La intuición y el concepto de límite

RESUMEN:

La enseñanza del concepto de límite funcional en la Escuela Media se aborda desde la perspectiva de la Epistemología Genética de Piaget y del rol de la Matemática en el ciclo Medio.

La metodología de enseñanza propuesta está centrada en procesos de iteración que permiten la gestación intuitiva del concepto. La progresiva dificultad en las guías de trabajo utilizadas conduce a la formalización del concepto.

Esta metodología se confrontó experimentalmente con la enseñanza tradicional, obteniéndose diferencias significativas.

Alicia Estela Collel

Centro de Investigación en
Antropología Filosófica y Cultural,
Argentina

Son conocidas las dificultades que tienen los alumnos que ingresan en la Educación Universitaria ante los primeros conceptos del Análisis. A ellas se refirieron varias ponencias del Congreso de la Unión Matemática Argentina en el año de 1991. Sin embargo, el problema no radica sólo en nuestro país. En el orden mundial, el IREM de Francia realizó un trabajo acerca de los conceptos del Análisis, en alumnos de lo que equivale para nosotros el primer año de universidad. En dicho estudio Boschet y Robert[1] observan errores de simplificación abusiva en la consideración de la continuidad de cualquier función, o la supresión de cuantificadores. También advierten confusión en los conceptos de variable y función.

El concepto de límite, base de cualquier otro concepto del Cálculo Diferencial e Integral, se presenta ante los sujetos como una barrera infranqueable.

Si analizamos la enseñanza de los primeros conceptos del Análisis en la Educación Media, podemos observar que constituye, para las personas que la reciben, algo así como un "jeroglífico" que deben descifrar, sin comprender su verdadero significado. Y es que el concepto de límite funcional, fundamento de todo el Cálculo Diferencial e Integral constituye un salto de lo real hacia lo potencial, en un proceso —así mismo— potencial e infinito, inalcanzable para los alumnos en la Educación Media cuando se le presenta en un contexto puramente lógico, y por lo tanto, abstracto.

Las dificultades que observábamos tanto en la Educación Media como en la Universidad, nos llevaron a preguntarnos acerca de una metodología de enseñanza que ayudase a la comprensión del concepto de límite. Quisimos fundamentar la misma sobre dos pilares:

• Por un lado, los niveles de desarrollo del pensamiento establecidos en la epistemología genética de Jean Piaget, y los aportes recibidos de ese ámbito sobre los **esquemas**[2] de operación que faciliten la 'construcción' de un nuevo esquema operatorio que permita la comprensión del concepto límite.

• Por el otro, la función de la matemática de la Educación Media[3] y la necesidad de proporcionar a nuestros alumnos procesos de pensamiento que se consoliden en estructuras que posteriormente puedan aplicar en situaciones no estereotipadas. Para ello revalorizamos la intuición como el eslabón *indispensable* para el "tránsito" de lo real a lo posible, sin desvalorizar así el camino analítico, dado que —como afirma Brookes—, ambos caminos no son contradictorios sino complementarios.[4]

[1] Boschet - Robert. *Adquisition des Premiers concepts d'analyser sur R dans une section ordinaire de premiere année de DEUG.* Cahier de Didactique des Mathematiques, No. 7. IREM, Université de Paris VII.

[2] En el ámbito de la teoría constructivista, la acción del sujeto sobre los objetos permite —además de la percepción del objeto en sí— percepciones sucesivas que surgen de las distintas acciones realizadas sobre el objeto, las cuales permiten establecer diferencias o semejanzas entre las relaciones sucesivamente percibidas, que da lugar a los esquemas perceptivos. Gracias a éstos, frente a hechos semejantes, el sujeto establece relaciones que conducen al reconocimiento del objeto aunque éste no provenga de la percepción inmediata. Cuando las acciones se coordinan entre sí dando lugar a operaciones reversibles, podemos afirmar que se ha gestado un **esquema operatorio.**

[3] Consideramos que en la Educación Media el papel de la Matemática es esencialmente formativo, entendiendo por tal la gestación de procesos de pensamiento que el alumno pueda utilizar en distintas situaciones.

[4] Citado por Athem Kumle en *Reflexive and intuitive intelligence in learning mathematics*, 1977, pág. 310.

¿Qué entendemos por intuición?

En términos generales, se entiende por intuición todo conocimiento **inmediato**, es decir, un conocimiento en el cual se da el contacto entre objeto y sujeto sin intermediación de un proceso de elaboración.

En general, los matemáticos consideramos como conocimiento intuitivo a aquél que se basa en la percepción. Tal fue el caso de los conocimientos del Análisis Infinitesimal surgidos antes del siglo XVIII, cuyo fundamento era la realidad concreta; por ejemplo, el concepto de límite establecido por Newton al buscar una definición de velocidad instantánea. No es un camino deductivo el que llevó a las conclusiones aportadas por Newton a este respecto, sino una "chispa" que le permitió *intuir* que es indefinido el proceso de aproximación entre dos velocidades suficientemente próximas.

Otro ejemplo importante para explicar el sentido que el matemático da a la palabra intuición es la resolución de un problema geométrico. Ésta tiene, muchas veces, como origen, una intuición fundada en una imagen visual.

Ahora bien, para que la imagen visual adquiera un significado concreto, es importante señalar los movimientos virtuales que acompañan a las representaciones de objetos y que tienen un papel fundamental en la intuición matemática. Tanto en el momento previo cuanto en el posterior al concepto. Por medio de estos movimientos virtuales —que también podríamos llamar imágenes dinámicas— percibimos la superficie de los cuerpos "recorriéndola" en la imaginación, y los localizamos en el espacio. Dichos movimientos virtuales permiten captar los contornos de los cuerpos, su extensión, su posición y su figura.

Según Klages[5] "la imagen de movimiento hace posible una intuición del espacio; con ella una intuición de la figura; y con ella, después, una intuición del mundo externo en general. Sobre esta base se da el paso hacia el espacio matemático y a la vez es en ese 'espacio dinámico de la imaginación' que se objetivan los conceptos geométricos en el momento de su 'retorno" sobre lo real". Por ello podremos —por ejemplo— reconocer la figura 'triángulo' cuando observamos algo material que posee tal configuración.

Hemos señalado la importancia de las imágenes visuales para el conocimiento intuitivo. El trabajo sobre ésas permitirá la gestación de los esquemas perceptivos, que permitirán reconocer un objeto aun cuando no esté presente materialmente. Esos esquemas serán animados con las imágenes mentales que el alumno haya formado a través de la experiencia diaria en interacción con los conceptos anteriores —de orden estrictamente matemático o no—; con problemas o expresiones utilizadas en clase y también con la experiencia operatoria que vaya desarrollando.

Una teoría interesante al respecto es la distinción entre el concepto imagen y concepto definición introducida por Tall y Vinner (1981)[6], quienes llaman

[5] Klages, L. *Pref. all'Op. di Palagyi*, XXI. Citado por Cornelio Fabro en "Percepción y Pensamiento", Edic. Universidad de Navarra, Pamplona, 1978, pág. 144.

[6] Tall - Vinner "*Concept image et conceot definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, 1981, págs. 151-169.

concepto imagen a la estructura total asociada al concepto. Por ejemplo, antes de que explicásemos en clase el concepto de continuidad de una función, al interrogar a nuestros alumnos obtendríamos respuestas del tipo "que no tiene cortes" o "carece de saltos". Este tipo de respuestas se obtiene gracias al concepto imagen que el alumno posee sobre continuidad, concepto fundado —muy probablemente— en el significado que la palabra tiene en el uso cotidiano. De aquí la importancia de los temas anteriores "preparatorios" para el Cálculo Diferencial e Integral, como son los conceptos de números periódicos, densidad en el conjunto de números reales, intervalos abierto y cerrado, entorno de un punto, etc.

En este trabajo consideraremos la intuición como la aprehensión inmediata de la realidad. Esto, desde dos puntos de vista: porque hay una realidad fenoménica que permite esa captación o porque otros conocimientos, (fundamentalmente geométricos) que el alumno posee, permiten esa captación inmediata.

Razones para una propuesta metodológica

A través de la Historia de las Ciencias, puede observarse que el progreso de la Matemática a partir del surgimiento del Cálculo Diferencial e Integral, y su fundamentación gracias al aporte de la teoría de conjuntos y la Lógica Matemática a fines del siglo XIX, alejó a la Matemática de la realidad desde la cual había partido.

Esta ruptura de la Matemática con los fenómenos de orden físico, biológico o social, se transfirió al campo de la enseñanza y, aunque en la Educación Primaria hay una revalorización del enlace de la Matemática con la realidad en la que está inserto el sujeto (problemas de carácter matematizable), no ocurre así en la enseñanza del Nivel Medio. Apoyados quizá en un falso concepto de "mejor preparación científica" exigimos, muchas veces, una abstracción que el alumno no puede alcanzar.

¿Nos olvidamos quizá de la realidad, que motiva al ser humano a plantear problemas, establecer relaciones y descubrir las propiedades características de los objetos?

Afirma Piaget (1961) que aun cuando el papel de la intuición en Matemática cambió radicalmente, cabe preguntarse si la eliminación de los elementos intuitivos tanto en la enseñanza como en el quehacer matemático, no constituirá —a largo plazo— un peligro para el desarrollo de la Matemática, dado que la intuición ha resultado ser fuente de direcciones frecuentemente fructíferas.

Metodología [7]

Con base en la importancia que tiene la intuición en Matemática y frente a la necesidad de que los alumnos gesten —en los años de la educación básica— el concepto imagen apropiado para la adquisición del esquema que permita la 'construcción' del concepto de límite, elaboramos una metodología en la que

[7] Esta propuesta metodológica y su evaluación forman parte de un trabajo realizado en uso de una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

se complementa la actividad del alumno sobre iteraciones indefinidas, y los elementos matemáticos con los que el docente conduce el aprendizaje. La misma busca conducir al alumno a un proceso de infinito potencial que le ayuda a descubrir el concepto de límite.

Los conceptos de densidad del conjunto de números reales y de función son considerados fundamentales para la comprensión del concepto de límite.[8] Por ello, sugerimos que este tema sea precedido de una clara teoría de funciones en la cual ésta se defina mediante tablas, por medio de una ecuación o una función definida por partes. Si bien estas tres, son formas diferentes de definir una función y cumplen objetivos didácticos distintos, el alumno debe manejar indistintamente cualquiera de ellas para no encontrar trabas al buscar el límite de una función continua.

El problema del "conejo y la zanahoria", derivado de la famosa paradoja de la dicotomía de Zenón, que afirma que "no es posible ir de un lugar *A* a uno *B* porque antes de recorrer esa distancia hay que recorrer su mitad, antes de recorrer ésta hay que recorrer su mitad, antes de recorrer ésta hay que recorrer su respectiva mitad, y así sucesivamente", nos sirvió para *introducir* el tema. Podemos redactar el problema señalado del siguiente modo:

> "Un conejo recorre la mitad de la distancia que lo separa de una zanahoria. Luego recorre nuevamente la mitad de la distancia que lo separa de la zanahoria. Si los saltos del conejo recorren siempre la mitad de la distancia que queda, alcanzará el conejo la zanahoria?"[9]

Después de introducir el tema, utilizamos guías de trabajo cuyo objetivo fue que el alumno se introdujera en procesos de iteración indefinida que lo conduzcan a un punto final potencial.

Las guías de trabajo utilizadas se consignan en el Apéndice. A modo de ejemplo citamos el siguiente problema:

> "Dibuja un cuadrado con 6 cm de lado.
> — Une los puntos medios de los lados del cuadrado que dibujaste.
> — Une los puntos medios del segundo cuadro que quedó dibujado.
> — Continúa el proceso hasta obtener el menor cuadrado cuyo lado se determine con los puntos medios de los lados del cuadrado anterior.
> ¿Hasta cuándo puedes continuar el proceso? ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado más pequeño que podrías obtener?"

Este tipo de problemas buscó una captación intuitiva que favoreció la comprensión del concepto de límite como aquél valor al cual nos aproximamos cada vez más sin llegar nunca a él. Por medio de actividades concretas de partición

---

[8] Es necesario destacar que 'fundamentales' no significa que sean 'los únicos necesarios'.

[9] Es interesante destacar que los alumnos utilizan el concepto de infinito **indiscriminadamente** en lugar de analizar el contexto del problema.

Al respecto Cf. Tirosh - Stavy, *Student's ability to confine their application of knowledge: the case of Mathematics and Science*, **Science and Mathematics**, 92, 7, 1992.

indefinida, logramos que los sujetos abstrayesen lo real e hipotetizasen acerca de "lo posible", sobre el final del proceso de infinito potencial planteado.[10]

La dificultad en las guías de trabajo fue progresiva, y se buscó alcanzar un ámbito rigurosamente matemático. Ejemplo de ello es el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una parábola en un punto dado o el análisis para determinar los puntos de corte con el eje real de una función polinómica de tercer grado.

Cuando advertimos que los alumnos habían gestado el esquema de la iteración indefinida, nos introdujimos en el campo que nos interesaba: el cálculo de límite de funciones continuas. Para ello fue necesario superar el obstáculo del simbolismo matemático. Las guías No. 6 y No. 7 (véase Apéndice) tuvieron este objetivo.

Definimos posteriormente función continua a partir de las imágenes mentales que el alumno tuviese. Quedó entonces definida intuitivamente la función continua como "aquella función sin saltos ni cortes".

En todo momento, el apoyo gráfico fue un valioso instrumento para la captación intuitiva.

Las conocidas tablas de valores de la función, nos permitieron advertir qué pasaba con los valores de la función en las proximidades de un determinado punto. Gracias al dinamismo que habíamos obtenido con los procesos de iteración indefinida, pudimos acceder al concepto de límites laterales.

Esta metodología fue utilizada en un grupo de 34 alumnas de un quinto año de bachillerato modalizado en Ciencias y Letras de Capital Federal, y los resultados del aprendizaje se compararon con los resultado obtenidos por un grupo de 36 alumnas de quinto año de otro colegio de Capital, que recibieron la enseñanza tradicional.

Tratamiento estadístico de las muestras

El método estadístico utilizado estuvo destinado a establecer las diferencias entre las muestras evaluadas, al aplicárseles metodologías distintas.

Para que la diferencia reflejase la efectividad de la metodología utilizada, las muestras fueron relacionadas de modo que cada sujeto fuera su propio control. Para ello, se utilizó la técnica de *pre-test* y *post-test* en cada muestra.

¿Qué método estadístico debe utilizarse en estas circunstancias?

"La prueba de McNemar para la significación de los cambios es particularmente apropiada para los diseños de 'antes' y 'después' en los que cada persona es su propio control".[11]

[10] Es necesario destacar que concebimos el concepto de límite como un punto **potencial** y no real, de allí la necesidad de que el alumno pueda concebir "lo posible", es decir, imaginar qué sucedería si el proceso se siguiese indefinidamente.

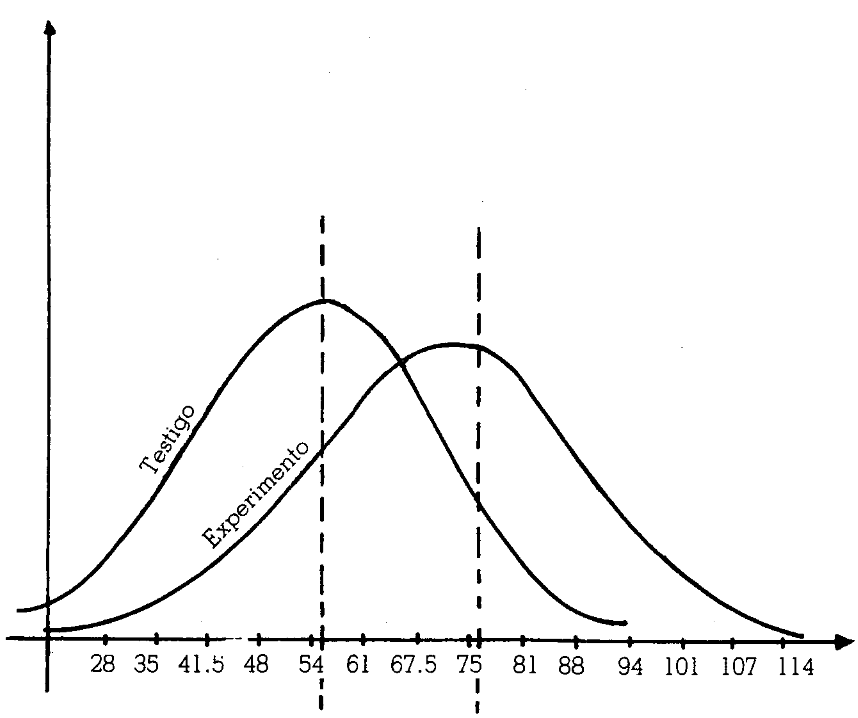
[11] Siegel, Disney, *Estadística no paramétrica*. Biblioteca Técnica de Psicología, Edit. Trillas, México, 1983, pág. 86.

Para probar la significación de los cambios por este método, se elaboraron dos tablas de doble entrada con las frecuencias obtenidas en el pre-test y en el post-test de los grupos testigo y experimental. La prueba de McNemar para la significación de los cambios determinó que en el grupo experimental la probabilidad de que los sujetos cambiasen de mal a bien, fue mayor que la probabilidad de que los sujetos cambiasen de bien a mal, mientras que en el grupo testigo, los cambios evidenciados con posterioridad a la metodología, no fueron significativos.

La diferencia en las adquisiciones de ambos grupos fue notoria: el 88.89% del grupo testigo resuelve favorablemente el algoritmo, pero sólo da muestras de conocer el concepto el 38.89%. En el grupo experimental en cambio, el 89.44% resuelve favorablemente el algoritmo y el 72.22% logra el aprendizaje del concepto.

La normalización de las curvas de Gauss correspondientes a cada muestra, determinó que el 65% de las observaciones en el grupo experimental estuvieron ubicadas entre 58.95 puntos y 93.99 puntos, con una medida de 76.47. En el grupo testigo, en cambio, el 65% estuvo ubicado entre 40.94 puntos y 80.22 puntos, con una medida de 55.58. Lo anterior muestra con claridad la mejor adquisición del concepto por parte del grupo experimental.

Esta experiencia constituye un llamado de atención al docente de la Educación Media que muchas veces "instaura fórmulas que resuelven situaciones" en vez de lograr el aprendizaje estable de los conceptos que transmite. Es necesario que tomemos conciencia de las dificultades de nuestros alumnos en el campo científico y les abramos el camino para el mismo, ayudándolos a gestar los nuevos conceptos a partir de la experiencia, la realidad observable y la intuición geométrica, rica en imágenes mentales y elementos teóricos ya adquiridos.



APÉNDICE

Guía de trabajos Prácticos No. 1

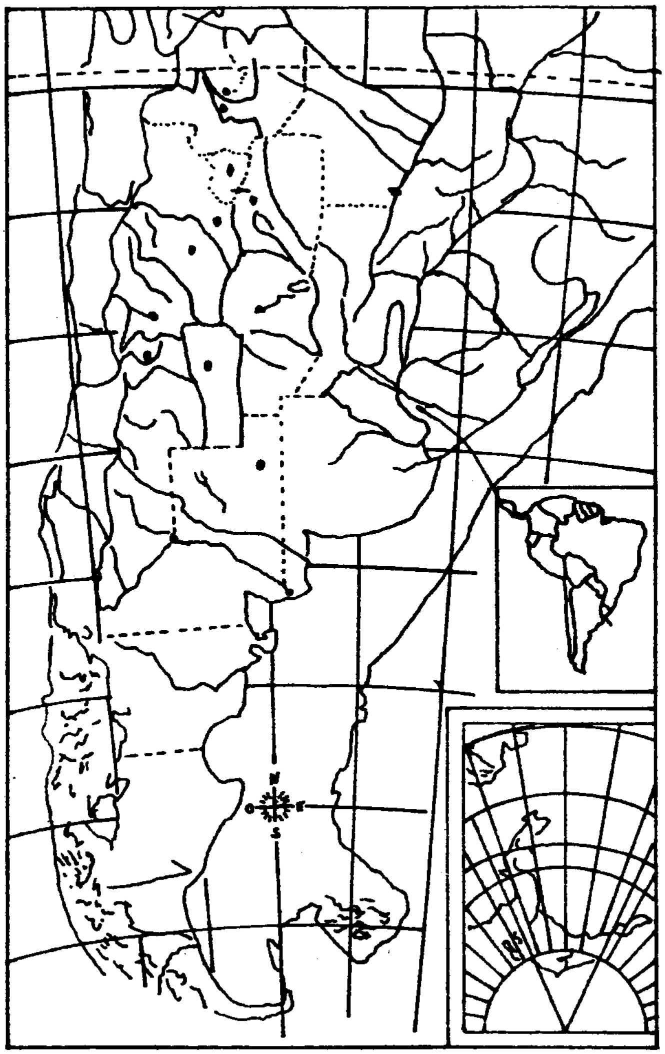
1. Pinta el borde de los mapas que figuran en esta hoja.

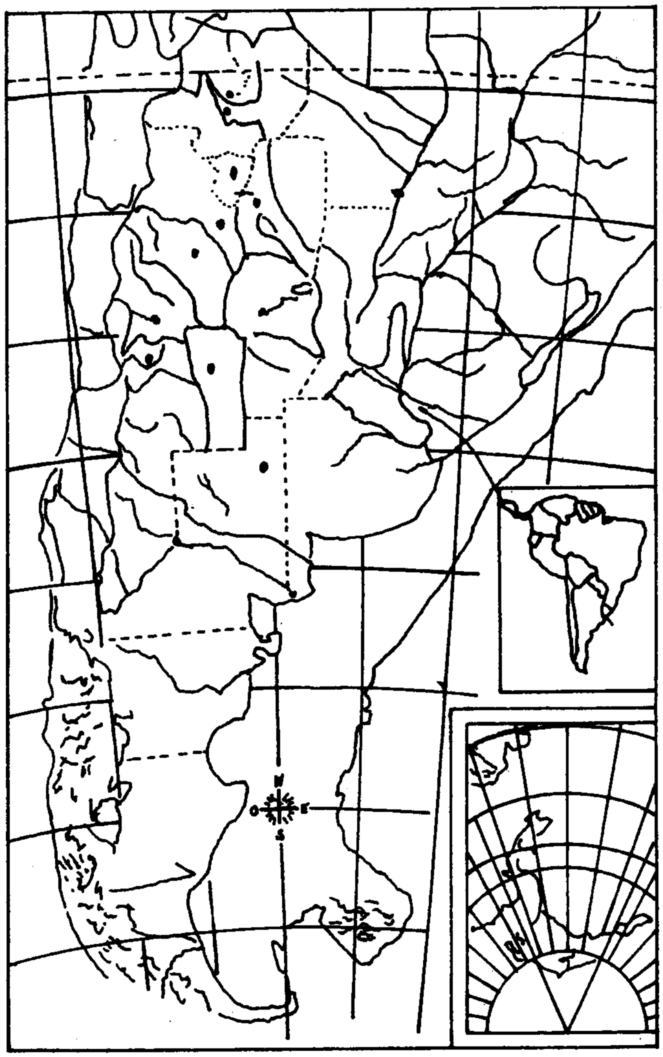
2. Con segmentos de 1,5 cm, busca contornear uno de los mapas del mejor modo posible sin "entrar" en la superficie del mismo.

3. Con segmentos de 5,0 cm busca contornear el otro mapa, del mejor modo posible, sin "entrar" en la superficie del mismo.

4. ¿Qué observas en el trabajo realizado?

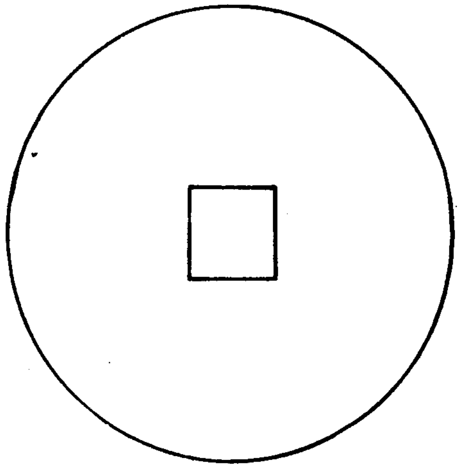
5. De qué modo puedes lograr, con segmentos, un contorno más apropiado al borde





Guía de Trabajos Prácticos No. 2

1. Observa el siguiente dibujo



2. Dibuja circunferencias que "encierren" del mejor modo posible el cuadrado, sin tocar ninguno de sus puntos.

3. Determina la medida del diámetro de la circunferencia que mejor cumple esta condición.

....

Guía de Trabajos Prácticos No. 3

1. Dibuja un círculo de 6 cm de diámetro.

2. Dibuja, sobre él, cuadros de 2 cm de lado hasta cubrirlo lo mejor posible. (Los cuadrados no deben superar la superficie cubierta por el círculo)

3. Dibuja un círculo de 6 cm de diámetro.

4. Dibuja, sobre él, cuadrados de 1,5 cm de lado hasta cubrirlo lo mejor posible.

5. Dibuja un círculo de 6 cm de diámetro.

6. Dibuja, sobre él, cuadrados de 1 cm de lado hasta cubrirlo lo mejor posible.

7. Dibuja un círculo de 6 cm de diámetro.

8. Dibuja, sobre él, cuadrados de 0,5 cm de lado hasta cubrirlo lo mejor posible.

9. Calcula el área cubierta por los cuadrados en cada uno de los puntos anteriores.

10. Escribe tus resultados en la siguiente tabla:

Lado	Superficie
2	
1,5	
1	
0,5	

11. Calcula la superficie del círculo.

12. Qué observas?

13. ¿En algún momento la superficie cubierta por cuadrados será igual a la superficie del círculo?

....

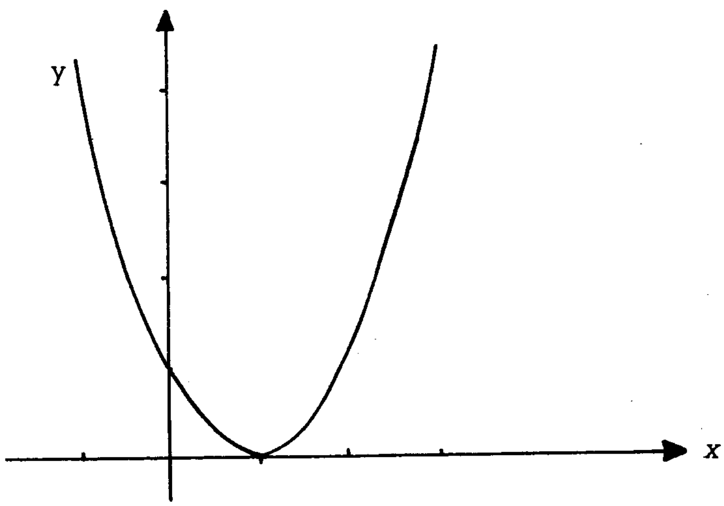
Guía de Trabajos Prácticos No. 4

1. Consideremos la función $f\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (x - 1)^2$$

representada en el siguiente dibujo:

2. Considera el punto P (2, 1)



3. Queremos encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto P. Para esto necesitamos conocer la pendiente de la recta tangente en el punto P. Buscaremos la pendiente determinando rectas formadas por el punto P y puntos de la parábola próximos a él. Elijamos los puntos P_1, P_2 y P_3 cercanos al punto P, utilizando el gráfico. (Considera los tres puntos "por arriba" del punto P).

4. Determina las coordenadas de los puntos elegidos.

5. Escribe las ecuaciones de las rectas $\overleftrightarrow{PP_1}$, $\overleftrightarrow{PP_2}$, $\overleftrightarrow{PP_3}$.

6. Observa las pendientes de las rectas obtenidas.

7. Las pendientes forman una sucesión que se aproxima a un valor. ¿Cuál es ese valor?

8. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P?

9. Encuentra la ecuación de la recta tangente.

Guía de Trabajos Prácticos No. 5

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^3 - 22x^2 + 47x - 28$$

corta el eje real en tres puntos distintos.

1. Realiza una tabla de valores para $f(x)$ en el intervalo $[0, 5]$.

2. Escribe las raíces halladas.

3. Grafica aproximadamente tu función.

4. Observa que la función corta al eje real por tercera vez entre los puntos 2 y 3. Para encontrar la tercera raíz, encuentra el punto medio entre ellos.

$$f[(2 + 3)/2] = 0$$

Si lo es, habrás obtenido la tercera raíz de la ecuación.

Si no lo es, considera el punto 5/2 y aquél que tomaste en el punto 4, cuya $f(x)$ tenga signo contrario a $f(5/2)$. (Una debe ser positiva y la otra negativa.)

6. Repite la operación 4. y 5, hasta hallar la raíz buscada.

Guía de Trabajos Prácticos No. 6

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (x + 1)^2$

1. Realiza una tabla de valores para $f(x)$.

2. Dibuja $f(x)$ en el papel milimetrado.

3. A partir del gráfico, realiza una tabla de valores para $f(x)$ cuando x se acerca por la derecha al número (-2).

4. Escribe en lenguaje matemático tu resultado.

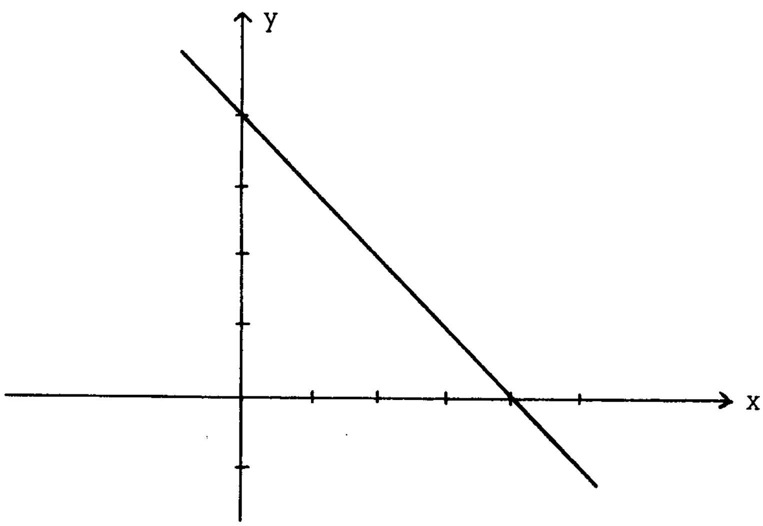
5. A partir del gráfico, realiza una tabla de valores para $f(x)$ cuando x se acerca por la izquierda al número (-2).

6. Escribe en lenguaje matemático tu resultado.

....

Guía de Trabajos Prácticos No. 7

Observa la función dada en el gráfico:



1. Construye una tabla de valores para $f(x)$ considerando valores de x cada vez más próximos al puntos 3.

2. ¿Qué observas?

3. ¿Cómo escribimos matemáticamente "x se acerca mucho a 3".

4. ¿Qué ocurre con los valores de $f(x)$ cuando "x se acerca mucho al valor 3?

Guía de Trabajos Prácticos No. 8

Recordemos una función conocida:

$$f : R^+ \to R^+$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

¿Cómo será el comportamiento de la función en las proximidades del punto 2?

1. Realiza una tabla de valores mediante la cual puedas dar tu respuesta.
2. Con ayuda de la calculadora, completa la siguiente tabla. (Utiliza la tabla de valores que ya has realizado).

x	$\sqrt{x}$	$\|2 - x\|$	$\|\sqrt{2} - \sqrt{x}\|$

3. Utiliza papel milimetrado para graficar $f(x)$.
4. Contesta:

   a. ¿Qué observas con los valores obtenidos?

   b. ¿Por qué se eligieron estas diferencias?

   c. ¿En algún momento las diferencias serán nulas?

5. Observa los resultado obtenidos en las guías No. 6 y No. 8. Las funciones dadas son continuas. ¿Puedes dar una regla para calcular el límite de una función continua cuando x se aproxima a un cierto valor x_0?

....

Guía de Trabajos Prácticos No. 9

Estudia el comportamiento de la función:

$$f : \mathbb{R} - \mathbb{R}$$

$$f(x) = (\text{sen } x)/x$$

en el punto en el que no está definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$

(Utiliza calculadora)

1. ¿Cuánto vale el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$
2. Observa en tu tabla, que los valores de x se han apropiado cada vez más al punto de indeterminación. La diferencia entre uno de estos puntos y el de cero es cada vez menor. Escribe la menor diferencia que hayas encontrado:

$$x - 0 < \ldots..$$

3. Sabemos que a medida que x se acerca a cero, el valor de la función se acerca al valor L. (Límite) Observa que la diferencia entre los valores de $f(x)$ y el valor L es cada vez menor. Escribe la menor diferencia que hayas encontrado:

$$f(x) - L < \ldots..$$

4. Para indicar una distancia utilizamos el concepto de valor absoluto. Escribe los resultado que obtuviste en los puntos 2. y 3. mediante la notación de valor absoluto.

5. Podemos calcular entonces que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

si y sólo si;

$$|x - 0| < \ldots.. \text{ y también } |f(x) - L| < \ldots..$$

y esto ocurre para todo punto en las proximidades del cero.

PRE-TEST Y POST-TEST

El grupo testigo y el grupo experimental fueron sometidos a un pre-test antes de comenzar a explicar el tema. El objetivo del pre-test fue determinar si el alumno poseía algún conocimiento del concepto de límite.

Con posterioridad a la explicación, ambos grupos fueron sometidos a un post-test en el que se evaluó la comprensión del concepto y el procedimiento algorítmico utilizado, como dos items independientes.

En el pre-test y en el post-test se evaluó la comprensión del concepto de límite mediante problemas que tuviesen implícito un proceso dinámico de infinito potencial.

....

PRE-TEST

Alumna: ....
Colegio: ....
Fecha: ....

El siguiente juego está previsto para dos jugadores. Se trata de un dispositivo en forma de balanza, con un platillo en uno de sus extremos y un resorte que sostiene un payaso en el otro extremo. Al colocar un peso de 2 kg en el platillo, la tapa de contención del resorte es liberada y el payaso "salta" fuera de la caja.

El juego consiste en colocar alternativamente pesas en el platillo. Cada jugador sólo puede colocar una pesa por turno, buscando que el dispositivo se active para su contrincante e intentando no activarlo para sí mismo, pues en este caso pierde el juego.

Qué estrategia aconsejas seguir para ganar el juego?

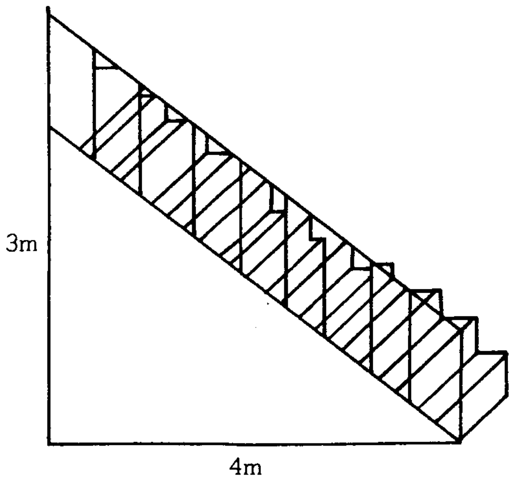
....

POST-TEST

Alumna: ....
Colegio: ....
Fecha: ....

1. Una pared triangular de 4 m de largo por 3 m de alto desea empapelarse. El ancho del papel conseguido es de 1 m

   ¿Cómo debemos hacer para empapelarla, lo mejor posible, con rectángulos de igual base?



2. a. Utiliza el gráfico para calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

   b. Señala, en el gráfico, el conjunto de puntos que se acercan a 2 y el correspondiente conjunto de puntos que se acercan a L.

3. Calcula:

   a. $\mathrm{Lim}_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

   b. $\mathrm{Lim}_{x \to -1} \; x^2 + 5x$