

# Una aproximación a las concepciones del infinito de estudiantes de grado once desde la Teoría APOE

**María Inés Cano Villamil**

dma\_mcano379@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)

**Liliana Carolina Delgado García**

dma\_ldelgado494@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)

**Jhon Alexander Gómez Aponte**

dma\_jgomez946@pedagogica.edu.co

Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)

## Resumen

En esta experiencia de aula se reportan algunos resultados del trabajo realizado en el marco del curso de Didáctica de la Matemática de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, Colombia, para estos efectos inicialmente se presentan algunos referentes teóricos propios de la teoría APOE que fueron utilizados para analizar los resultados obtenidos con la aplicación de la paradoja de las pelotas de tenis, la cual se desarrolló con la intención de hacer una aproximación a las concepciones que tienen los estudiantes de grado once del Colegio Integrado Eduardo Caballero Calderón sobre el concepto de infinito.

**Palabras clave:** APOE, Acción, Proceso, Objeto, Infinito actual, Infinito potencial, paradoja.

## 1. Introducción

En el curso “Didáctica de la matemática” que ofrece la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, Colombia se propuso desarrollar un trabajo enfocado en la profundización de una aproximación teórica en didáctica de la matemática, para el caso, la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Adicionalmente, se planteó la aplicación y análisis de una actividad ya trabajada desde dicha teoría, con el fin de hacer evidentes algunos conceptos y características propias de la misma.

En este sentido, se quiso evidenciar, a partir de algunas producciones de los estudiantes del grado 11° del Colegio Integrado Eduardo Caballero Calderón, ubicado en la ciudad de Bogotá, algunos aspectos relacionados con el concepto de infinito, partiendo de la proposición y solución de la paradoja de las pelotas de tenis, la cual se enuncia a continuación:

Supón que tienes tres cajas con una capacidad ilimitada, nombradas de la siguiente manera: Caja A (donde están todas las pelotas), caja B y caja C, con un botón dispensador que, cuando se presiona, mueve pelotas de la caja A a la caja B. La caja A tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis, numeradas 1, 2, 3, ... Medio minuto antes del mediodía, se presiona el dispensador y las pelotas números 1 y 2 pasan a la caja B e instantáneamente la pelota número 1 pasa de la caja B a la caja C. Un cuarto de minuto antes del mediodía, se presiona nuevamente el dispensador y las pelotas números 3 y 4 caen a la caja B y automáticamente la pelota de menor denominación pasa a la caja C. En el siguiente paso, es decir, en  $\frac{1}{8}$  de minuto antes del mediodía, se presiona el dispensador y las pelotas números 5 y 6 pasan de la caja A a la caja B e inmediatamente la pelota de menor denominación pasa a la caja C. Si el modelo señalado continúa, ¿cuál es el contenido de la caja B y la caja C al medio día?

En la cual, en primera medida, se puede ver que según Roa-Fuentes (2012), citado por Roa-Fuentes y Oktac (2014), cuando una persona aborda este problema existe la posibilidad que dé dos tipos de respuestas, que dependen de la forma como se le está dando solución:

Solución B (una mirada potencial): Bajo esta respuesta, se puede concluir que, al llegar al medio día, las cajas B y C contendrán la misma cantidad de pelotas, dado que al realizar el proceso iterativo mencionado en el problema se evidencia, al realizar una cantidad finita (que puede ser muy grande) de movimientos, que las cajas siempre tienen el mismo número de pelotas.

Solución A (una mirada actual): Esta solución se evidencia cuando se diga que todas las pelotas, al llegar al medio día, se encontrarán en la caja C puesto que, para cualquier pelota, será posible determinar el instante de tiempo en el cual pasa de la caja B a la caja C.

Ahora, desde un análisis teórico, en el desarrollo de este problema es posible identificar 3 procesos: Iteración sobre los números naturales, el movimiento de las pelotas de tenis, y el transcurrir del tiempo (Dubinsky, Weller, Stenger y Vidakovic, 2008, citado por Roa-Fuentes y Oktac, 2014). Desde esta perspectiva, según lo expuesto por Dubinsky y otros (2008), citado por Roa-Fuentes y Oktac (2014), se hace necesario generar dos procesos que surgen a partir de la coordinación entre el conjunto de los números naturales y el transcurso del tiempo, así como el proceso de iteración en  $\mathbb{N}$  y el movimiento de las pelotas, para luego coordinar un único proceso que permitirá concebir al infinito como un objeto.

Teniendo en cuenta lo anterior, lo que se buscó con la aplicación de la paradoja de las pelotas de tenis fue evidenciar si realmente los estudiantes logran coordinar todos los procesos señalados por Roa y Oktac (2014) mencionados anteriormente.

En concordancia con lo propuesto hasta ahora, se espera que el estudio presentado sirva como herramienta para poder hacer una aproximación a las diferentes concepciones que pueden surgir en el aula del concepto de infinito, esto a la luz de algunos de los principios y aspectos metodológicos propuestos por la teoría APOE.

## 2. Referente conceptual

La teoría APOE establece como un principio fundamental que “la construcción de conocimiento pasa por tres etapas básicas: Acción, proceso y objeto” (Trigueros, 2005, p. 7) entendiéndose, acción como una

transformación de un objeto que se percibe de forma externa, la cual se lleva a cabo mediante una reacción a una instrucción que proporciona información sobre los pasos que se deben seguir (Trigueros, 2005); a medida que una acción es interiorizada, por medio de la repetición de la acción y la reflexión sobre la misma, ésta ya no es manejada por agentes externos, dado que se transforma en una construcción interna definida como proceso, lo cual indica que el sujeto puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de la transformación, además que puede utilizar este proceso para obtener nuevos procesos, ya sea mediante la coordinación o la reversión (Meel, 2003); cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como *encapsulación* para convertirse en un objeto (Meel, 2003, p. 245).

Para los autores Dunbinsky, Weller, McDonald y Brown (2005), citado Roa-Fuentes y Oktac (2014), el infinito potencial es entendido como la concepción del infinito como un proceso, el cual parte de la repetición de una serie de pasos que en un principio corresponden a una concepción acción, lo cual es finalmente interiorizado en un proceso; en cuanto al infinito actual, este corresponde al objeto obtenido a partir de la encapsulación de este proceso.

De otra parte, la actividad aplicada es una adaptación de la segunda versión de la paradoja de las pelotas de tenis expuesta por Falk (1994), la cual como ya se mencionó anteriormente da la posibilidad de dar dos posibles soluciones, la primera se ubica dentro de la concepción del infinito potencial y que surge del observar la forma como se modifica el contenido de los botes a medida que transcurre el tiempo. En cuanto a la segunda solución, se corresponde con la concepción de infinito actual, dado que se debe aceptar que el experimento termina y que el resultado obtenido no se asemeja a lo obtenido mediante el proceso de iteración finito. Ahora, como se expuso anteriormente, esta paradoja permite identificar tres procesos básicos (Iteración sobre los números naturales, el movimiento de las pelotas de tenis, y el transcurrir del tiempo), el proceso transcurrir del tiempo, que corresponde a “la subdivisión de un intervalo de tiempo un minuto antes del medio día” (Roa-Fuentes y Oktac, 2014, p. 91), se coordina con el proceso iteración sobre los números naturales, cuando se establece que a cada número natural le corresponde un instante de tiempo. Por otro lado, los procesos iteración sobre los números naturales y movimiento de las pelotas de tenis, se coordinan cuando el sujeto logra evidenciar que en cada paso se

está produciendo el movimiento de tres pelotas. Mediante la coordinación de los anteriores procesos se crean dos nuevos procesos, los cuales se coordinan en un nuevo proceso que permite establecer que para cada instante de tiempo dos pelotas se mueven del bote contenedor (A) al bote B y la pelota de menor denominación se mueve al bote C (Roa-Fuentes y Oktac, 2014). Cabe resaltar que, “en esta paradoja, la encapsulación del proceso resultante se motiva por la pregunta: *¿cuál es el contenido del bote B y del bote C al medio día?*” (Roa-Fuentes y Oktac, 2014, p.92).

### 3. Descripción de la experiencia

Con el fin de desarrollar la actividad propuesta se tuvo en cuenta la aplicación de la misma en estudiantes de grado once, dado que en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se estipula que los estudiantes de este grado deben estar en capacidad de, entre otras cosas, utilizar técnicas de aproximación en procesos infinitos, y esto tiene relación directa con los procesos involucrados en la tarea propuesta, que se mencionaron anteriormente.

Teniendo en cuenta lo anterior, en relación con la actividad es necesario decir que esta fue propuesta para ser solucionada, en un primer momento, de manera individual y luego de esto se procedió a hacer una socialización de las producciones logradas por los estudiantes, en la cual se inquirió respecto a las respuestas dadas por ellos en aras de hacer una identificación inicial de algunos elementos de los procesos llevados a cabo por ellos en la solución del problema.

De otra parte, en el desarrollo de la actividad propuesta, se les entregó a los estudiantes una hoja en blanco en la cual ellos consignaron el trabajo realizado y algunas de sus conclusiones, esto con la intención de tener evidencias con las cuales desarrollar el análisis que se presentará posteriormente.

## 4. Reflexiones y conclusiones

A partir de la aplicación de la actividad, los estudiantes elaboraron representaciones gráficas (Figura 1) en donde se puede observar que intentaron construir una tabla donde se relacionara el transcurrir del tiempo y el movimiento de las pelotas a través de la caja B y C, a partir de lo cual se puede concluir que hay una aparente coordinación entre los tres procesos básicos anteriormente mencionados: Iteración en los números naturales, transcurrir del tiempo y movimiento de las pelotas (Dunbinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005, citado Roa-Fuentes y Oktac, 2014); sin embargo, se puede evidenciar que esto se logra, pero en una “versión finita”, en este sentido, llegaron a resultados como: El contenido en la caja B será igual al contenido de la caja C (Figura 2), sin embargo, a pesar que hacían referencia a una misma cantidad de pelotas no se hace alusión al infinito, dado que ellos se guiaron de los ejemplos finitos que se podían plasmar en el papel.

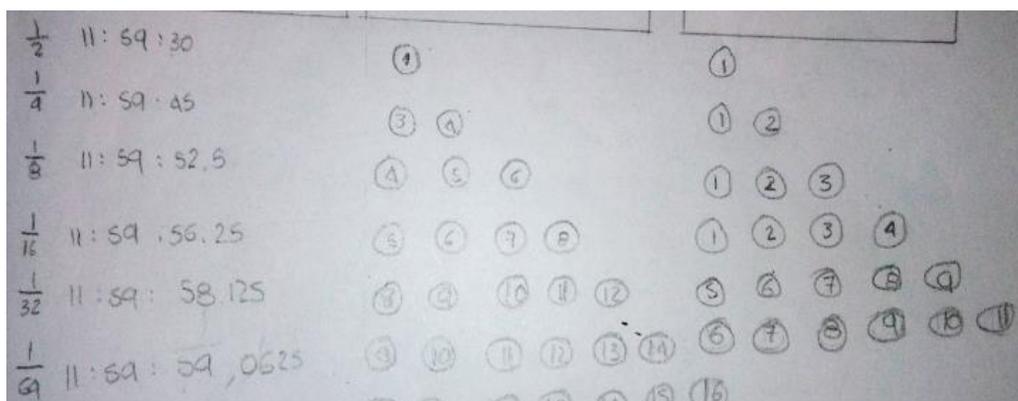


Figura 1. Organización de datos en forma aparentemente tabular

Conclusión: Al medio día la caja B y C terminaron con la misma cantidad de pelotas, NO seran infinitas por su intervalo de tiempo ya que es exacto el tiempo indicado.

Figura 2. Conclusión a partir del proceso de iteración finita

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se evidencia que los estudiantes asignan a un instante de tiempo el movimiento de tres pelotas (Roa-Fuentes y Oktac, 2014), pero no asocian esto con el concepto de infinito, dado que hacen referencia a que como el tiempo debe acabar la cantidad de pelotas debe ser finita. Es decir, tienen la concepción de que para que la cantidad de pelotas

sea infinita debe transcurrir una eternidad, lo cual para ellos no es coherente pues el movimiento se da en un lapso determinado (Figura 3).

Figura 3. Relación cantidad de pelotas y tiempo

Ahora, mediante el ejercicio de replicar los movimientos que se dan para cada instante de tiempo, los estudiantes hacen un acercamiento al infinito desde el proceso transcurrir del tiempo (Figura 4), pues a través de la repetición, evidencian que por más cálculos que se realicen no es posible alcanzar el mediodía, lo que los lleva pensar en un número muy grande.

Figura 4. Proceso tiempo y el infinito

A pesar de los resultados mencionados anteriormente, también se vio que algunos estudiantes no lograron imaginar la situación propuesta, en la medida que no lograron concebir que el problema parte del planteamiento que la cantidad de pelotas es infinita (Figura 6) lo cual, en algunos casos, redujo la posibilidad de ver la concepción de infinito que ellos manejan.

Figura 5. Dificultad para visualizar el problema

Con base en el análisis desarrollado, a manera de conclusión se puede afirmar que los estudiantes, en términos generales, no hacen una alusión explícita al concepto de infinito, sin embargo, sí se ven algunos acercamientos implícitos a él, los cuales dejan ver, teniendo en cuenta los referentes teóricos anteriormente mencionados, que los estudiantes llevan a cabo los siguientes procesos:

*Iteración aparentemente finita:* A pesar de que ninguno de los estudiantes llegó a hacer referencia textual al hecho que el proceso se podría repetir una

cantidad infinita de veces, sí se puede ver que ellos aluden a que el proceso se hace de una forma repetitiva, y después de hacer muchos ensayos llegaron a concluir que se hacía necesario realizar el procedimiento una gran cantidad de veces (Roa-Fuentes y Oktac, 2014), dejando ver que hay presente un proceso de iteración aparentemente finito.

*Transcurrir finito del tiempo:* Dentro de los resultados mencionados también se evidenció que los estudiantes no lograron ver el hecho que el problema conlleva a una subdivisión infinita de un intervalo de tiempo, lo cual negó la posibilidad de evidenciar que el planteamiento de la situación lleva consigo una iteración infinita (Roa-Fuentes y Oktac, 2014), sin embargo, sí hubo un acercamiento a esto, en la medida que, como se mencionó anteriormente, sí se vio que es posible reiterar el proceso una cantidad muy grande de veces antes de llegar al mediodía.

En concordancia con lo anterior, se puede afirmar que no se pudo evidenciar, de forma explícita, los procesos mencionados en el presente documento, sin embargo, sí se pudo ver algunas aproximaciones a ellos en su forma finita, en la medida que, como ya se mencionó, los estudiantes no lograron evidenciar los diferentes tipos de infinitos presentes en el planteamiento de la paradoja, esto debido a que, como se puede concluir, no se vieron muestras evidentes de que los estudiantes logran imaginar el infinito.

## Referencias bibliográficas

- Falk, R. (1994). Infinity: A cognitive challenge. *Theory and Psychology*, 4(1), pp. 35-60.
- Meel, D. (2003, noviembre) Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista latinoamericana de investigación en matemáticas educativa*. pp. 221-271.
- MEN, (2006) *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia.
- Roa Fuentes, S. Oktac, A. (2014, abril 1). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto. *Grupo Santillana Mexico*. pp. 73-101.
- Trigueros, M. (2005, abril 1). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior Educación Matemática. *Grupo Santillana México*. pp. 5-31.