Estructura de Generalización Algebraica de patrones: Estudio de caso con el triángulo de Sierpinski

Santiago Arias Rivera
dma_sariasr722@pedagógica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Alexander Chaves Barbosa
dma_fachavesb614@pedagógica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Sergio Niño Vega
dma_saninov181@pedagógica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)
Michael Pinzón Rodríguez
dma_mspinzonr720@pedagógica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Bogotá, Colombia)

Resumen

Radford (2013), aborda tres problemas que se evidencian en todo proceso de generalización, estos son el fenomenológico, el epistemológico y el semiótico, estos problemas se manifiestan de manera implícita en la estructura de generalización algebraica de patrones (definida en un ciclo de seis secciones por Radford). La secuencia que Radford presenta en dicha estructura, es justo el camino que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a tareas sobre generalización. Reportamos una experiencia basada en el Triángulo de Sierpinski, con una joven de grado undécimo, en donde se desarrolla el proceso de la estructura de generalización algebraica de patrones. La tarea fue planteada mostrando la primera, segunda y tercera iteración, para que apoyada en la visualización la estudiante captara la regularidad presente. A partir de las respuestas suscitadas en la estudiante y con la orientación del maestro, se logró identificar de manera natural cada paso de la estructura.

Palabras clave: Determinaciones sensibles, estructura, generalización de patrones, potenciación, problema.

1. Introducción

En el marco de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia al interior del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo, ofertada para el primer semestre de 2016; se ha llevado a cabo la propuesta de implementar y presentar a estudiantes de diferentes edades, situaciones en las que pueda evidenciarse algún proceso de generalización. De manera precisa se presentó la situación del **Triángulo de Sierpinski**, construido por el matemático polaco Waclav Sierpinski en el año 1919.

La propuesta se llevó a cabo con una estudiante de grado 11° de un colegio público de la localidad de Chapinero, en la ciudad de Bogotá. Durante la implementación, inicialmente se mostró a la estudiante los tres primeros términos del triángulo de Sierpinski, con el fin de que a partir de ellos, encontrara la generalización del patrón y simultáneamente mostrar en el proceso llevado a cabo por ella, la **estructura de generalización algebraica de patrones** propuesta por Radford (2013), donde implícitamente se presentan los problemas fenomenológico, epistemológico y semiótico. Cabe destacar la importancia de la labor docente en la elaboración de preguntas, que orientaron el proceso llevado a cabo por la estudiante para establecer la generalidad de la situación planteada.

2. Referente conceptual

Los tres problemas de la generalización algebraica presentados por Radford (2013) p.p 3, en su artículo de investigación en didáctica de la matemática los cuales son "*el problema fenomenológico planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles […] el epistemológico consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto y el semiótico o de denotación que resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado*".

3. Descripción de la experiencia

La implementación de la situación se realizó con una estudiante de grado 11°. De manera inicial se presentó a la estudiante los tres primeros términos de la secuencia, sin mostrar su proceso de construcción.

A continuación, el maestro a través de le pregunta *¿qué vez?* Impulsa a la estudiante a observar diferencias y similitudes entre términos dados (Figura-1). La estudiante responde *todos son triángulos*. Luego el maestro pretende enfocar las determinaciones sensibles de la estudiante, con el objetivo de centrar su atención en la cantidad de triángulos blancos, inquiriendo a la estudiante acerca de la cantidad de triángulos blancos que debe haber en el término 4.

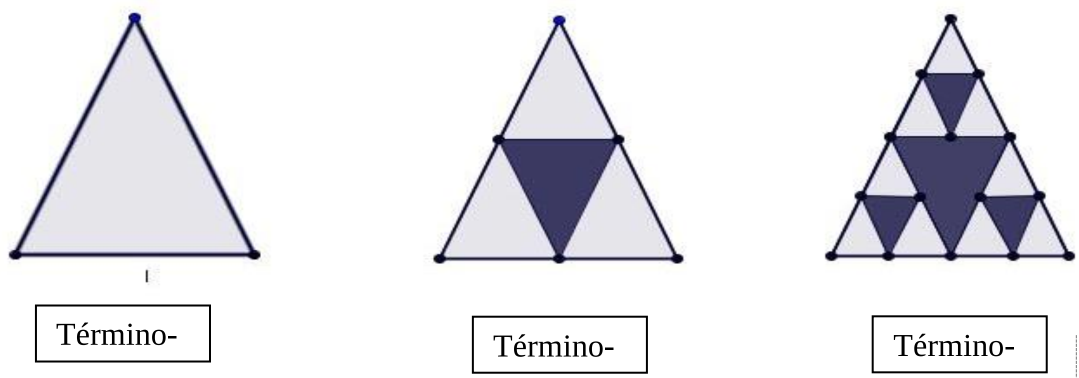


Figura 1. Tres primeros términos dados

La estudiante cuenta la cantidad de triángulos blancos que hay en cada una de los tres términos dados (1, 3, 9 respectivamente) e inmediatamente declara: "*¡Ah! son múltiplos de tres",* sin embargo, aún no identifica cuántos triángulos blancos hay en el término 4. Ella identifica una característica común (múltiplos de tres), pero aún no la abduce o la relaciona con el número del término.

Posteriormente, la estudiante centra su atención en la manera de conseguir triángulos blancos considerando el término anterior, puesto que manifiesta *"Para pasar de esta a esta* **(haciendo referencia a los términos uno y dos respectivamente)** *se sumaron dos, para pasar de esta a esta* **(haciendo referencia a los términos dos y tres respectivamente)** *se sumaron seis".*

Luego de ello, la estudiante asume una actitud reflexiva en la búsqueda de alguna regularidad numérica, más específicamente el sumar un número a la cantidad de triángulos blancos del término tres, para identificar cuántos triángulos blancos deben haber en la termino cuatro. Sin embargo no encuentra aún una característica común para abducirla, con lo cual se deduce que aún se encuentra en plano *fenomenológico*, en donde aún está reconociendo determinaciones sensibles, (Radford, 2013).

Al preguntar a la estudiante por la cantidad de triángulos blancos presentes en la figura del término cuatro; el maestro tiene el propósito de centrar las determinaciones sensibles de la estudiante en el objeto que se va a generalizar. Según Radford (2013) todo individuo ve con cierta intención y en el proceso de enseñanza-aprendizaje se hace evidente la asimetría frente al objeto a generalizar. Como las intenciones fenomenológicas del maestro y la estudiante no son las mismas; debido a que sus perspectivas son diferentes; el maestro interviene para que la estudiante enfoque su razonamiento en alguna característica común, basada en el objeto de estudio (objeto a generalizar, que en este caso es la cantidad de triángulos blancos de cualquier figura) es decir enfocar sus determinaciones sensibles.

Con base en la descripción que hace Radford (2013) de la estructura de generalización algebraica de patrones (Diagrama 1), el componente fenomenológico se da cuando el sujeto establece las determinaciones sensibles que se producen cuando observa los términos de la secuencia. La estudiante se encuentra en un plano fenomenológico, puesto que aún no distingue alguna característica común C que pueda abducir.

Diagrama 1. Estructura de generalización algebraica de patrones

El maestro propone a la estudiante dibujar la figura cuatro. Ella aún no identifica la manera de construir el siguiente término, así que tarda un poco en identificar esa característica común. En ese momento la estudiante reconoce que debe dibujar un triángulo negro dentro de cada triángulo blanco (similitud entre los primeros tres términos dados), intenta dibujar un triángulo haciendo en este movimiento (Figura 2).

1	Maestro	¿Hacia dónde apuntan los triángulos negros?
2	Estudiante	hacia abajo [inicia a construir la figura 4, dibujando todos los triángulos negros en los blancos y responde...] hay 27

Transcripción 1. Descripción de la transcripción

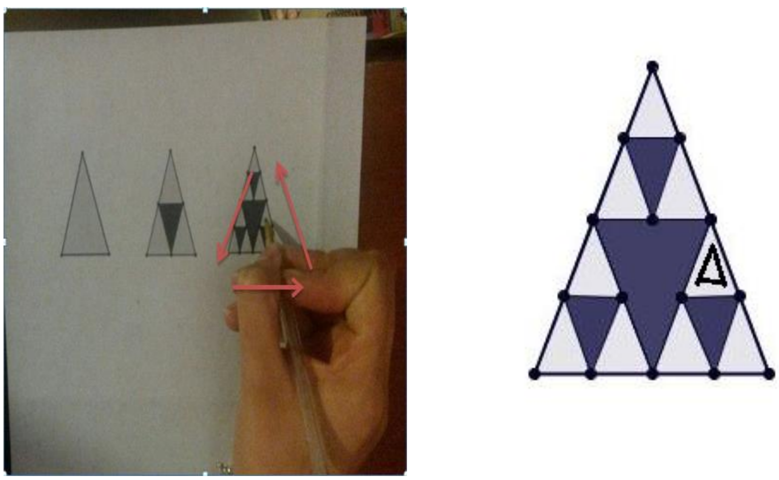


Figura 2. A la izquierda, la manera como la estudiante intenta dibujar el triángulo y la derecha el triángulo construido por ella

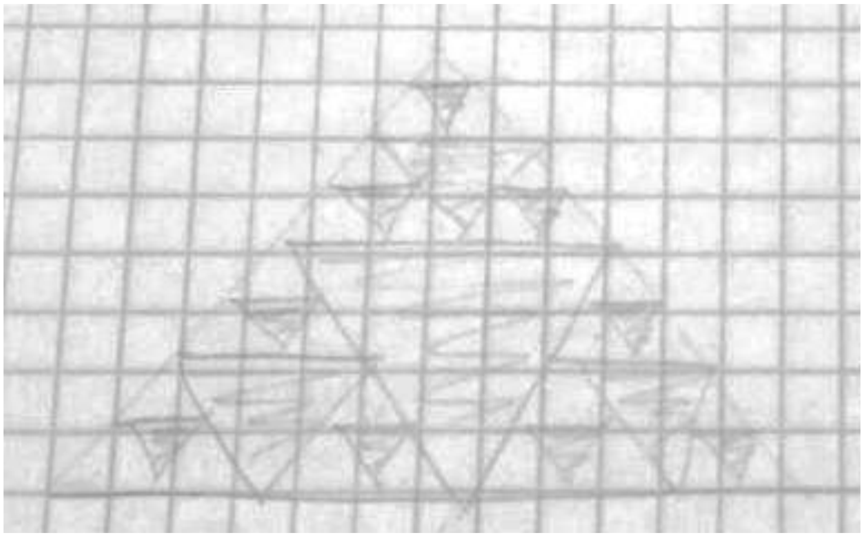
A continuación, el maestro le pregunta por la cantidad de triángulos blancos del quinto término, pero aclarando que no debe dibujarlo. Aquí la estudiante deja de lado la secuencia figural y se centra en encontrar la regularidad de la secuencia numérica, enfocando totalmente su atención en el patrón numérico.

En este momento la estudiante responde **81...** Efectivamente esa resulta ser la respuesta correcta, así que el maestro le pregunta *¿por qué?*, la estudiante escribe 9^2... Aquí se evidencia que la estudiante aún sigue buscando la característica común C que caracteriza al objeto de estudio. La estudiante intenta repetir alguna acción numérica pero aún no deduce una característica común que le permita reconocer la cantidad de triángulos blancos de cualquier término.

El maestro propone a la estudiante obtener la cantidad de triángulos blancos de la figura en un nuevo término, teniendo en cuenta la cantidad de triángulos blancos de la figura dispuesta en el término anterior. Con ello, el maestro encauza la actividad en la búsqueda de la característica común y la pueda abducir. La estudiante encuentra que la abducción es multiplicar por tres. Luego se le pregunta por el término seis, así que la estudiante recurre a la multiplicación entre la cantidad de triángulos blancos del término cinco (que son 81) por tres, en términos de Radford, la generalización de la característica común es un procedimiento; en este caso el procedimiento es la multiplicación por tres.

Luego se le pregunta por el término siete y vuelve a multiplicar por tres la cantidad de triángulos blancos del término anterior. Simultáneamente el maestro le pregunta por la cantidad de triángulos de la figura 10. Ella sigue multiplicando, pero se detiene y pregunta ***"¿no hay una manera más rápida?".*** En esa respuesta queda claro que la abducción que ella produjo, hace parte de una generalización aritmética; que tiene la característica de ser un proceso más largo, y que al ser recurrente resulta poco práctico para encontrar triángulos blancos de figuras como en el término $3000\ o\ 200000$; ya que para obtener la cantidad de triángulos blancos de cualquier término, se tiene que repetir la multiplicación por tres hasta llegar al término deseado.

Teniendo presente la intención por parte del profesor respecto a que la estudiante logre reconocer la relación de -potencias de tres- entre los números presentes en la secuencia numérica (y pueda hacer una abducción analítica, reconociendo en ella la relación entre la potencia y el número del término, para hallar el número de triángulos blancos) el maestro pregunta a la estudiante ***¿de qué otra manera puedes escribir el número 9?,*** a lo cual la estudiante responde 3^2. El profesor asiente, y a continuación pregunta por el siguiente término, (es decir el término cuatro) ella escribe $3^2 * 3$ el maestro le sugiere traer a la memoria una de las propiedades de la multiplicaciones de potencias de igual base y responda que significa $3^2 * 3$ _, a lo cual la estudiante escribe 3^3.



Luego el maestro pregunta por el término quinto y la estudiante escribe 3^4 En esa acción, se logra identificar como la estudiante encuentra una abducción analítica y la extiende a términos de la secuencia que no están dados. Es así como, al preguntarle por el término ***10***, responde 3^9y al preguntarle por la figura $\mathbf{100}$, responde 3^{99}

Se observa como la estudiante ha encontrado la generalización. El maestro entonces le pregunta, ***¿Cuántos triángulos blancos habrá en el término n, o sea cualquiera?*** La estudiante razona y responde 3^n. Ante la respuesta emitida el maestro contrasta su respuesta con lo que ya ha descubierto, pues le dice: ***¿ósea que en el término*** $\mathbf{5}$ ***hay*** $\mathbf{3^5}$ ***triángulos?*** La estudiante reflexiona y al fin responde 3^{n-1}. Donde se pudo evidenciar el problema semiótico de la generalización.

4. Reflexiones y conclusiones

Queda en evidencia que la estudiante cumplió a totalidad toda las secciones que Radford plantea en su estructura de generalización algebraica de patrones (dentro de la estructura se vislumbran de manera implícita los tres problemas que el mismo Radford plantea). Se hizo mayor hincapié en el problema fenomenológico, pero sin dejar a un lado que durante todo el desarrollo de la experiencia, la estudiante atraviesa los tres problemas de la generalización.

Por otro lado, es importante realizar un análisis completo y detallado de los fundamentos teóricos que se consideran útiles para planear la tarea que se implementará a los estudiantes, ya que en el momento de estar en la práctica se podrá evidenciar de manera más fluida el objetivo de estudio, que en nuestro caso fue la estructura de generalización algebraica de patrones. Además, conocer adecuadamente el tema podrá orientar el desarrollo de la actividad por un buen camino y por lo tanto cuando se va a realizar el análisis de lo sucedido, cada uno de los pasos realizados por el estudiante se podrán argumentar con mayor propiedad y seguridad encontrando alguna explicación lógica de lo que el estudiante realizó.

Creemos que ejercicios como el presentado en esta comunicación, promueve el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Destacamos que la interacción del estudiante con el docente se constituye en un elemento fundamental para orientar y focalizar las acciones del estudiante hacia la consecución de una generalización algebraica, y a su vez permita al profesor identificar cada uno de los problemas que se presentan teniendo en cuenta la Estructura de generalización algebraica de patrones propuesta por Radford (2013).

Referencias bibliográficas

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, J. Molina, M &. Segovia, I (Eds.). Investigación en didáctica de las matemáticas (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

Reyes, M (2009). Fractales-triángulo de Sierspinski. Universidad autónoma de Madrid, España recuperado de https://uam.es>ReunionMadrid