

# Procesos de objetivación en los pensamientos algebraico, multiplicativo y aditivo

Gómez, John – Mojica, Javier – Pantano, Oscar  
johngomezt@gmail.com – javiermojicav@hotmail.com  
leonardopantanom@gmail.com

Secretaría de Educación Distrital, (Colombia)

Universidad La Gran Colombia, (Colombia)

Universidad Konrand Lorenz, (Colombia)

## Resumen

Se plantea un curso teórico práctico para docentes investigadores que tiene como objetivo principal contribuir a ampliar la mirada de los signos que dan cuenta del pensamiento matemático, particularmente en la resolución de tareas en contextos algebraicos, aditivos y multiplicativos. Para tal fin se utilizará el análisis realizado de la actividad matemática de un grupo de estudiantes colombianos cuando resuelven tareas asociadas a la generalización de patrones y a tareas de tipo aditivo y multiplicativo. Tales tareas hacen parte de los trabajos de maestría de los cursillistas Gómez (2013), Mojica (2014) y Pantano (2014). El propósito del curso se capitaliza al proponer a los asistentes un ejercicio de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando resuelven tareas inmersas en los contextos ya mencionados. Para tal fin se usan algunos elementos de la teoría cultural de la objetivación como categorías de análisis.

**Palabras clave:** Teoría de la Objetivación, Semiótica Cultural, Pensamiento algebraico, Pensamiento aditivo, Pensamiento multiplicativo.

## 1. Temáticas

La temática principal del curso se inscribe en la perspectiva semiótica cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuesta por Radford (2006) en la *Teoría Cultural de la Objetivación* (TCO). Dentro de esta perspectiva se resalta la importancia de reconocer en la actividad matemática de los estudiantes una serie de acciones ligadas al uso de artefactos y signos tales como gestos, expresiones lingüísticas y movimientos corpóreos. Dichas acciones, según Radford (2006, 2008), dan cuenta del desarrollo del pensamiento matemático y paradójicamente suelen ser ignoradas por la mayoría de los profesores de matemáticas. No obstante, algunos investigadores se han interesado por estudiar estas acciones que permiten reconocer la manifestación y evolución del pensamiento matemático, centrando su interés en la identificación de estas acciones movilizadas por los estudiantes al resolver tareas en contextos algebraicos y recientemente esta teoría ha sido abordada en otros contextos diferentes al algebraico, como por ejemplo en el contexto de lo multiplicativo y de lo aditivo.

## 2. Objetivo

El objetivo es reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva semiótica cultural, a través del análisis de algunos ejemplos en los cuales se puede evidenciar la manifestación y evolución del pensamiento matemático por medio de las acciones desplegadas, por los estudiantes, cuando se involucran en la Labor de resolver tareas de tipo algebraico, multiplicativo y aditivo. En dichas acciones es posible reconocer y analizar los signos utilizados por los alumnos así como las expresiones lingüísticas y corporales movilizadas por ellos.

## 3. Referentes teóricos básicos

Situados en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, en la cual asumimos los preceptos de la perspectiva histórico

cultural y puntualmente en la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) (Radford, 2006a, 2013a, 2014); será necesario considerar los aspectos fundantes de la teoría y la manera en que éstos tienen su aparición en el escenario educativo. La TCO, como teoría de orden fenomenológico (Radford, 2014) intenta dar cuenta de los procesos de enseñanza aprendizaje planteados como procesos histórico culturales que son considerados desde una postura filosófica a partir de los planteamientos hegelianos del materialismo dialéctico. En tal sentido la TCO considera la terna: general, individual y particular, como marco explicativo de las maneras en que conocemos o elaboramos significados de los objetos de nuestra cultura a través de la actividad o labor (el particular) que media entre ese saber (general) y las instancias o actualizaciones que hacemos del mismo (individual). Ver figura 1.

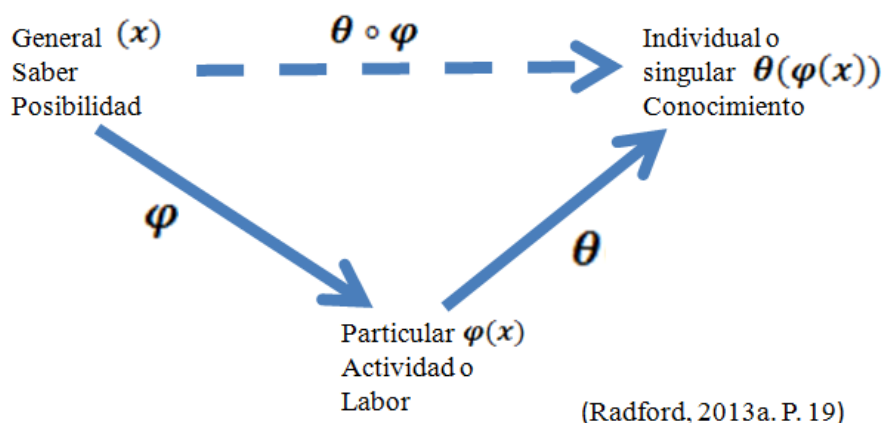


Figura 1. Postura filosófica de la TCO desde una postura Hegeliana

Radford (2013a) nomina las relaciones de esta terna. Con la relación  $\varphi$  refiere a nuestras intenciones pedagógicas, aquellas que son consideradas en el diseño de tareas, en las cuales debe considerarse el objeto, el objetivo y el tipo de tareas con las cuales se pretende instanciar o actualizar el saber.

La relación  $\theta$  define las posibles ocurrencias de la actividad o labor como un único e irrepetible evento que puede tomar distintas formas según sea la relación  $\varphi$ , que transita por estados en los cuales se desarrolla la actividad o labor.

Para explicitar las anteriores relaciones y las maneras en que operan dentro de la teoría, a continuación esbozamos los principios fundamentales que son considerados como dimensiones: Dimensión ontológica (el saber), dimensión epistemológica (el conocimiento), dimensión educativa (la enseñanza-aprendizaje) y la dimensión ética (el individuo). Adicionalmente la teoría acude a dos categorías conceptuales fundamentales. Radford (2014) señala que el principio fundamental de la teoría es la idea de labor:

El principio central de la teoría de la objetivación está basado en el materialismo dialéctico hegeliano y su idea fundamental de la constitución dinámica y recíproca entre ser y cultura. Los individuos crean la cultura y la cultura crea sus individuos. Para Hegel (2001), la mutua constitución de los individuos y la cultura ocurre en la labor o trabajo (p.137).

Por otro lado, en esta teoría se amplía la idea de *signo*, no sólo como medio de representación de los objetos matemáticos sino también como elemento constitutivo del pensamiento y de la actividad, introduciendo así el concepto de *Medio Semiótico de Objetivación* entendido como un recurso que intenta comunicar algo, que hace evidente una intención. Un ejemplo de esto lo constituyen aquellos objetos, herramientas, recursos lingüísticos y señales que utilizan intencionalmente las personas en la construcción social de significados, con el propósito de lograr una conciencia estable, hacer evidente una intención y realizar una serie de acciones para alcanzar el objetivo con el cual se encuentra impregnada la actividad matemática de los estudiantes. Para Radford (2010a, 2010b) los medios semióticos de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino mediadores de los actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes. De acuerdo con Radford (2010b), los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median.

De acuerdo con Radford (2006a, 2006b, 2008, 2010), D'Amore (2006), Wertsch (1988), los signos juegan un rol importante en tanto son los elementos que no sólo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que hacen parte constitutiva de la actividad y de los procesos sociales. En el marco de la TCO se precisan los procesos sociales por medio de los cuales los sujetos aprenden a pensar de acuerdo a modos culturales ya establecidas,

de esta manera se configura la idea de *procesos de objetivación* que Radford (2006b, 2008) caracteriza como los procesos sociales a través de los cuales los estudiantes comprenden la lógica cultural con la que los objetos del conocimiento se han dotado, y se familiarizan con su constitución histórica de las formas de acción y pensamiento. Particularmente se distinguen los procesos de objetivación: contracción semiótica e iconicidad.

En el contexto del pensamiento algebraico, en Radford (2012) se postula que en el álgebra para operar en lo desconocido o en cantidades indeterminadas (por ejemplo, variables, parámetros) es necesario pensar de forma analítica. Es decir, se tiene que considerar las cantidades indeterminadas como si se tratara de algo conocido, como si fueran números específicos. Es decir, las características principales del pensamiento algebraico se centran en la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Es en este contexto en el que los avances investigativos realizados por Radford (2010, 2011, 2012a, 2012b), Villanueva (2012); Vergel (2012), Gómez (2013) muestran que en las tareas asociadas a generalización de patrones existen estratos de generalidad caracterizados de acuerdo a los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes. Estos estratos son presentados por Radford (2010) por medio de una tipología de formas de pensamiento algebraico. Tal tipología se presenta a continuación:

- El *Pensamiento Algebraico Factual*. Aquí la indeterminación queda implícita en palabras y gestos y el ritmo constituye la sustancia de la semiótica en los estudiantes en un proceso llamado fórmulas en acción.
- El *Pensamiento Algebraico Contextual*. Aquí la indeterminación se convierte en un objeto explícito del discurso. Los gestos y ritmos son reemplazados por deícticos lingüísticos, adverbios, etc.
- El *Pensamiento Algebraico Simbólico*. Aquí las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

Esta tipología junto con los medios semióticos de objetivación movilizados en cada uno de éstos brindan información acerca del desarrollo del pensamiento algebraico permitiendo así, realizar una caracterización de éste, como afirma Arzarello (2006) los medios semióticos de objetivación

emergen como aspectos importantes en la constitución y manifestación del pensamiento matemático. Teniendo en cuenta la información brindada por los medios semióticos de objetivación, una parte de la comunidad de investigadores se ha interesado por indagar si estos (los medios semióticos de objetivación) se manifiestan en otro tipo de pensamiento distinto al algebraico, tal es el caso del pensamiento numérico, específicamente a las tareas asociadas a lo multiplicativo y lo aditivo.

En cuanto a lo que se ha denominado pensamiento multiplicativo existen diversos pronunciamientos al respecto, algunos referidos a las dificultades de los estudiantes en la resolución de tareas de multiplicación y división, a la estructura semántica y sintáctica de los problemas propuestos, a su relación con el razonamiento proporcional, entre otras. Sin embargo aún no se tiene una caracterización de la naturaleza del pensamiento multiplicativo, de sus elementos constitutivos, de los medios semióticos de objetivación, ni de los estratos de generalidad que lo caracterizan. La ausencia de una caracterización del pensamiento multiplicativo que tenga en cuenta aspectos socioculturales y que incluya los estratos de generalidad que lo constituyen legítima la necesidad de identificar los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, de manera que tales hallazgos permitan acercarnos a la comprensión de la semiótica de lo multiplicativo. En tal sentido Mojica (2014) realiza un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de sexto grado de educación básica (10 - 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Del análisis de los datos obtenidos en la investigación, este autor plantea una hipótesis con relación a los procesos de objetivación y los estratos de generalidad presentes en el pensamiento multiplicativo; la hipótesis apunta a afirmar que en este pensamiento están presentes categorías similares a las postuladas en las investigaciones sobre el pensamiento algebraico.

Finalmente, en el caso del pensamiento aditivo el interés de los investigadores ha centrado la atención en análisis teóricos relacionados con la clasificación de los tipos de problemas que se pueden proponer en el aula (transformación, comparación, entre otros), el tipo de incógnita por la cual se puede indagar (estado inicial, transformación o estado final) y la identificación de los criterios semánticos a través de los cuales se pueden analizar los problemas de enunciado verbal (Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal.

M., Guerrero, F., Lurduy, O., Romero, J., Rojas, P., Mora, L., & Barón, C., 1999; Castro, E., Rico, L., & Castro, E., 1995; Vergnaud. 1991). Sin embargo, dada la importancia que tiene el desarrollo del pensamiento aditivo en el desarrollo del pensamiento numérico es indispensable generar investigaciones que contribuyan a la caracterización de la manera cómo piensan los estudiantes y las acciones realizadas por estos que permiten dar cuenta del desarrollo de este pensamiento. La investigación reportada en Pantano (2014) describe y analiza los medios semióticos y los procesos de objetivación con el propósito de hacer una aproximación a la caracterización del pensamiento aditivo tomando como referencia, al igual que en pensamiento multiplicativo, los constructos teóricos desarrollados en los estudios asociados al pensamiento algebraico.

## 4. Propuesta de actividades

Teniendo los referentes investigativos en el campo del pensamiento algebraico (Gómez, 2013), en el pensamiento aditivo (Pantano, 2014) y en el pensamiento multiplicativo (Mojica, 2014); interesa en el presente curso presentar ejemplos de análisis de la actividad matemática de un grupo de estudiantes cuando se enfrentan a tareas en contextos de generalización de patrones, en contextos aditivos y en contextos multiplicativos. Esto con el objetivo que los asistentes puedan conocer los elementos de la TCO y utilizarlos como herramienta en un ejercicio de análisis que se propone durante el desarrollo del curso.

El propósito de tal ejercicio es que los asistentes realicen una observación y lleven a cabo un análisis minucioso de la actividad matemática de los estudiantes al enfrentarse a tareas matemáticas en diversos contextos. Dicho análisis comprende la convergencia de diversas disciplinas teóricas como la psicología y la sociología aportando a la literatura en el campo de la educación matemática ofreciendo algunos hallazgos que se fundamentan en la perspectiva de análisis multimodal del pensamiento (Arzarello, 2006; Manghi, 2010). Es decir, se tiene en cuenta una concepción multimodal de la cognición humana en la que la acción de los estudiantes se analiza más allá de la producción escrita u oral, se tiene en cuenta la movilización o emergencia de recursos semióticos que permiten objetivar el saber y que van

de la mano con la elaboración social de significados que es propia de una perspectiva sociocultural. En otras palabras, dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.). Ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesticado por los estudiantes será analizado de manera aislada. Estos recursos o modalidades incluyen también comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos y movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009). De esta manera, el curso es planteado para desarrollarse en tres sesiones que se describen a continuación:

**Sesión 1.** Se propone a los asistentes resolver un conjunto de tareas asociadas al pensamiento algebraico de manera que en grupos de tres asistentes, dos de ellos resuelven las tareas propuestas mientras que el tercer integrante asume el rol de observador, recopilando en un documento los aspectos que considere relevantes frente al proceder de los otros dos miembros de su grupo. Posteriormente se presenta a los participantes los videos correspondientes a la actividad matemática desplegada por estudiantes de grado décimo frente a estas mismas tareas, con sus respectivos análisis y a partir de éstos provocar la reflexión en torno a las herramientas de análisis de la TCO.

**Sesión 2.** Se propone a los asistentes analizar dos videos correspondientes a la actividad matemática desplegada por un grupo de estudiantes al resolver tareas de tipo aditivo y multiplicativo. A partir de los análisis realizados, se profundiza en otras herramientas provistas por la teoría, de manera que dichas reflexiones contribuyan a ampliar la perspectiva frente a los modos de ser y saber de los niños frente a la solución de tareas matemáticas.

**Sesión 3.** A partir de los hallazgos y reflexiones de la sesión anterior se presentan las categorías teóricas propuestas en el pensamiento algebraico y se exponen avances en la extrapolación de estas categorías a otros dominios del pensamiento matemático en general, invitando así a los participantes a continuar enriqueciendo la discusión académica en torno a los posibles aportes de la teoría al proceso de resignificación de las formas en que los estudiantes se acercan al significado histórico que como cultura hemos atribuido a los signos que se utilizan en las matemáticas.



## Referencias bibliográficas

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking*, 267-299.
- Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, J., Romero, J., Rojas, P., Mora, L., & Barón, C. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Bogotá. Grupo Editorial Gaia.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.
- Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá-Colombia.
- Manghi, D. (2009). *Coutilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. multimodalidad e intersemiosis en el discurso pedagógico de matemática en 1año de enseñanza media*. Tesis doctoral no publicada. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
- Mojica, J. (2014). *Procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Distrital Francisco José de caldas. Bogotá, Colombia.
- Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129
- Radford, L. (2008). *Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts*. *ZDM*, 40(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007 0061-0
- Radford, L. (2010a). *Elementary forms of algebraic thinking in young students*. Paper presented at the Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Radford, L. (2010b). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities*. *PNA*, 4(2), 37-62.

- Radford, L. (2011). *Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking*. Paper presented at the Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education.
- Radford, L. (2012a). *Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues*. Regular lecture ICME 12, Seoul.
- Radford, L. (2013a). *On the development of early algebraic thinking*. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2013b). *Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning*. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44 doi:<http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19>
- Vergel, R. (2012). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Proyecto doctoral, Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C. Colombia.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.
- Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. Colombia.
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Versión original: Vygotsky and the social formation of mind, Cambridge: Harvard University Press, 1985.