

Un Estudio Exploratorio Sobre la Asignación de Sentido a las Representaciones Básicas de la Variación, al Término de la Primaria y el Inicio de la Secundaria.

Resumen

En este artículo se aportan elementos de análisis de la apropiación de la noción de variación por parte de los alumnos que finalizan la primaria y el primer año de secundaria, a partir de la observación de su desempeño en la resolución de problemas de proporciones y de variación proporcional.

Introducción

La investigación en torno a la problemática de la elaboración de las diferentes representaciones de la variación, conformadas en un Sistema Matemático de Signos (cf. Filloy & Hoyos, 1993) a lo largo de la educación básica, involucra diversos aspectos de acuerdo con la Teoría del Modelo Teórico Local. En particular un análisis pragmático del contenido.

El análisis pragmático del contenido, describe los usos y las maneras tradicionales en las cuales el Sistema Matemático de Signos (SMS) en cuestión es emitido en el sistema educativo, incorporando, además, la evolución histórica de dicho SMS.

Verónica Hoyos Aguilar

Universidad Pedagógica Nacional

En este trabajo se ha realizado una exploración acerca de los usos de los alumnos de la noción de variación en el contexto de proporcionalidad tradicional en la educación básica. Esto arroja sugerencias acerca de la asignación de sentido a las representaciones básicas de la variación por parte de los educandos de dicho nivel.

El estudio exploratorio tuvo lugar a través de la aplicación de un problemario a todos los alumnos de dos escuelas públicas que se encontraban al término de la primaria y después del primer año de secundaria, respectivamente. La aplicación fue llevada a cabo por el maestro responsable de la clase durante una de las últimas sesiones de matemáticas del año escolar. La muestra del estudio fue incidental y estuvo constituida en total por 165 niños, 78 de los cuales finalizaban el 6o. año de primaria y 87 el primer año de secundaria. Sus edades oscilaron entre los 11 y los 13 años, aproximadamente.

En el problemario las tareas involucradas correspondían a los temas de proporciones (problemas 1, 2, 3 y 4), y de variación proporcional (problema 5 - a , b y c -). En particular, en este trabajo se hace énfasis en el desempeño en el problema 5, en donde las tareas a ejecutar fueron las de tabulación, graficación y evaluación. El rendimiento de los alumnos en estas tareas nos lleva a formular hipótesis acerca del uso de las representaciones tabular y gráfica de la variación como registros de cambios discretos, además de dificultades de los alumnos para registrar cambios sucesivos.

Antecedentes

A. Robert Karplus, de la Universidad de California, ha investigado sobre el desempeño de los alumnos de 11 a 13 años en contextos de proporcionalidad específicos. En el artículo "Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems" (cf. Karplus, 1983); introduce elementos cualitativos para analizar el razonamiento de los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad.

Karplus identifica fundamentalmente dos tipos de estrategias, de acuerdo con las razones establecidas en el curso de la resolución del problema. Así, una estrategia "between" (*intra*) deriva de la utilización de razones en donde, tanto en el numerador como en el denominador, aparecen cantidades correspondientes a la misma magnitud (como distancia, peso, longitud, tiempo, etc.).

La otra estrategia "within" (*inter*), es aquella que deriva del establecimiento de razones en donde en el numerador y en el denominador aparecen magnitudes diferentes. Karplus denomina a dichas razones "variables intensivas con dimensión".

Es de notar esta investigación de Karplus por el alto nivel de éxito que tuvieron los alumnos en la resolución de los problemas planteados (entre el 60% y 90%), con índices del 50% al 80% en las categorías de respuestas que involucraban razonamiento proporcional. También resalta en sus resultados la incidencia de una baja frecuencia de utilización de una estrategia aditiva por parte de los niños de su estudio.

Debido a que en este trabajo de Karplus se diferencia de los anteriores en la ocurrencia de las variables intensivas con dimensión en el contexto del problema, se concluye que el alto rendimiento obtenido podría estar afectado por la introducción de dichas variables.

A diferencia del trabajo de Karplus, aquí la introducción de variables intensivas con dimensión en contextos de proporcionalidad se utiliza para hacer una exploración acerca de las ejecuciones de los alumnos del nivel escolar básico en tareas de tabulación, graficación y evaluación. Al plantear estas tareas como una continuación de las ejecuciones de los alumnos en el problema 1 (uno de los de mayor éxito), se deslindan las dificultades inherentes al contenido variacional (en este contexto) de las dificultades asociadas a la noción de proporción.

B. Con respecto a los constructos teóricos utilizados para interpretar los resultados del estudio exploratorio que aquí se presenta han sido desarrollados fundamentalmente por Eugenio Filloy (cf. Filloy, 1988) y Teresa Rojano (cf. Rojano, 1985), del Cinvestav, del IPN, en México, a través de trabajos de investigación empírica en torno a la elaboración de las representaciones matemáticas convencionales por parte de los escolares de los niveles aludidos. La exposición de éstos y ejemplos de su aplicación puede consultarse en Rojano, en la referencia aludida; en Hoyos (1992 y 1993), y en Filloy & Hoyos (1993). Valga decir que la teoría del Modelo Teórico Local (Filloy, 1990) se define como una teoría para la observación empírica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Evolución histórica del contenido variacional

En cuanto a la evolución histórica de los Sistemas de Representación de la Variación elementales, grosso modo podemos decir que ésta se configura alrededor de las tablas de valores babilónicas, de las gráficas de variación situadas en la edad media, y de las fórmulas algebraicas de origen renacentista.

Entre las diferencias sustanciales que se pueden señalar, con respecto a las expresiones mencionadas, resaltaremos las siguientes:

- la primera de ellas se refiere a un registro de cambios de tipo discreto;

- la segunda, a un registro de cambios de tipo continuo;
- y, el contraste de éstas dos con la tercera es que ésta última es libre ya de referentes numéricos concretos y geométricos.

Además, convencionalmente a dicho contenido se le ha asignado un papel relevante para el modelaje de una gran cantidad de fenómenos dentro de diversas disciplinas de estudio, perfilándolo como clave en la construcción de todo conocimiento científico.

Los aspectos inherentes al desarrollo de la noción de variación ya mencionados, como son la tabulación, graficación y utilización de fórmulas, están estrechamente vinculados con la promoción en el estudiante de actitudes de observación, registro y utilización de lenguaje matemático.

Las tareas escolares supeditadas a estos aspectos, como el registro de observaciones por tabulación o por graficación y la evaluación derivada del reconocimiento de un patrón, son básicas en todas las disciplinas científicas y sociales.

Usos tradicionales en el nivel básico

En México, en la escuela elemental, la noción de variación dentro de un Sistema Matemático de Signos, se introduce a través de secuencias didácticas que tienen como fin el abordar los aspectos de dependencia entre variables, de anotación tabular, y el de notación geométrica (o gráfica), todo ello en el contexto de la variación proporcional.

El tipo de cuestiones o de problemas que se plantean a los alumnos, son del tipo:

- el precio que se paga al comprar "un-cierto-producto", ¿depende del peso (en kilos, por ejemplo) de la cantidad comprada?; o, ¿la cantidad de gasolina que consume un automóvil en la carretera, depende de la distancia recorrida?
- ¿cuántos huevos se necesitan para hacer 3 pasteles?; o, ¿cuántos kilómetros recorre el automóvil por un litro de gasolina?
- ¿cuánto se alargará una tira de goma si pones el peso de 4 y $\frac{1}{2}$ objetos?; o, ¿cuántos kilómetros se recorrieron con un consumo de 6.5 litros de gasolina?

En donde cada clase de preguntas hace alusión a cada uno de los aspectos antes mencionados.

Es probable que el esclarecimiento de los usos de las diferentes representaciones de la variación en el contexto escolar, por parte de los diferentes actores que intervienen en el fenómeno educativo, sea medular para explicar la apropiación del contenido variacional aludido.

Método

Se elaboraron dos versiones de problemario con el fin de que fueran distribuidas de manera alternada a toda la clase durante una de las sesiones de trabajo, al finalizar el año escolar.

Los contextos de los problemas tuvieron como referentes tres fenómenos dinámicos: un auto en movimiento, los cambios físicos que se van experimentando al transcurrir el tiempo y el entrenamiento atlético. La variable de interés era, respectivamente, el consumo de gasolina, el crecimiento del cabello y la velocidad al correr.

Los problemarios se distribuyeron a los alumnos en un día de clase normal, pidiéndoles a los niños dejaran constancia por escrito de todo el trabajo que realizaran, y que explicaran cómo habían encontrado la solución (ver Tabla 1).

Al igual que en el trabajo de Karplus, se esperaba que los referentes elegidos fuesen familiares a los alumnos; además, los datos eran, intencionalmente, números pequeños que daban lugar a razones enteras.

Retomando los elementos de análisis de las estrategias de proporcionalidad de Karplus, se etiquetaron los problemas del 1 al 4, de acuerdo con la posibilidad de aplicar la estrategia "intra" (*between*) o "inter" (*within*) para la resolución, y también, de acuerdo con el referente y los datos aludidos en cada uno de los problemas.

Tabla 1. Ejemplo del problemario de trabajo (versión 1), resaltando junto con los enunciados utilizados el contenido matemático y las tareas a ejecutar.

No. Problema (clave)	Contenido matemático	Enunciado	Tarea a ejecutar
1 (KWB1)	Proporciones	Se sabe que un coche con 1 litro de gasolina recorre 8 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrerá con 4 litros de gasolina?	Encontrar un dato faltante
2 (LWB1)	Proporciones	A Lupe le crece el pelo 2 centímetros por mes; ¿Cuánto le ha crecido después de tres meses.	Idem 1

Tabla 1. Continuación

No. Problema (clave)	Contenido matemático	Enunciado	Tarea a ejecutar
3 (VUWBX)	Proporcionalidad	Ernesto y Paco fueron a entrenar saliendo de clases. Ernesto dio tres vueltas a la cancha en 9 minutos y Paco le dio 6 vueltas en 15 minutos. ¿Cuál de los dos corrió más rápido?, o ¿corrieron a la misma velocidad?	Comparar dos razones
4 (VUWB)	Proporcionalidad	También Juan y Luis fueron a entrenar. Juan dio 2 vueltas a la cancha en 8 minutos y Luis le dio 6 vueltas en 24 minutos. ¿Cuál de los dos corrió más rápido?, o ¿corrieron a la misma velocidad?	Comparar dos razones no equivalentes
5	Noción de variación	Aquí igual como pasaba en el problema 1, un coche recorre 8 kilómetros con 1 litro de gasolina. Se te pide: (a) Hacer una tabla que muestre el consumo de gasolina y de kilometraje recorrido durante un trayecto de 88 kilómetros. (b) Dibujar una gráfica que muestre lo que hiciste en la tabla. (c) Por último, responde, ¿cuántos kilómetros se recorrieron con un consumo de 6.5 litros de gasolina?	a) Tabular b) Graficar c) Evaluar (encontrar un valor a partir del reconocimiento de un patrón común a la tabla y/o gráfica).

Tabla 2. Distribución de versiones del problemario a sexto año de primaria y primero de secundaria.

versión	1	2	
grado			totales
Sexto de primaria	41	37	78
Primero de secundaria	43	44	87
Totales	84	81	165

Tabla 3. Nombre de los problemas haciendo alusión a la estrategia de resolución adecuada para resolverlo).

Nombre del problema	Variación intensiva: consumo de gasolina				Variación intensiva: crecimiento del cabello				Variación intensiva: velocidad al correr.			
	Gas.	Km	Gas	Km	Tmpo.	cm	Tmpo.	cm	Tmpo.	vueltas	Tmpo.	vueltas
KWB2	1	8	4	?								
KWB	2	12	6	?								
LWB1					1	2	3	?				
CWB1					2	1	4	?				
VUWB									8	2	24	6
VUWB1									5	1	30	6
VUWBX									9	3	15	6

W = inter enteros

B = intra enteros.

l = cantidad unitaria.

X = razones distintas.

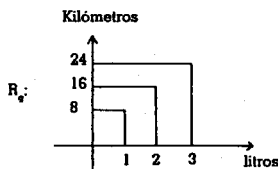
No siendo el análisis de las tareas de tabulación, graficación y evaluación objeto de estudio del trabajo de Karplus, el objetivo principal de este trabajo es el de efectuar un primer acercamiento de sondeo, en cuanto a los usos de las representaciones básicas de la variación en uno de los contextos tradicionales de enseñanza.

Un ejemplo de los datos usados y de una estrategia de ejecución adecuada para la resolución del problema 5 es el que sigue:

Problema 5 -NV-

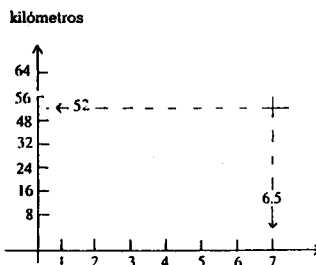
R_t:

litros	kilómetros
1	8
2	16
3	24
...	...
...	...
...	...
11	88



[R_t = Representación (o notación) tabular; R_g = Representación (o notación gráfica)].

R_t: $6.5 \times 8 = 52 \leftrightarrow$



(R_t = Representación (o notación) 'funcional' y/o evaluación).

Con respecto a las categorías de clasificación, están constituidas por las utilizadas por Karplus para el análisis del razonamiento proporcional, y por las categorías R_i , R_g y R_r , correspondientes a la realización de tareas de tabulación, graficación y evaluación. Finalmente, el análisis de las ejecuciones consideradas como correctas en el problema 5 nos llevó a introducir nuevas categorías de clasificación, apropiadas para el análisis de la apropiación del contenido matemático involucrado en este problema.

Categorías de respuestas:

$\left. \begin{array}{l} N \\ I \\ C \\ E \\ P_w \\ P_B \\ P_O \end{array} \right\}$	<p>Idem. trabajo de Karplus: N = No hay respuestas; I = Respuesta incorrecta; E = Cálculo erróneo con respuesta correcta o incorrecta; P_w, P_B y P_O son categorías que refieren a un razonamiento proporcional ya sea inter (P_w), intra (P_B), o de otro tipo (P_O).</p>
R_T	Realización de una tabla de correspondencia numérica.
R_T	Realización de una gráfica de relación de las magnitudes involucradas.
R_i	Realización de un producto o de un cociente para evaluar un valor de la variable intensiva.

(Incidentalmente, también se introdujeron las categorías S_R y P_{IE} por su alta frecuencia de aparición:

S_R	Utilización de sumas repetidas para ejecutar productos.
P_{IE}	Razonamiento proporcional sin identificación de estrategia.
1DVE	Realización de 1 expresión discreta y evaluación errónea.
2DVE	Realización de 2 expresiones discretas y evaluación errónea.
2DVC	Realización de 2 expresiones discretas y evaluación correcta.
RDVC	Realización de 1 ó 2 expresiones discretas repetidas, y evaluación correcta.
NNVC	Evaluación correcta únicamente.

Resultados

Mostraremos los resultados obtenidos sintéticamente, a través de las tablas de distribución de frecuencias —expresadas en porcentajes— acerca del desempeño de los alumnos en la resolución de los problemas planteados.

Desempeño en proporciones y proporcionalidad

Tabla 4. Frecuencias del desempeño en sexto grado, en los problemas de proporciones y de proporcionalidad.

PROBLEMAS CATEGORÍAS	VERSIÓN 2				VERSIÓN 1			
	CWB1	KWB	VUWB1	VUWBX	KWB1	LWB1	VUWB	VUWBX
N		2.7	2.7	5.4			2.4	2.4
I	8.1	10.8	16.2				12.2	12.2
C	8.1		8.1	13.5	2.4	2.4	4.9	14.6
P _w		8.1	5.4	13.5		2.4	24.4	12.2
P _B	27	10.8		2.7	2.4		2.4	
P _O			2.7					
P _{IE}			21.6		70.7	56.1	7.3	2.4
S _R	32.4	21.6	2.7		14.6	31.7		2.4
E	24.3	45.9	40.5	48.6	9.7	7.3	46.3	53.6
ÉXITO	67.5	40.5	40.5	29.7	90.1	92.6	39.	31.6
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL	27	18.9	29.7	16.2	73.1	58.5	34.1	14.6
ESTR. ERRÓNEA	24.3	45.9	40.5	48.6	9.7	7.3	46.3	56.6
SIN INFORMA- CIÓN (N, I, C)	16.2	13.5	27	35.1	2.4	2.4	19.5	29.2

En donde las categorías aludidas denotan:

- Éxito en la tarea (C, P_w, P_B, P_O, P_{IE}, S_R).
- Razonamiento proporcional (P_w, P_B, P_{IE}, P_O).
- Estrategia errónea (E), como aquella en la que las operaciones realizadas conducen a un resultado equivocado o también aquella en que las operaciones están bien realizadas pero no se da una respuesta final o concluyente al problema planteado.

Tabla 5. Frecuencias del desempeño en primero de secundaria sobre problemas de proporciones y de proporcionalidad.

PROBLEMAS CATEGORÍAS	VERSIÓN 2				VERSIÓN 1			
	-1- CWB1	-2- KWB	-3- VUWB1	-4- VUWBX	-1- KWB1	-2- LWB1	-3- VUWB	-4- VUWBX
N				6.8				2.3
I	9.1	9.1	6.8	9.1			9.3	9.3
C	9.1		9.1	13.6	2.3	7.0	2.3	11.6
P _w		9.1	18.2	11.4	4.6	2.3	30.2	11.6
P _B	31.8	6.8		2.3			7.0	
P _O	6.8	13.6	2.3		7.0	2.3		
P _{IE}			22.7	6.8	72.1	67.4		
S _R	22.7	13.6	2.3	11.4	4.6	13.9	2.3	4.6
E	20.4	47.7	38.6	38.6	9.3	7.	48.8	60.5
Éxito	70.4	43.1	54.6	45.5	90.6	92.9	41.8	27.9
Razonamiento Proporcional	38.6	29.5	43.2	20.5	83.7	72.	37.2	11.6
Estr. Errónea	20.4	47.7	38.6	38.6	9.3	7.	48.8	60.5
Sin Información (N, I, C)	18.2	9.1	15.9	29.5	2.3	7.	11.6	23.2

Tabla 6. Frecuencias del desempeño de los alumnos de sexto año en los problemas de variación proporcional.

VERSIÓN CATEGORÍAS	2			1		
	Prob. 5a	Prob. 5b	Prob. 5c	Prob. 5a	Prob. 5b	Prob. 5c
N	51.3	37.8	37.8	46.5	41.8	53.6
I	2.7	8.1	51.3			21.9
C			5.4			2.4
R _r	13.5					
R _g		18.9			4.8	
R _i						2.4
E	32.4	35.1	5.4	34.1	46.3	19.5
RV	13.5	18.9		19.5	4.8	2.4
Sin Inform.	54.0	45.9	94.5	46.3	41.8	77.9

RV = Representaciones básicas del contenido señalado.

Tabla 7. Frecuencias del desempeño de los alumnos de primero de secundaria, en los problemas 5a, 5b y 5c de la noción de variación.

VERSIÓN CATEGORÍAS	2			1		
	Prob. 5a	Prob. 5b	Prob. 5c	Prob. 5a	Prob. 5b	Prob. 5c
N	47.7	45.4	36.4	46.5	51.8	44.2
I		2.3	40.9	2.3		16.3
C			4.5			13.9
R _r	27.3			18.6		
R _g		15.9			11.6	
R _t						9.3
E	25.	36.4	18.2	32.5	30.2	16.3
NV	25.	15.9		18.6	11.6	9.3
Sin Inform. (N, I, C)	47.7	47.7	81.8	48.8	58.1	74.4

Tabla 8. Frecuencias* del uso de las diferentes estrategias de ejecución de los alumnos, en el problema de variación proporcional.

Grado Escolar		
Categorías de ejecución	Sexto de primaria	Primero de secundaria
1DVE	11.1	48.1
2DVE	55.5	18.5
2DVC	22.2	11.1
RDVC	11.1	11.1
MNVC	0	14.8

Efecto del sexo y del grado escolar

Al observar un aumento de éxito en los problemas CWB1 y LWB1 con respecto a los problemas KWB y KWB1 surgió la cuestión, ¿es la variable sexo la que está influyendo? La comparación que surge aquí es entre los referentes de las dos versiones del problemario: la situación que se presenta en CWB1 y

* Estas frecuencias están referidas únicamente a los alumnos que tuvieron éxito en al menos una de las tareas involucradas en el problema 5.

en LWB1 es de crecimiento del cabello, mientras que en KWB y KWB1 es de consumo de gasolina, es decir la primera es una situación de observación "propiamente femenina", mientras que la segunda es "propiamente masculina": el descenso en el porcentaje de éxito probablemente se deba a la falta de experiencia de las niñas en el manejo de referentes "propiamente masculinos".

Tabla 9. Frecuencias del éxito obtenido según la variable sexo, en sexto año de primaria.

SEXO	CWB1		LWB1		KWB		KWB1	
	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS
C	8.3	8		4.3				4.3
P _w			5.5			12		
P _B	16.7	32				16	5.5	
P _{IE}			44.4	65.2			66.7	73.9
S _R	33.3	32	44.4	21.7		32	16.7	13
Totales	58.3	72.	94.3	91.2	0	60.	88.9	91.2

- En donde la variable intensiva en los problemas CWB1 y LWB1 fue el crecimiento del cabello, y en los problemas KWB y KWB1 fue el consumo de gasolina.

Tabla 10. Frecuencias del éxito obtenido, según la variable sexo, en primer años de secundaria.

SEXO	CWB1		LWB1		KWB		KWB1	
	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS	NIÑAS	NIÑOS
C	4	10.5	8	5.5				5.5
P _w				5.5	12	5.3		11.1
P _B	32	31.6			4	10.5		
PO	8	5.3	4		16	10.5	8	5.5
P _{IE}			60	77.8			80	61.1
S _R	28	15.8	16	11.1	8	21	4	5.5
Totales	72	63.2	88	100	40	47.3	92	88.7

Tabla de contingencia de la variable sexo en sexto año de primaria y primer año de secundaria.

Sexo			
GRADO ESCOLAR	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
Sexto de primaria	30	48	78
Primero de secundaria	50	37	87
Totales	80	85	165

Tabla 11. Frecuencias del éxito obtenido en las dos versiones del problemario, de acuerdo con el referente del problema, en sexto año de primaria.

REFERENTE		
SEXO	CRECIMIENTO DE CABELLO	CONSUMO DE GASOLINA
NIÑAS	80.0	53.3
NIÑOS	81.2	75.0

Tabla 12. Frecuencias del éxito obtenido por los niños de secundaria (en las dos versiones del problemario), de acuerdo con el referente del problema.

REFERENTE		
SEXO	CRECIMIENTO DE CABELLO	CONSUMO DE GASOLINA
NIÑAS	80.0	66.0
NIÑOS	81.2	67.5

En la resolución del problema vinculado con las representaciones de la variación proporcional, las categorías con las más altas frecuencias de ocurrencia fueron las correspondientes a ejecuciones erróneas (E) y a ausencia de respuesta (N).

En esta última es de notar el alto porcentaje de incidencia, acrecentándose éste en los problemarios pertenecientes a las niñas, con respecto a los de los niños.

Tabla 13. Frecuencias del uso de las representaciones convencionales de la variación proporcional, contrastando el desempeño de las niñas y de los niños de sexto año en la resolución del problema, 5 versión 1

Sexo Categoría	NIÑAS			NIÑOS		
	Tabulación	Graficación	Evaluación	Tabulación	Graficación	Evaluación
N	50	55.5	55.5	39.1	32.5	52.2
I	-	-	11.1	-	-	30.4
C	-	-	-	-	-	8.7
R _t	27.8	-	-	13	-	-
R _g	-	-	-	-	8.7	-
R _i	-	-	5.5	-	-	-
E	22.2	44.4	57.8	47.8	47.8	8.7
Éxito C, R _t , R _g , R _i	27.8	0	5.5	13	8.7	8.7
Sin infor- mación N, I, C	50	55.5	66.7	39.1	32.5	91.3

3.3.2. Tabla de frecuencias contrastando el desempeño de las niñas y de los niños de sexto año, en la resolución del problema 5, versión 2.

Sexo Categoría	NIÑAS			NIÑOS		
	Tabulación	Graficación	Evaluación	Tabulación	Graficación	Evaluación
N	91.7	50	58.3	32	32	28
I	-	8.3	33.3	4	8	60
C	-	-	-	-	-	8
R _t	8.3	-	-	16	-	-
R _g	-	8.3	-	-	20	-
R _i	-	-	-	-	-	-
E	-	33.3	8.3	48	40	4
Éxito C, R _t , R _g , R _i	8.3	8.3	0	16	20	8
Sin infor- mación N, I, C	91.7	58.3	91.6	36	40	96

Tabla 14. Frecuencias del uso de las representaciones convencionales de la variación proporcional, contrastando el desempeño de las niñas y de los niños de primero de secundaria en la resolución del problema 5 versión 1.

Sexo	NIÑAS			NIÑOS		
	Tabulación	Graficación	Evaluación	Tabulación	Graficación	Evaluación
N	52	76	48	38.9	33.3	38.9
I	-	-	12	5.5	-	22.2
C	-	-	8	-	-	22.2
R _t	16	-	-	16.7	-	-
R _g	-	4	-	-	22.2	-
R _e	-	-	12	-	-	5.5
E	32	20	20	38.9	36.4	11.1
Éxito C, R _t , R _g , R _e	16	4	20	16.7	22.2	27.8
Sin información N, I, C	52	76	68	44.4	33.3	83.3

Tabla 15. Frecuencias del uso de las representaciones convencionales de la variación proporcional, contrastando el desempeño de niñas y de niños de primero de secundaria en la resolución del problema 5, versión 2.

Sexo	NIÑAS			NIÑOS		
	Tabulación	Graficación	Evaluación	Tabulación	Graficación	Evaluación
N	36	40	40	52.6	52.6	31.6
I	-	-	40	-	5.3	42.1
C	-	-	8	-	-	-
R _t	20	-	-	26.3	-	-
R _g	-	20	-	-	10.5	-
R _e	-	-	-	-	-	-
E	44	40	12	21	31.6	26.3
Éxito C, R _t , R _g , R _e	20	20	8	26.3	10.5	0
Sin información N, I, C	36	40	88	52.6	57.9	73.7

Conclusiones

A. A pesar de que el porcentaje de alumnos que efectuaron de manera convencional al menos alguna de las tres tareas pedidas en el problema 5 fue muy bajo (de apenas el 27%), pudimos establecer una serie de categorías de las ejecuciones acordes al contenido matemático de la variación proporcional en el nivel básico, obteniendo la clasificación siguiente:

Tabla 16. Frecuencias (en porcentajes) de las ejecuciones de los alumnos de sexto de primaria y primero de secundaria en el problema de variación proporcional.

Grado Escolar Ejecución	Sexto de primaria	Primero de secundaria
1DVE	11.1	48.1
2DVE	55.5	18.5
2DVC	22.2	7.4
RDVC	11.1	11.1
NNVC	----	14.8

Las representaciones convencionales de los estudiantes siempre estuvieron relacionadas con tablas, con el mapeo de magnitudes en el plano o con gráficas de barras. Sin embargo, a todas las hemos clasificado como discretas pues en ninguna de ellas (con una única excepción) hubo indicadores de la comprensión del proceso de variación como proceso de cambios continuos. Nunca, por ejemplo, (salvo en el caso aludido) los estudiantes utilizaron sus registros geométrico-cartesianos para obtener la evaluación pedida en el inciso c) del problema 5.

En la Tabla 16 podemos ver que mientras el 88.8% de los alumnos de la primaria realizaron las tareas a) y b) del problema 5 a través de dos representaciones discretas para el proceso de variación en cuestión, de entre éstos, únicamente el 33% realiza la evaluación correctamente. De donde se infiere que es muy probable que los alumnos que terminan la primaria no llegan a asignarle un sentido culturalmente adecuado a la representación geométrico-cartesiana de la variación proporcional.

El desempeño de los alumnos de secundaria confirma esta observación ya que casi la mitad de ellos (el 48%) realiza únicamente una representación discreta, conservándose el porcentaje de alumnos que efectúan la evaluación de manera correcta (33%). Así, tal vez los estudiantes de secundaria estén conservando una única representación, es decir, que abandonan o la representación numérica o la geométrica de la noción de variación, probablemente por haberles asignado el mismo sentido, no reconociéndoles su especificidad.

B. Si bien el contexto de proporcionalidad escolar del que hemos hablado es el tradicional para la introducción del contenido variacional a nivel elemental (a través de la observación de diferentes formas de dependencia, construcción de tablas donde se registren los valores que va tomando una cantidad al variar otra, resolución de problemas y construcción de gráficas donde se registren los valores que va tomando una cantidad al variar otra), los resultados de la exploración sugieren que estamos lejos de propiciar en el alumno el desarrollo de un pensamiento cuantitativo y relacional como un instrumento de comprensión, interpretación y expresión de fenómenos sociales y científicos del mundo, ya que es probable que al finalizar la primaria el alumno aún no esté habituado a enfrentar situaciones de registro de observaciones y de modelaje del proceso observado.

Tal vez esto sea debido a la dificultad de enfrentamiento real de tales situaciones en el aula. Probablemente la computadora –que potencia la visualización de cambios continuos– venga a ser un recurso importante en el diseño de secuencias didácticas apropiadas para el desarrollo de las destrezas mencionadas.

C. También surge como necesaria una nivelación de experiencias dentro del aula, entre niños y niñas, en cuanto al manejo de referentes paradigmáticos de procesos dinámicos, los cuales serían introducidos para la observación y el registro de la variación de dichos procesos. Esto tendería a posibilitar la misma oportunidad de competencia entre las niñas y los niños en su futuro desarrollo profesional, dentro de las disciplinas científicas y sociales.

Bibliografía

- Filloy, E., & Hoyos, V. 1993. A Theory of the production of Mathematical Signs System –The case of algebraic representation of basic variation notions. *Proceedings of PME-NA XV*, California (USA).
- Karplus, R., et al., 1983. "Early adolescents? proportional reasoning on 'rate' problems". *Educational studies in Maths.*, 14, pp. 219-233. Reidel Publishing Co. Holland and USA.
- Filloy, E., 1988. "Theoretical aspects of PME-algebra research." Documento de trabajo interno. Institute of Education of London (KGB).
- Hoyos, V., 1992. "Una perspectiva de investigación en enseñanza y aprendizaje del álgebra". *Memorias de la Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Cuernavaca (México).
- Hoyos, V., 1993. "Representaciones de la variación y el desarrollo de la sintaxis algebraica" –Proyecto de tesis de doctorado. Cinvestav-IPN, México (México).
- Filloy, E., 1990. "PME-Álgebra Research. A working perspective". *Proceedings of PME XIV*, Vol. 1. Mexico (México).
- Rojano, T. 1985. *De la aritmética al Álgebra*. Tesis de doctorado. Cinvestav-IPN, México (México).