REFLEXIÓN HISTÓRICA, EPISTEMOLÓGICA Y DIDÁTICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

Yadira M. MESA, Jhony A. VILLA
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
e-mail yadiramarcelamesa@yahoo.es, javo@une.net.co

RESUMEN

El concepto de función ha sido considerado como un elemento fundamental para la construcción de pensamiento matemático, en gran parte por las múltiples aplicaciones en la modelización de situaciones de variación relativas a contextos cotidianos y a las demás ciencias. En este artículo, se presentan los avances de un proyecto de investigación en el que pretende diseñar una propuesta didáctica mediante la cual se pueda construir el concepto de función cuadrática vía la modelización de fenómenos de variación. Se presentan particularmente avances del proyecto en cuanto al rastreo histórico y algunos elementos que pueden ser tenidos en cuenta en el momento de construir una didáctica del concepto de función cuadrática.

INTRODUCCIÓN

En esta propuesta se pretende mostrar cómo desde la historia se pueden esgrimir algunos elementos de tipo epistemológico que se convierten en herramientas para la construcción didáctica del concepto de función cuadrática al interior del aula de clase.

Para el rastreo histórico se recurrió a diversas fuentes primarias y secundarias (Salkind 1999, p. 207) con las cuales se pudo determinar que las nociones asociadas a lo "cuadrático" atravesaron por al menos cuatro momentos, a saber: Las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. En cada una de estas etapas se presentan los hallazgos relativos a las situaciones que involucraron nociones cuadráticas de manera tal que se evidencie la presencia posibles obstáculos y fases importantes en su construcción de manera que posibiliten una comprensión de la actividad educativa en el aula de clase.

GENÉSIS HISTÓRICA DE LAS NOCIONES CUADRÁTICAS.

Son varias las culturas que manifestaron una consideración de situaciones cuadráticas y las emplearon, en este caso se van a emplear aquellas que permiten evidenciar hitos en su construcción a partir de procedimientos.

ECUACIONES

El concepto de ecuación es uno de los más importantes del análisis matemático actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas. Por ejemplo:

Babilonia: En esta cultura las “nociones cuadráticas” se encontraron asociadas a situaciones en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización tal como se observa en la siguiente situación: *“Hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado”* que conduce a una ecuación cuadrática Kline (1972, 26). La geometría no tuvo un lugar trascendental en el desarrollo de la matemática babilónica, sin que ello no quiera decir que no se recurría a representaciones geométricas. Estas representaciones no fueron trabajadas con la rigurosidad que caracterizó más adelante a la cultura griega como se verá a continuación. (Kline 1972, p 29)

Grecia: Sin lugar a duda los griegos marcaron un hito aún más especial en la construcción de las nociones cuadráticas. Se puede hablar en la cultura griega dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto a lo aritmético, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones, haciendo un empalme con la geometría en relación con los números figurados. Se observa también en sus trabajos cierta captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos.

Por su parte lo geométrico, tiene como representante a Euclides quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado desde una perspectiva geométrica. El cuadrado se da a conocer en los siguientes términos: “…de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular…”. Según Puertas (1999, p.96) “…para dibujar un cuadrado [Euclides] a partir de un lado la expresión dada es *anagrápsai apó* (…) que indica la acción de dibujar repetidamente a partir de una recta dada (un lado) las demás rectas (lados) que cierran un cuadrado”. Exactamente la misma definición la retoma en su libro sobre áreas en donde se evidencia los vínculos entre la aritmética y la geometría dado que la noción de cuadrado aparece como figura y área a la vez. Cabe destacar la manera en que los segmentos no correspondían necesariamente a valores particulares, de lo que se desprende cierto grado de generalización .

Árabe: Como anota Boyer (1969 p.112,) “…había que construir un álgebra geométrica que generalizase y ocupase el lugar de la vieja álgebra aritmética”, aunque ésto lo cita en relación con los griegos, aplica también para los árabes en tanto se valieron de los trabajos de Euclides para el desarrollo del álgebra, por ello la concepción cuadrática remite a su representación geométrica, como la propuesta en los Elementos. En este sentido los árabes logran darle generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos. Esto supone un avance en tanto el paso a la generalidad, y permite evidenciar un obstáculo en la concepción de las raíces de una ecuación, ya que éstas eran referidas a segmentos y las cantidades negativas carecen de representación, aunque conocían por influencias hindúes el trabajo con los negativos.

Es necesario precisar que las ecuaciones para esta época se presentaban de manera retórica. Algunos investigadores sugieren una via similar para la introducción del álgebra escolar. Por otro lado, se puede observar que en muchas instituciones educativas, el concepto de lo cuadrático es introducido inicialmente desde una perspectiva geométrica, sin que necesariamente se realice un vínculo con situaciones relativas a ecuaciones. Vale la explorar las ventajas o desventajas que una introducción al concepto de función cuadrática por la vía de las ecuaciones pueda ocasionar conceptualmente en los estudiantes.

CÓNICAS

En el rastreo histórico se puede determinar otro momento que cumplió un papel muy importante en la conceptualización de "lo cuadrático". Se resaltan principalmente en las siguientes culturas:

Griega: Llama particularmente la atención la formulación de las secciones cónicas por Apolonio quien a la vez las estudia aproximándose de una forma sorprendente al estudio de coordenadas. En la literatura revisada se puede inferir que de no ser por los pocos recursos conceptuales de los que disponía Apolonio hubiese dado un paso importante a la creación de la geometría analítica. Es importante además el significado de "parábola" como equiparación, similar al concepto de paralelogramo de Euclides en los que por supuesto se encuentra la figura cuadrilátera, cabe inferir como la concepción cuadrática se refiere a un proceso también de conversión de áreas.

En relación con la búsqueda de solución a alguno de los tres problemas típicos de la Grecia Clásica, Hipócrates de Chíos afirma que el problema de la duplicación del cubo "…puede reducirse a encontrar dos medias proporcionales entre la arista dada y su doble (…) En nuestra notación algebraica, sean x e y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ Entonces $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$ ". Kline (1972, p. 70) esta afirmación conduce a una ecuación cuadrática de lo que puede deducirse que cuadrado es el producto que se desprende de la media proporcional, pero a su vez ésta se evidencia como un segmento que es nombrada como raíz, por lo tanto también como una solución.

Siglo XVII: Esta época se caracteriza por tratar de definir las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en x e y , así se establece el estudio de los lugares geométricos estableciendo un puente para transitar entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones. Es importante recalcar además la importancia aritmética en esta transición.

Las cónicas y en particular la parábola se consideran en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función. Vale la pena generar las reflexiones pertinentes sobre las implicaciones que tendría en el aula de clase continuar replicando esta parte de la historia abordando dichos conceptos de manera independiente o por el contrario, evaluar las implicaciones que tendría para la comprensión de ambos conceptos de manera conjunta.

CINEMÁTICA

Sin lugar a duda el movimiento es tan antiguo como la existencia misma, con Aristóteles y posteriormente con Oresme se observa un primer trabajo del movimiento pero hubo de esperar hasta el siglo XVII para un conocimiento físico – matemático más sólido del comportamiento de éste, pero este desarrollo no puede verse como algo lento, ya que la historia ha mostrado hasta este apartado como fue necesaria la construcción de algunos cimientos para ser concebida. Una reflexión importante es el continuo vínculo que existió entre las matemáticas y la física en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza que se convierten en motivo para generar actividad matemática

Galileo Galilei

En este apartado se presenta un énfasis en Galileo, por sus aportes a la construcción epistemológica del concepto de *"función cuadrática"* la cual se encuentra vinculada de manera explícita a los procesos de modelización de los fenómenos de variación. En Galileo se observa el uso de algunas representaciones como de *gráficas rectangulares*, lo cual refuerza una comprensión geométrica del gnómon definida por Euclides en relación al concepto de perpendicular y ángulo recto, como distancia, altura, etc.

Un elemento importante en el trabajo de Galileo es la instauración del método experimental, que puede entenderse como una forma de modelización con lo pretendía dar explicaciones a fenómenos de variación en la naturaleza.

En la siguiente situación se observarán algunos aspectos del razonamiento de Galileo que dan cuenta de la evolución en la construcción de una noción de la función cuadrática.

" […] si en tiempos iguales tomados sucesivamente desde el primer instante o comienzo del movimiento, tales como AD, DE, EF, FG, se recorrieren los espacios HL,LM,MN,NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares a partir de la unidad; es decir, como 1, 3, 5, 7; porque ésta es la razón de los excesos de los cuadrados de las líneas que van excediendo una de otras, y cuyo exceso es igual a la menor de ellas; vale decir, es la razón de los excesos de los cuadrados consecutivos a partir de la unidad. Por consiguiente, mientras la velocidad se acrece, durante tiempos iguales, según la sucesión simple de los números, los espacios recorridos, durante estos tiempos, reciben incrementos según la sucesión de los números impares, a contar de la unidad". Galileo (1638, p336) Corolario del teorema II Libro IV.

Se observa en su demostración un carácter deductivo heredado de los *Elementos* de Euclides. En el trabajo con las cantidades continuas se encuentra un procedimiento para la toma de datos y se realiza un proceso de discretización. En su trabajo argumenta como "*lo cuadrático*" está vinculado a un proceso de variación de cantidades analizadas desde un punto de vista aritmético. Por otro lado, Galileo afirma que la parábola es un punto en movimiento con lo que deja entrever las cónicas como objetos matemáticos que, en relación con el movimiento, permite identificarlas como el producto de la trayectoria de un cuerpo que se mueve de acuerdo a una ley, patrón o causas, por ello surgen lo modelos que pretenden explicar los fenómenos presentados.

Esta afirmación acerca de la parábola deja ver una representación del movimiento en la que queda claro que la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades. Así por ejemplo, una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, sino que ésta debe considerar las variables en juego en una relación de dependencia que las determina siendo para este caso importante en la medida en que da cuenta de la variación (o razón de cambio) de la variación

FUNCIONES

En la revisión de la literatura se puede observar que el concepto de función como tal, es un concepto con unas raíces muy antiguas pero con una consolidación muy reciente. Uno de los primeros en cimentar formalmente al concepto de función es Newton. Este matemático y físico utiliza el álgebra simbolica y la geometría analítica para construir el cálculo dieferencial. En su obra *Los Principia* se observa *"lo cuadrático"* asociadas a fenómenos naturales con un crarácter mas funcional aunque no se hiciera explícito, pues esta obra es una muestra de quien concibe y formula expresiones cuadráticas y a la vez formula expresiones que son sometidas a un estudio en esta nueva rama de las matemáticas, a saber El Cálculo.

En la Proposición XXX Problema XXII. Newton (1687, p.345) se observa una relaciòn entre "*lo cuadrático*" y la geometria analitica: "*Descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada*". Para la demostración de esta proposición ubica un plano cartesiano muy primitivo, que solo consta de la intersección de dos rectas en ángulo recto, los ejes no están segmentados por cantidades numéricas. Sobre dicho plano traza curvas que permiten ver claramente la proposición en el sentido en que para <u>cualquier</u> tiempo, éste adopta una cualidad variable, y para ésta le corresponde un lugar geométrico (un punto en el plano). En este momento se presenta un paso al concepto de función en tanto es posible hallar una relación para cualquier instante (variable) y un punto de la parábola (variable), y el estudio analìtico de la parábola está dada por una ecuación de segundo grado.

En el trabajo de Newton se observa que las situaciones cuadráticas son estudiantes en el plano, se representan mediante una expresión algebraica para después interpretarse como un puntos que relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad. Una vez analizado el comportamiento de la curva construida por medio de una ecuación cuadrática, se puede distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades que posteriormente fue llamada función cuadrática

CONSIDERACIONES FINALES

El rastreo bibliográfico realizado nos permite mostrar diversos elementos que historicamente fueron cimentando la noción de función cuadrática. Vale la pena reflexionar sobre el papel que estos elementos tienen a la hora de pensar una didáctica del concpeto de función cuadrática.

En el desarrollo histórico se observa que el concepto de función y en particular la función cuadrática estuvo vinculado a la modelización de fenómenos de variación y cambio, lo cual soporta la idea muy generalizada de incluir este proceso en los currículos escolares en todo el mundo.

En la construcción epistemológica del concepto de función cuadrática se pueden esgrimir obstáculos, algunos de los cuales fueron necesarios superar para su ulterior desarrollo. Algunos de ellos son:

- Concepción de cuadrado meramente como área.
- No concepción de los números negativos.
- Matemática concreta que dificulta la abstracción para ser representada.
- No trascender del álgebra geométrica.
- Instrumentos de medición de fenómenos naturales ineficientes. (Galileo).

La reflexión histórica sobre estos obstáculos, permiten al maestro comprender parte de la realidad del aula de clase.

La revión histórica muestra *"lo cuadrático"* como una sinergia entre geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, teniendo como objeto de estudio el movimiento. Vale la pena rescatar parte de esta sinergia en el aula de clase, de tal manera que se presente una concepción de *lo cuadrático* desde diversas interpretaciones y contextos.

REFERENCIAS

Boyer, C., 1969, *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza editorial.

Euclides (Sin año). *Los Elementos*: Libros I- VI. Madrid : Planeta de Agostini.

Galileo, G .1638, *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Traducción. Buenos Aires: Editorial Losada.

Kline, M., 1999, *El pensamiento Matemático en la antigüedad a nuestros dias* Madrid: Alianza editorial, Vol I y II.

Newton, I.1687 *Principios Matemáticos de la filosofía natural*. Traducción. Madrid: Editora Nacional.

Salkind, N., 1999. *Métodos de Investigación,* México: Prentice Hall