergencia de dichas disciplinas y su principio de fundamentación.

Pensamos que a los estudiantes les sucede algo semejante con el criterio de la inexistencia de rupturas para caracterizar la continuidad de la recta. Es al final de la construcción del dominio completo de los reales, y en la comparación con el de los racionales, que este criterio adquiere relevancia, y que es posible superar el obstáculo generado por su evidencia, y que impide tematizarlo. La construcción rigurosa de los irracionales es un referente, o un nivel superior de conocimiento, que lo destrivializa y le da sentido.

2.3. Conceptualizaciones sobre la recta

La idea de continuidad determina, pero queda a su vez determinada, por los objetos matemáticos a los que está referida (6). Para conocer, entonces, con más precisión las ideas que los profesores manejan con respecto a la continuidad, haremos un análisis acerca de algunas de sus ideas en relación con dichos objetos, en especial sobre la recta, objeto al que más comúnmente se le califica como continuo.

Para los profesores, la recta está formada de (P•8):

- Puntos
- Puntos y segmentos
- Puntos y números
- Puntos, números y segmentos
- Números
- Segmentos muy pequeños
- Una correspondencia biunívoca

Lo primero que llama la atención de las respuestas dadas, es su diversidad. La idea de una recta "analítica" formada por puntos (y sólo por ellos), tan presupuesta y trivializada en la enseñanza, quizá no es tan común como se podría esperar.

De acuerdo con Piaget, para que los individuos sean capaces de construir dicha recta es necesaria una operación lógica de síntesis, en la que a partir de objetos sin dimensión (los puntos) se recrea uno que sí la tiene (la recta). Pero además se hace necesaria la reversibilidad de esta operación: la reducción de las líneas o superficies a puntos, operación que Piaget llama de análisis, y que operativamente puede traducirse en la subdivisión de un segmento realmente infinita. La síntesis y el análisis cierran el círculo de dos operaciones inversas que hacen posible la constitución del esquema abstracto con base en el cual se puede formular el concepto de recta analítica (7).

La idea de que la recta está formada por segmentos, encontrada en algunas de las respuestas, puede ser resultado de un razonamiento basado en percepciones, de acuerdo con el cual se considera que la parte es isomorfa respecto al todo. Esta idea surge de una incipiente operación de síntesis, la que se rige de acuerdo con las formas visibles de los objetos (8).

Por otra parte, la consideración de que los números son elementos de la recta, formulada por algunos profesores, puede ser respuesta a una enseñanza en la

[6] Por ejemplo, la recta concebida por Aristóteles (subdivisible de manera potencialmente infinita y no atómica), es consistente con su concepto de continuidad, definido como lo que es potencialmente divisible. La recta de Dedekind, en concordancia con su definición de continuidad basada en los cortes, está configurada como una estructura actualmente infinita y atómica.

[7] Estas operaciones no son necesarias en el caso de la recta sintética o euclidiana. Lo que se requiere para su construcción, son los procesos de subdivisión potencialmente infinitos y el que los segmentos estén delimitados por puntos.

[8] En la obra *The Child's Conception of Space*, Piaget afirma al respecto: En la medida en que uno no puede buscar elementos más allá de los límites de la percepción visual, el todo inicial no se puede resolver en "puntos" perceptuales, ... porque un todo continuo no puede construirse de partes que tienen características tan diferentes [p. 136].

que a la recta se le hace jugar un doble papel: como objeto geométrico y como modelo de conjuntos numéricos. La forma en la que en la enseñanza se suele definir y operar a la llamada recta numérica, y la frecuentemente mencionada "identificación entre números y puntos", puede fácilmente dar lugar a que la recta sea concebida como un dominio "anfibio" en el que conviven puntos y números, elementos que quizá por esto resultan indistinguibles e imposibles de caracterizar y operar separadamente.

La mitad de los profesores consideró en esta Pregunta 8 que la recta está formada de puntos. Pero esta información no resulta suficiente par poder concluir que tienen una concepción de recta analítica, resultado de una operación consciente de síntesis, de acuerdo con la cual es posible conceptualizar la recta como una "suma" de puntos.

Para hacernos una idea más aproximada de las nociones de recta que manejan, es necesario ver si se da la reversibilidad de esta operación de síntesis. La operación inversa consiste en "analizar" la recta, lo que matemáticamente puede resolverse mediante la subdivisión de segmentos. Para los profesores entrevistados, bisecar un segmento de manera infinita da como resultado (P. 7):

- la mitad, porque los racionales son densos
- divisiones infinitas
- el concepto de punto
- una fracción
- $1/2n$ tiende a infinito, si n tiende a infinito
- un punto
- lo que puede ser visible es un punto
- la división del punto final
- una cantidad infinitamente pequeña
- el proceso continúa.

A partir de las respuestas dadas, es posible suponer que algunos profesores tienen ideas aproximadas al concepto de recta analítica, como los profesores C y G, quienes afirman que la recta está formada de puntos y que es posible reducirla, mediante subdivisiones infinitas, a ellos. No obstante, en principio creemos poco probable que la mayoría de los profesores entrevistados o encuestados tengan una idea clara y consistente de recta, formada a partir de puntos y reducible a ellos.

Lo que comparten casi todas las respuestas dadas a la división infinita del segmento, es que ésta no se llevó hasta su "límite último", sino que de una u otra forma sólo se concibió como una operación potencialmente infinita.

El manejo operatorio de los procesos infinitos y la aceptación de conjuntos infinitos, son la base matemática de las operaciones lógicas de síntesis y de análisis; representan el punto clave en la constitución de un esquema conceptual para la continuidad matemática, y consiguientemente para la recta analítica. Si no se da la reversibilidad de estas operaciones, y si las operaciones que se realizan sobre la recta están reguladas por acciones concretas o referidas a objetos perceptuales, no se logrará tener una idea coherente y cada vez más abstracta de recta y de continuidad. Por el contrario, las nociones espontáneas permanecerán y coexistirán con otras, aun siendo contrapuestas (9), como sucede con algunos de los profesores cuyas respuestas ahora analizamos.

2.4. La continuidad en los conjuntos numéricos

Comentamos en la primera parte de este estudio, que en los niveles medios de escolaridad el concepto de continuidad se introduce en contextos geométricos, tomando a la recta como modelo de lo continuo.

La idea de que la continuidad puede comprenderse a través de la recta, basada en una tesis epistemológica de corte "empirista"; (10), supone que el continuo matemático es una noción perceptual, o que es posible acceder a él a partir de dicha noción. Desconoce que la construcción del concepto de continuidad matemática precisa de un conjunto de operaciones lógicas y matemáticas, y de conceptos formales no empíricos (de carácter extratemporal y sustentadas en hipótesis, y no en objetos concretos).

Pero además, este esquema didáctico no toma en cuenta que los alumnos llegan a la clase de matemáticas con una idea de lo que es la continuidad, y que el continuo que van a percibir en la recta corresponderá a la noción espontánea de continuidad que ellos ya tienen previamente interiorizada. Ignora que *todo conocimiento se produce siempre desde el estado en el que el sujeto se encuentra* [Piaget, 1970, p. 31], es decir, que el individuo siempre interpreta, desde sus percepciones más simples hasta los datos más complejos, a partir de esquemas específicos de asimilación, los que comprenden relaciones y estructuras lógicas; ideas, nociones y conceptos ya interiorizados, etc. (11).

La recta continua, introducida de esta forma, no será vista por los alumnos como un nuevo objeto. Porque la recta, al ser concebida conforme a sus esquemas cognitivos (los que en particular incluyen sus ideas intuitivas de continuidad), será aceptada de entrada como continua (12). Sus nociones de continuidad

(9) El hecho de que coexistan diversas nociones de continuidad, muchas de ellas espontáneas, puede hallar explicación en el marco de la caracterización de idea espontánea presentada por Pozo y Carretero [véase Nota 27]. Los autores sostienen que, por lo general, *las concepciones espontáneas dentro de un mismo dominio están relacionadas entre sí y se organizan en forma de teorías, generalmente implícitas.* [Pozo, Carretero, 1989, p. 45]. Si consideramos que una *teoría es un conjunto de afirmaciones y suposiciones, explícitas o implícitas, sobre la base de las cuales el individuo establece sus hipótesis o realiza sus inferencias* [García, "Conceptos básicos para el estudio de sistemas complejos", p. 50], y si efectivamente las nociones espontáneas conforman teorías —como sostienen Pozo y Carretero—, se admite fácilmente que dichas teorías no pueden conservar una estructura lógica impecable, y que albergan inconsistencias y contradicciones.

(10) Para un empirista clásico como Locke, *todo saber tiene su fundamento y se deriva, en última instancia, de los sentidos o de alguna cosa análoga a los sentidos, y puede ser llamada sensación.*

(11) Esta posición se sustenta en la postura epistemológica de Piaget y R. García. En "Conceptos básicos para el estudio de Sistemas complejos", García afirma al respecto: *no hay "observables puros"; es decir, todo observable, aun aquéllos que parecen provenir de la percepción directa de las propiedades elementales de los objetos, suponen una previa construcción de relaciones por parte del sujeto.* Más adelante explican: *no hay 'lectura pura' de la experiencia ... toda experiencia está 'cargada de teoría'. De allí surge que 'conocer' significa establecer relaciones en una materia prima que, sin duda, provee la experiencia, pero cuya organización depende del sujeto cognoscente. Esto excluye que el conocimiento de la realidad se genere por observaciones y por generalizaciones inductivas a partir de aquéllas* [p. 47 s].

(12) Cuando en la enseñanza hablamos de que la recta es continua, estamos añadiendo escasa (o nula) información al alumno, o dicho en términos piagetianos, no se dará un proceso de 'asimilación atributiva'; es decir, *aquella en la que un objeto nuevo es comprendido a partir de un esquema conocido* [Piaget, García, 1987, p. 154].

serán suficientes para comprender, operar, e incluso llegar a resolver problemas relacionados con este objeto matemático (13).

Es plausible suponer que las experiencias geométricas, particularmente con las líneas y las superficies, pueden coadyuvar a que sus ideas sobre continuidad se re-signifiquen. Pero pensamos que dichas experiencias geométricas no resultan suficientes.

En principio, porque la continuidad de la recta es difícil de tematizar, por evidente. Pero además, porque las escasas experiencias que suelen tener los alumnos en el campo de la geometría, no le aportan suficientes elementos para poder transformar sus ideas espontáneas sobre la continuidad, en un concepto matemático de continuo; nos atreveríamos a decir que, por el contrario, actúan como mecanismo de consolidación de dichas nociones intuitivas.

El análisis histórico nos lleva a conjeturar que, en el terreno aritmético, los alumnos podrán comprender la exigencia de matematizar la continuidad. En este terreno será posible construir los esquemas lógicos, operacionales y conceptuales necesarios en la constitución del concepto de continuo. Como hemos visto, dichos esquemas están vinculados con los instrumentos con los que se opera el infinito actual, mismos que es imposible generar como consecuencia directa de prácticas empíricas, a las que generalmente queda reducida la experiencia geométrica en el aula. Para construir dichos instrumentos de conocimiento, será necesaria una experiencia numérica suficientemente rica, tanto en aspectos operatorios como en procesos de variación y de convergencia sobre dominios numéricos. Esta experiencia constituye la base para acceder a un concepto de número cada vez más general y abstracto, el cual tendrá sentido caracterizar mediante propiedades generales y abstractas, como es la continuidad.

Suponemos, como hipótesis, que fue la carencia de esta experiencia lo que hizo que la mayoría de los profesores que contestaron el cuestionario, consideraran como continuos tanto a la serie de los números naturales, como al conjunto de los racionales.

Sobre la continuidad del conjunto de los números reales ningún profesor dudó. Lo consideraron continuo por las razones siguientes (P. 6):

- es infinito
- es una sucesión; es periódico
- es denso
- contiene a ***Q*** e ***I***
- existe corrspondencia con la recta
- no tiene cortes

La mayoría de las respuestas emitidas caen en los últimos cuatro rubros, los que están relacionados con propiedades o criterios empleados en el aula. En esta pregunta, muy pocos profesores hablaron de la infinitud del conjunto, lo

[13] Las ideas intuitivas de continuidad de la recta, que muchas veces están asociadas a la posibilidad de prolongarla o de subdividirla indefinidamente, bastan para la geometría euclidiana. En ésta, no se requiere de un principio de continuidad al estilo de Dedekind, ni tampoco de una recta analítica.

que contrasta con lo que respondieron en las preguntas relativas a la continuidad de ***N*** y ***Q***, como veremos a continuación.

En su mayoría, los profesores consideraron (P. 14) que la serie de los números naturales es continua, explicando que es infinita o que todo natural tiene un sucesor. En este caso, la idea "espontánea" de continuidad, asociada a procesos reiterativos, o prolongables *ad infinitum*, es la que prevalece.

Fueron muy pocos los que afirmaron que ***N*** no es continuo; en sus respuestas, los profesores justificaron su respuesta diciendo que en la recta dejan espacios.

En relación con el conjunto de los números racionales, casi todos lo consideraron continuo; al igual que en el caso de ***N***, muchos se refirieron a su infinitud; otros a su propiedad de densidad. Una escasa minoría consideró a ***Q*** como no continuo, afirmando que existen irracionales entre dos racionales o que en la recta dejan espacios.

De lo anterior nos interesa resaltar, por un lado, el hecho de que la mayoría de los profesores consideraron como continuos al conjunto de los números naturales así como al de los racionales, y por otro, la prevalencia de nociones espontáneas empleadas en estos conjuntos numéricos, contrastando con los criterios matemáticos utilizados para los números reales.

La diversidad de criterios empleados por los profesores en las respuestas relacionadas con la continuidad de los conjuntos numéricos, nos permite verificar que en ellos coexisten distintas formas de concebir lo continuo. No obstante, recurren más a "criterios matemáticos" en el caso de los números reales, mientras que para otros conjuntos numéricos, cuya discontinuidad no se suele mencionar en el aula, se presenta una fuerte tendencia a utilizar criterios de continuidad geométrico-intuitivos; esto puede ser consecuencia de que sus nociones espontáneas no han sido sustituidas por un concepto teórico de continuo. Pareciera que sus nociones espontáneas no sólo no han perdido vigencia, sino que tienen preeminencia por sobre otras ideas de continuidad que ya "conocen", como las que aplican en el caso de la continuidad de ***R***.

Conclusiones

El análisis histórico del concepto de continuidad, nos sugirió centrar nuestra atención en ciertos aspectos de la construcción individual del continuo:

i) El prolongado empleo de la continuidad como adjetivo y asociada a procesos que se dan en un tiempo y espacio continuos, en el plano de la historia, tiene su contraparte en la construcción individual, en la que las nociones espontáneas de continuidad, ligadas a los procesos potencialmente infinitos o iterativos, tienen preeminencia y son "resistentes al cambio".

ii) La aparición de la definición explícita de la continuidad en el contexto de lo que en el siglo XIX se denominaba Análisis Matemático, nos llevó a pensar en las dificultades que para el estudiante conlleva el tematizar, en el marco de la geometría, la propiedad de continuidad, por ser evidente en las magnitudes geométricas.

iii) La construcción del sistema de los números reales y la recta analítica, como objetos teóricos y resultado de una construcción formal, nos hizo reflexionar sobre el estatus que dichos objetos tienen en el estudiante, y sobre el tipo de operaciones en las que están sustentadas.

A su vez, el análisis de los problemas que los alumnos tienen para adquirir el concepto de continuidad matemática, retroalimentó nuestro estudio histórico. Como resultado de esta interacción pudimos establecer algunas conjeturas en torno a las estrategias didácticas que se suelen emplear para introducir y manejar el concepto de continuidad en el aula.

Creemos que dichas estrategias didácticas no sólo han resultado insuficientes, sino inadecuadas, e incluso obstaculizadoras. En principio, porque la enseñanza suele ignorar las nociones espontáneas que los alumnos tienen con respecto a la continuidad. Enseguida, porque en general no los provee de los instrumentos cognoscitivos necesarios para romper dichas nociones intuitivas y construir el concepto matemático. Y finalmente, porque la instrucción, por el contrario, puede más bien actuar indirectamente como un apoyo a las nociones intuitivas, al bloquear, entre otras cosas, las experiencias con el infinito actual.

Con los resultados aquí reportados intentamos explicitar algunos de los problemas relacionados con la enseñanza y con el proceso de construcción del concepto de continuidad. Pero en última instancia, lo que nos parece más importante, es destacar que estos resultados nos plantean una serie de preguntas que marcarán el rumbo de nuestras futuras indagaciones.

Cuando los profesores que contestaron el cuestionario admiten que tanto los conjuntos, como los números aislados (por ejemplo, π) son continuos (en la P. 17 sólo 5 respondieron que no lo era); cuando emplean distintos criterios de continuidad y los aplican en función de los objetos; cuando aceptan que tanto $\boldsymbol{N}$ como $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ son continuos, y que la recta también lo es, cabe preguntarse: ¿qué es lo que en realidad "miran" en la recta cuando la consideran continua?; ¿qué tantos elementos les ha dado la instrucción para poder diferenciar las características estructurales de los distintos dominios numéricos? Para dar respuesta a estas preguntas es necesario contestar a otra más general: ¿cuáles son, a nivel psicogenético, las operaciones lógicas y los esquemas conceptuales necesarios para la constitución de un concepto de continuo, y bajo qué mecanismos es posible generarlos?

Algunas de las ideas contenidas en este escrito fueron resultado de sucesivos intercambios de opiniones con Guillermina Waldegg, Carlos Álvarez y Jesús Alarcón. Les estoy agradecida.

Respuesta a los cuestionarios.

	P. 1.	P. 3.
A:	Procesos periódicos	sucesión de puntos
B:	Procesos infinitos	sucesión de puntos
C:	Procesos periódicos	sucesión de puntos
D:	Procesos infinitos	es infinita
E:	Densidad	densidad
F:	Densidad	densidad
G:	Procesos periódicos	procesos periódicos
H:	Procesos infinitos	es infinita
I:	Procesos infinitos	es infinita
J:	Procesos periódicos	inexistencia rupturas
K:	Procesos periódicos	sucesión de puntos
L:	Procesos infinitos	es infinita
M:	Procesos infinitos	es infinita
N:	Sucesión de puntos	es infinita

	P. 8	P. 7
A:	correspondencia biunívoca	la mitad
B:	puntos	divisiones infinitas
C:	puntos	el concepto de punto
D:	puntos	una fracción
E:	números	no contesta
F:	puntos	1/2 *n* tiende a infinito
G:	puntos	un punto
H:	segmentos pequeños	lo que se ve es un punto
I:	puntos	no hay final
J:	puntos y números	un punto
K:	puntos	división del punto final
L:	puntos y segmentos	una cantidad infinitesimal
M:	puntos y segmentos	no hay final
N:	puntos, números y segmentos	el proceso continúa

	P. 16	P. 14	P. 15
A:	es periódico	sí, todo natural tiene sucesor	sí
B:	es periódico	sí, es infinito	sí, es infinito
C:	contiene Q e I	no, no es denso	existen irracionales entre dos racionales
D:	es infinito	sí, es infinito	

	P. 16	P. 14	P. 15
E:	correspondencia con la recta	no, no es denso	no contesta
F:	es denso	no, no es denso	sí, es denso
G:	periódico	sí, todo natural tiene sucesor	si, es denso
H:	contiene Q e I	sí, es continuidad de puntos	sí, es infinito
I:	es denso	sí, es infinito	sí, es infinito
J:	correspondencia con la recta	no, en la recta dejan espacios	no, en la recta dejan espacios
K:	contiene Q e I	sí, es infinito	existen irracionales entre dos racionales
L:	es infinito	sí, es infinito	no contesta
M:	correspondencia con recta	sí, es infinito	sí, es infinito
N:	es periódico	sí, es infinito	sí, es infinito

CUESTIONARIO

Responda, lo más explícitamente posible, a las siguientes preguntas:

1. Diga qué entiende por continuidad (NOTA: no preguntamos la definición de función continua).
2. Dé algunos ejemplos de objetos continuos.
3. ¿El punto tiene dimensión? Explique su respuesta.
4. ¿La línea tiene dimensión? Explique.
5. ¿Es posible que objetos sin dimensión formen un objeto con alguna dimensión? Explique su respuesta.
6. Dado un segmento de una unidad de longitud, ¿es posible encontrar un punto que coresponda a $1/10$ del segmento? Y uno que corresponda a $2/10^2$ del segmento? ¿Es posible, para toda n, encontrar un punto que corresponda a la $n/10^n$ del segmento? Argumente su respuesta.
7. Si un segmento lo dividimos por la mitad, y si lo que resta lo volvemos a dividir por la mitad, y si este proceso lo reiteramos hasta el **infinito**, ¿qué queda al final de dicho proceso? Argumente su respuesta.

8. ¿De qué está formada la recta matemática?
   a) de números
   b) de puntos
   c) de segmentos.

9. Supongamos que dos líneas contenidas en un mismo plano se cruzan. ¿Es correcto afirmar que siempre existe su punto de intersección? Explique por qué.

10. ¿Un punto es continuo? Explique.

11. El siguiente conjunto de puntos es continuo: .... Justifique su respuesta.

12. ¿Es posible formar continuidad con puntos? Si su respuesta es afirmativa, proponga un ejemplo.

13. ¿Por qué se dice que la recta matemática es continua?

14. ¿El conjunto de números naturales es continuo? ¿Por qué?

15. ¿El conjunto de números racionales es continuo? ¿Por qué?

16. ¿El conjunto de números reales es continuo? ¿Por qué?

17. ¿El número π es continuo?

18. ¿Es posible ubicar a todos los números reales en la recta? ¿Por qué?

19. El conjunto de números reales y la recta tienen alguna característica en común? Explicite su respuesta.

Referencias bibliográficas

Aristóteles. *Physics*, Great Books of the Western World, tomo 8, Vol I (22a. ed.). Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978.

----- *On Generation and Corruption*, Great Books of the Western World, tomo 8, Vol I (22a. ed.). Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1978.

Battro, A. M. (1968) *Diccionario de Epistemología Genética (Dictionaire D'épistémologie génétique)*. Versión al español: Floreal Mazía, Buenos Aires: Editorial Proteo, 1971.

Bolzano, B. (1817), "A translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem", *Historia Mathematica*, 7 (1980), 156-185.

Boyer, C. (1956) *History of Analytic Geometry*. New York.

Cauchy, A. L. (1821) *Cours D'Analyse de L'Ecole Royale Polytechnique. Analyse Algébrique*, Francia: Editions Jacques Gabay, 1989.

Cohen, B. I. (1980) *La Revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas (The Newtonian Revolution)*. Versión española de Carlos Solís Santos, Madrid: Alianza Editorial, S. A., 1983.

Dahan D. A. (1989) "La notion de pression: de la métaphysique aux diverses mathématisations", *Revue d'histoire des sciences*, XLLII/1-2, 79-108.

Dedekind, R. (1876) "Extractos de la correspondencia de Dedekind a Lipschitz", *Sobre la historia de las Ciencias, (Sur l'histoire des sciences)*, Fichant, M. y Pécheux, M., Versión española de D. Karsz Esquibel, 149-157 (3a. ed.) México: Siglo XXI Editores, 1978.

----- (1872) "Continuity and irrational numbers", *Essays on the Theory of Numbers (Braunschweig)*. Traducción autorizada por W. Beman, republicación de la versión de 1901, New York: Dover, 1963.

Descartes, R. (1637) *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications Inc. 1954.

Euclides, *The Thirteen Books of The Elements*. Traducido del texto de Heigberg, con Introducción y Comentarios por T. L. Heath (2a. ed.) New York: Dover, 1956.

García, R. (1986) "Conceptos básicos para el estudio de sistemas complejos" en *Los problemas del conocimiento y la perspectiva ambiental del desarrollo*. Coordinado por Enrique Leff. México: SIGLO XXI Editores.

Granés, J. S. (1988) *Newton y el Empirismo*, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Hilbert, D. (1899) *Fundamentos de la Geometría (Grundlagen der Geometrie)*, fotocopia de la biblioteca de la Secc. Mat. Educativa, C.I.E.A. México. (No se consigna ni traductor, ni fecha de la traducción).

Foundations of Geometry, traducida al inglés por L. Unger; edición revisada y corregida por P. Bernays, U.S.A.: The Opern Court Publishing Co., 1971. (No se consigna fecha del original).

Jones, Ch. V. (1978) *On the Concept of One as a Number*. Tesis de doctorado en filosofía, Universidad de Toronto, Canadá.

Koyré, A. (1961) "Remarques sur les paradoxes de Zenon". *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*. Francia: Gallimard, 1971.

Lagrange, L. (1786) *Théorie des Fonctions Analytiques*.

Moreno, L., Waldegg, G. (1991) "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity". *Educational Studies in Mathematics*. No. 22. pp. 211-231.

Newton, I., *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*. Traducción y notas de Florian Cajori. Berkely: University of California Press. 1964.

Piaget, J. (1956) *The Child Conception of Space* (4a. ed.) Londres: Routledge & Kegen Paul, 1971.

----- (1970) **La Epistemología Genética, (L'épistemologie génétique).** Edición, traducción y prólogo de Juan Delval, Madrid: Editorial Debate, 1986.

Piaget, J., García, R. (1987) *Hacia una lógica de significaciones (Vers une logique des significations)*. Traducción de Emilia Ferreiro. México: Editorial Gedisa Mexicana, 1989.

Pozo, J. I., Carretero, M. (1987) "Del Pensamiento Formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje*, 38, 35-50.

Rigo L. M. (1989) *Del continuo euclidiano al continuo de Dedekind: ¿filiación o ruptura?* Tesis para obtener el grado de maestría en ciencias, especiaidad matemática educativa. Sección Matemética Educativa, C.I.E.A., México.

----- (1982) "Geometría Analítica... ¿Sueño cartesiano?" *Mathesis*. En proceso de publicación.

Robinet, 1986, "Les Réels: Quels modèles en ont les élèves?, *Educational Studies in Mathematics*, 17, pp. 359-386.

Weyl, H. "Número y Continuo El infinito". Traducción al español por Carlos Imaz, *Mathesis*, Vol. 1, No. 3 (1985) 339-378, México: Facultad de Ciencias, UNAM (sin fecha del original).