La informática y el proceso de investigación matemática en la escuela

Dedicado a Emma Castelnuovo

Las microcomputadoras ocupan un lugar cada vez más preponderante en la sociedad venezolana. La escuela no ha escapado de los intentos de diseminación de esta tecnología. Una muestra de esta expansión es la implementación de proyectos como el de *Un Computador para Cada Escuela.* Dado esto y otros argumentos que presentaré más adelante, planteo que no podemos obviar las microcomputadoras en el diseño de una estrategia para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática. Siguiendo esta dirección, en este artículo presento una perspectiva en el uso de la computadora como herramienta cognitiva para la investigación en la clase de matemática.

El uso de micros en la escuela en los países industrializados, ha pasado por una serie de etapas las cuales se sobreponen y no forman necesariamente un orden secuencial estricto. Estas etapas son las siguientes: *a*) para enseñar a programar, *b*) uso en simulaciones, *c*) para instrucción individualizada (especialmente en práctica y ejercicio), *d*) para la alfabetización informática, y *e*) como herramienta cognitiva. Estas etapas se corresponden en cierta medida, —al nivel conceptual—, con aquéllas por las que ha pasado la fundamentación del diseño instruccional. Tales etapas, según Cooper (1993), son las siguientes: conductismo, cognitivismo y constructivismo. Es la última de éstas la que considero más evolucionada y a la que está dedicado este trabajo.

El artículo está dividido en cuatro partes: en la primera, presento algunos argumentos generales a favor del uso de los micros como herramienta cognitiva en el aula; en la segunda, describo dos herramientas informáticas: *Cabrí-Géomètre* y *The Geometer's Sketchpad*, para la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana; en la tercera, desarrollo algunas ideas acerca de la investigación matemática en la escuela basadas en dos ejemplos tomados de Borenson (1986) y Castelnuovo (1963/1979), respectivamente; y en la última, presento algunas conclusiones generales sobre el tema.

Antes de continuar quiero mencionar un asunto de mucha importancia, el cual no será tratado con mayores detalles en este trabajo. Este asunto es el relacionado con el

Julio C. Mosquera P.
Universidad Nacional Abierta
Caracas - Venezuela

uso de tecnologías en la escuela y los problemas de equidad en ésta. Makrakis y Yuan-Tu (1993), en un artículo sobre informática y educación en China, plantean que la introducción de computadores en educación, promovidas por un lado por los deseos de imitar a los países industrializados y por el otro por agencias internacionales, se está haciendo en momentos cuando aún estamos luchando por resolver los problemas básicos de la equidad en nuestro sistema educativo. Deberíamos prestar seria atención a los argumentos de Makrakis y Yuan-Tu, especialmente cuando sugieren examinar las implicaciones del uso de tecnologías en la educación en términos de dos opuestos: 1) la informática como una nueva herramienta para el desarrollo, y 2) la informática como nuevo medio para la dependencia tecnológica. Sobre este aspecto se pregunta Oteiza (1993):

> "¿Incrementarán o disminuirán las computadoras el abismo entre los países desarrollados y los subdesarrollados?..., debemos preguntarnos si las computadoras favorecen diferencialmente a los varios niveles de gente educada, y de ser así, ¿se convertirán los ricos y educados en cada sociedad en aún más ricos y más educados?... Más importante, ¿tendrán las computadoras en los países pobres un efecto negativo o positivo sobre la igualdad del sistema educativo? (p. 25).

Mi intención es que en la medida en que producimos ideas y reflexionamos acerca de los posibles usos de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas, no se pierdan de vista estos aspectos generales relacionados con la equidad y la justicia social en la escuela.

La computadora como medio cognitivo

Una herramienta cognitiva es todo aquel instrumento del que pueden servirse las personas para amplificar su capacidad de comprender y operar en el mundo. La cualidad de herramienta cognitiva no es intrínseca a un instrumento. En el caso de la computadora tenemos que ésta no es por sí sola un medio cognitivo; para llegar a serlo tiene que ser utilizada dentro de un cierto dominio conceptual de manera que ayude al usuario a comprender mejor dicho dominio y actuar con mayor eficacia en el mismo. Si consideramos a la matemática como un dominio conceptual, entonces utilizar la computadora como herramienta cognitiva en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina significa que la máquina se utiliza en formas que ayuden al aprendiz a comprender y operar en ese dominio conceptual. Se supone que esta compresión de la matemática ayudará al estudiante a comprender mejor el mundo y a operar más efectivamente en ése.

Por el contrario, tenemos que una computadora utilizada para administrar la práctica y el ejercicio rutinario en el aprendizaje de la aritmética, no puede considerarse como una herramienta cognitiva. Afirmo esto porque si bien la práctica y el ejercicio puede ser importante para alcanzar un dominio de las operaciones aritméticas en términos de rapidez y precisión, creo que no contribuyen a un aprendizaje significativo de las mismas. Se podría hacer un paralelo entre estas dos formas de uso de las micros en la escuela, y las nociones de adiestramiento y educación. Comparto con Davis (1966/1974) la idea siguiente:

> No es lo mismo *adiestrar* que *educar*; [...] la educación es para la gente, y el adiestramiento para las máquinas electrónicas (que de cualquier modo no lo necesitan). En efecto: todas las tareas de rutinas repetitivas son básicamente ajenas al hombre (p. 150).

Respecto a la repetición propuesta por la práctica y el ejercicio, Comenius, el creador de la didáctica general, comentó:

> Me basta haber probado el azúcar una sola vez, haber visto una sola vez un camello, haber oído cantar una sola vez un ruiseñor, haber ido una sola vez a Roma, y haberla visitado, para que estas impresiones queden sólidamente fijas en mi memoria y no escapen jamás. (Citado en Castelnuovo, 1963/1979, p. 200).

A lo cual Castelnuovo agrega que:

> Basta una sola lección, separada de las otras, aun sin repetirla, para producir una impresión perdurable, para abrir un mundo. (Castelnuovo, 1963/1979, p. 200).

Por otro lado tenemos que, como argumenta Krywoska (1968/1978), el objetivo de la enseñanza de la matemática para todos, tanto en la escuela básica como en la educación media

> debería consistir en la iniciación de los alumnos en los *principios del trabajo "matematizante" y de la aplicación del conocimiento matemático,* <u>ejercitados sobre unos pocos ejemplos no triviales cuidadosamente escogidos</u> en distintos dominios con una finalidad metodológicamente formativa y no directamente práctica. (Subrayado agregado, Krywoska, 1968/1979, p. 190).

Por su parte, Leinhardt (1992) indica que resultados de la investigación sobre el aprendizaje nos permiten concluir que la "proficiencia en la ejecución no produce comprensión conceptual" (p. 21). A esto podemos agregar la sugerencia del matemático ruso Korovkin (1974/1976), donde plantea que:

> Sin duda, para el alumno es más útil resolver unos cuantos problemas difíciles que una gran cantidad de problemas sencillos (p. 6).

A partir de estos argumentos se puede concluir que lo más importante es la calidad de la experiencia matemática que se le ofrezca al alumno en el aula. La repetición de tareas, generalmente de bajo orden cognitivo, no promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes. Pero sí una visión restringida de la matemática como una disciplina que se ocupa sólo de cuentas y algoritmos, como una disciplina formada por una cantidad de conocimientos aislados sin interconexión alguna. Por el contrario, cuando la computadora es utilizada como herramienta cognitiva en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, a los estudiantes le son planteadas situaciones problemáticas de alto orden cognitivo que van más allá de la simple ejecución de operaciones aritméticas, y de la mera repetición de conceptos y algoritmos. Los estudiantes son expuestos a una actividad matemática en la que se trata de comunicar una visión de la matemática como una ciencia inacabada en constante proceso de evolución y desarrollo en el cual la computadora juega un papel cada vez más importante. Tenemos así una situación donde la forma como se usa la herramienta en la actividad matemática influye sobre la manera como se concibe la matemática y el instrumento mismo. A su vez, estas concepciones refuerzan ciertas formas de uso de la herramienta o promueven la introducción de nuevas formas de uso. Sobre este asunto Brown, Collins y Duguid (1989) opinan que:

> Las herramientas pueden ser comprendidas en su totalidad solamente por medio de su uso, y utilizarlas significa tanto cambiar la visión del mundo que tiene el usuario como adoptar el sistema de creencias de la cultura en la cual son utilizadas.[...]
>
> [...] La comprensión del mundo y de las herramientas cambia continuamente como resultado de su interacción. Aprender y actuar son indistintos, siendo el aprendizaje un proceso continuo que dura toda la vida que resulta de actuar en situaciones reales. (p. 33) [Trad. del autor].

Dos herramientas informáticas para enseñar y aprender geometría

En esta sección describiré brevemente dos medios informáticos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría: *Cabrí-Géomètre* y *The Geometer's Sketchpad*. Las presentaciones hechas aquí se corresponden con las versiones para Macintosh de ambos paquetes, aunque existen versiones de esos dos para Windows. Ambos programas representan a la nueva generación de herramientas informáticas basadas en una concepción dinámica, interactiva e investigativa de la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Mediante estas nuevas herramientas informáticas los estudiantes pueden manipular figuras geométricas en formas que le llevarían intuitivamente a la construcción de teoremas. La fase inicial del aprendizaje de la geometría puede ser ahora llevada a cabo en la forma de una ciencia experimental, en la cual el estudiante puede construir figuras geométricas y manipularlas (Tall y West, 1992, p. 121). Esto llevaría a un cambio fundamental en la forma como se justifica la enseñanza de la geometría en la escuela, es decir, un cambio de perspectiva de la geometría como vía para la introducción al estudio de un sistema deductivo, a la visión de la geometría como medio para la iniciación en la investigación matemática de manera experimental. Este asunto lo retomaremos más adelante, y se pasará ahora a una presentación breve de Cabrí-Géomètre y de The Geometer's Sketchpad.

Cabrí-Géomètre[1]

Cabrí fue creado por un equipo de investigadores del Laboratorio de Estructuras Discretas y de Didáctica, de la Universidad Joseph Fourier, en Grenoble, Francia. Sus fabricantes lo anuncian como un cuaderno interactivo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Esta herramienta informática goza de mucha popularidad en Europa y es tal vez aquélla sobre la cual se ha hecho más investigación educativa después de LOGO. Cabrí auxilia al usuario en la construcción de figuras geométricas en el plano.

Al abrir Cabrí la computadora presenta una hoja en blanco y una barra de menús (o menúes) en la parte superior de la pantalla, al igual que en otras aplicaciones computarizadas para Macintosh. La barra contiene cinco menús: Archivo, Edición, Creación, Construcción y Varios. Los de Archivo y Edición permiten al usuario la

[1] Para junio o julio de este año saldrá al mercado una nueva versión de Cabrí-Géomètre, la cual incluye algunas de las funciones ya presentes en The Geometer's Sketchpad, tales como la calculadora.

realización de acciones de editado similares a las que se encuentran en otras aplicaciones disponibles en Macintosh. Los menús de Creación y Construcción contienen una cantidad de comandos que permiten la construcción de elementos geométricos, tales como puntos, segmentos, rectas, circunferencias, puntos sobre un objeto y otros. El menú Construcción contiene un comando que permite reflejar un punto dado respecto a una recta dada; ésta es la única transformación construida como un comando en Cabrí. Los objetos creados o construidos pueden ser manipulados seleccionándolos con el cursor y moviendo el ratón; esto permite explorar diferentes casos para una misma construcción o modelo geométrico.

El menú Varios contiene una serie de comandos que hacen posible borrar o redefinir un objeto ya creado, grabar la sesión en la que se está trabajando, reproducir paso por paso las construcciones realizadas hasta el momento sin abandonar la sesión, ver una descripción textual de la figura en pantalla y una lista de los elementos que la componen, editar los menús, agregar una cuadrícula a la figura en pantalla, efectuar mediciones y marcar un ángulo. Al ejecutar el comando Grabar Sesión al comienzo de una figura, Cabrí crea una carpeta donde se guardan separadamente cada paso o cambio realizados sobre esta figura como una secuencia de fotografías. Una vez grabada la sesión, al ejecutar el comando Leer Sesión, Cabrí abre la carpeta y utilizando las teclas de movimiento del cursor se presentan en la pantalla la secuencia de construcciones hechas en dicha sesión; pulsando la tecla P se puede imprimir cualquiera de estos pasos, y con la tecla Q regresa el usuario a Cabrí.

El comando Editar Menúes en el menú Varios permite al profesor, decidir cuales menús estarán disponibles para el estudiante al trabajar en una determinada actividad. Por ejemplo, el menú Construcción tiene un comando que permite determinar automáticamente el punto medio de un segmento dado; ahora bien si la actividad a realizar por el alumno es la de hallar el punto medio de un segmento mediante una construcción, entonces no tiene sentido que tenga disponible el comando anterior. Este comando puede ser suprimido del menú correspondiente por el profesor antes de comenzar la sesión.

Cabrí es el resultado de un proyecto de investigación más amplio sobre el uso de tutores inteligentes en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Otro de los productos desarrollados por el grupo de Grenoble en esta dirección es HyperCabrí. Los investigadores que desarrollaron Cabrí están trabajando en una versión que esperemos esté pronto disponible en el mercado. A pesar de algunos problemas técnicos, Cabrí es una excelente herramienta informática para la implementación de una enseñanza de la geometría basada en la experimentación.

The Geometer's Sketchpad[2]

De ahora en adelante nos referiremos al The Geometer's Sketchpad por las siglas *CdG* correspondientes a su traducción al español como el *Cuaderno del Geómetra*. Esta herramienta informática fue desarrollada por la empresa Key Curriculum, en Estados Unidos. La primera versión de este paquete fue lanzada al mercado en 1991, y apareció

2 Actualmente está en desarrollo la versión 2.1 del CdG para Macintosh basada en mejoras introducidas en la versión para Windows. Además la gente de Key Curriculum Press trabaja en una versión totalmente en español del CdG.

la versión 2.0 a finales del año pasado. Esta última versión, como se verá más adelante, contiene nuevas características que la hacen superior a la versión anterior.

Al abrir el CdG la computadora muestra en la pantalla una caja de herramientas al lado izquierdo, similar a la que aparece en paquetes como Super Paint, una hoja en blanco y la barra de menús en la parte superior. La caja permite seleccionar herramientas para trazar puntos, segmentos, semirrectas, rectas, circunferencias, para crear rótulos y mensajes, y para abrir o crear guiones.

Toda construcción realizada en el CdG se registra automáticamente y puede ser ejecutada de nuevo si el usuario lo desea. Esta capacidad le permite al usuario mantener un archivo de construcciones personalizadas para uso posterior, y permite al docente llevar un registro de lo que el estudiante realizó en cada sesión de trabajo. El almacenamiento de una construcción o de una serie de construcciones se hace en la forma de guión, utilizando un comando que lleva el mismo nombre.

El CdG permite aplicar transformaciones (reflexión, traslación, etc.) a figuras construidas por el usuario. Además tiene la capacidad para definir transformaciones basadas en objetos construidos y la imagen de la transformación cambia simultáneamente cuando el objeto construido varía también. Por ejemplo, una rotación de una figura basada en un ángulo construido puede ser cambiada dinámicamente cambiando simplemente el ángulo que se construyó para determinar la rotación. El CdG permite también la composición de transformación y su modificación dinámica simultánea.

Otra de las adiciones importantes a la nueva versión del CdG es la recursividad construida dentro del guión. Esto quiere decir que dentro del diseño de un guión podemos tener un lazo que nos permite repetir un cierto número de veces una determinada construcción.

El CdG contiene también un menú de Medición, el cual permite medir la longitud de un segmento, su pendiente, ángulos, área y perímetro de una región poligonal, y otros aspectos medibles de las figuras geométricas. Las medidas son mostradas en la pantalla, se actualizan después de cualquier cambio en la figura en pantalla y pueden ser colocadas en la posición que el usuario desee. La versión 2.0 tiene una nueva función que es la construcción de una tabla de valores para una dimensión determinada por el usuario. Esta tabla es transferible a una hoja de cálculo, Excel, por ejemplo, para ser graficada y analizada en la búsqueda de relaciones y patrones. El menú de medición contiene además una calculadora con la cual podemos hacer operaciones con las mediciones obtenidas y con cantidades introducidas por el usuario.

Otra de las características de la versión 2.0 es la creación de botones de acción. El lector familiarizado con Hypercard comprenderá rápidamente lo anterior. Los botones de acción incluyen los siguientes tipos: movimiento, animación, ocultar/mostrar, sonido, película y secuencia. Por ejemplo, el comando movimiento crea un botón de acción para mover un punto seleccionado primero, a un punto seleccionado después, y el comando secuencia crea un botón de acción que ejecuta una secuencia de botones seleccionados. No hay palabras para describir con detalles las acciones de estos botones y al igual que otras características del CdG. La única manera para llegar a comprender su poder como herramienta cognitiva para enseñar y aprender geometría, es sentándose frente a una computadora y comenzar a experimentar en el CdG.

La versión 2.0 del CdG toma todas las ventajas posibles del sistema 7.0; por ejemplo, es posible para el profesor y los estudiantes demostrar y compartir sus trabajos por la vía de la red local. Esto posibilita la colaboración en tiempo real entre estudiantes trabajando en diferentes máquinas, y también que el profesor supervise el trabajo de los estudiantes desde su máquina (Olive, 1993). Otra de las características del Sistema 7 incorporadas en el CdG son los globos de ayuda. Si el comando Mostrar Globos es activado al pasar a la ventana del CdG, los globos aparecen al posicionar el puntero sobre el menú, barra o herramienta de la cual se quiere obtener la ayuda.

Considero que el CdG 2.0 tiene una serie de características que lo hacen superior a Cabrí-Geómètre. Algunas de ellas son el menú de transformaciones y la animación automática, ambas ausentes en Cabrí. Hay otros detalles técnicos, que no es el momento detallar, los cuales hacen que me decida por el CdG como herramienta informática que puede ser utilizada para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el aula desde la perspectiva propuesta en este trabajo. En efecto, todos los ejemplos presentados a continuación fueron elaborados en el CdG y están a la disposición de los interesados, junto con otras actividades, en la Coordinación de Matemática del CENAMEC.

Investigación matemática en el aula

Aquí describo una reconstrucción de dos actividades didácticas donde los autores, Borenson (1986) y Castelnuovo (1963/1979), utilizaron una perspectiva de investigación en la clase de matemática. Borenson presenta un ejemplo de una investigación realizada en el aula, con estudiantes de séptimo grado en una escuela secundaria en Estados Unidos, sobre las diagonales de un pentágono. En esta sección reconstruyo el ejemplo de Borenson utilizando una herramienta informática. En este caso, el profesor está utilizando la computadora como medio para hacer demostraciones a toda la clase y como estación de trabajo en el aula.

Un aspecto importante de esta propuesta es el de no eximir a los estudiantes de su responsabilidad matemática. Este aspecto, al igual que los otros, está basado en una didáctica de la matemática (Arsac, Balacheff y Mante, 1992). Los alumnos son responsables de su aprendizaje, de la realización de la actividad matemática en el aula y de la reflexión sobre dicha actividad. Tanto en la enseñanza tradicional como en el uso de la computadora para administrar práctica y ejercicio en matemática, el estudiante es eximido de su responsabilidad matemática, todo es hecho para él por el docente o por la máquina, y los criterios de verdad son establecidos externa y autoritariamente. Por el contrario, en la propuesta esbozada aquí al estudiante se le devuelve esa responsabilidad; tiene que analizar situaciones y buscar patrones, elaborar conjeturas y presentar argumentos para apoyarlas. La responsabilidad matemática del estudiante es cada vez mayor a medida que el curso avanza, a medida que la clase actúa de manera más cercana a una comunidad de matemáticos.

Consideremos ahora la reconstrucción del ejemplo tomado de Borenson. El profesor comienza construyendo un pentágono en la computadora con el CdG, y pide a los estudiantes que dibujen cada uno un pentágono en sus cuadernos. A continuación procede a pedir a los estudiantes que tracen todas las diagonales que parten de uno de los vértices del pentágono y, sin continuar dibujando, pide que hagan una conjetura acerca del número total de diagonales. Es posible que entre las respuestas surja la siguiente:

> ¡Profe! Un pentágono tiene diez diagonales porque de cada vértice salen dos.

Entonces se le solicita a alguno de los alumnos o alumnas que pase a la computadora y complete las diagonales del pentágono en la pantalla. Ése servirá como prototipo para comprobar la respuesta correcta y como contraejemplo para las respuestas incorrectas.

Luego el profesor pide a los estudiantes que formulen conjeturas acerca de las diagonales del pentágono. Por ejemplo, en el caso presentado por Borenson (1986), algunas de las conjeturas propuestas por los niños y niñas fueron las siguientes:

1. Un pentágono siempre tiene cinco diagonales.
2. En cada pentágono hay dos diagonales en cada vértice.
3. Para un polígono de cinco lados las diagonales forman una estrella (Fig. 1).
4. Si las diagonales de un pentágono se intersecan para formar una estrella, entonces el "centro" de la estrella es un pentágono (Fig. 1).
5. Hay tantas diagonales como lados del polígono. (Borenson, 1986, p. 37).

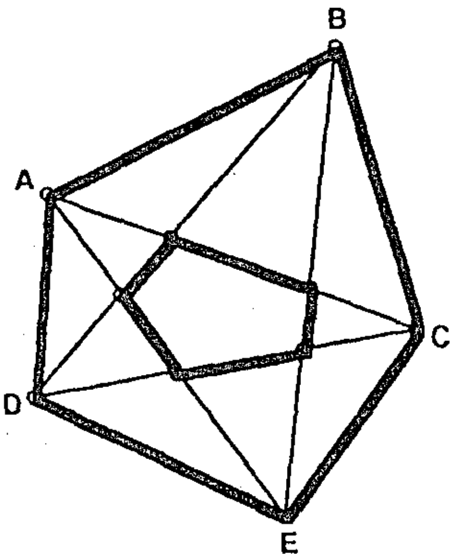

Figura 1

Una vez finalizado el proceso de elaboración de conjeturas los estudiantes comienzan a elaborar justificaciones, y a buscar contraejemplos que permitan confirmar o refutar dichas conjeturas. Con la ayuda del CdG, seleccionando uno de los vértices del pentágono, el profesor o uno de los alumnos puede construir en un instante muchos casos diferentes de pentágonos, y ver dinámicamente cambios en la figura. Por ejemplo, en la Figura 2 tenemos un contraejemplo a la proposición (3) y pareciera confirmarse intuitivamente la proposición (1). Pero veamos el ejemplo presentado en la Figura 3: ¿cuántas diagonales tiene ese pentágono?

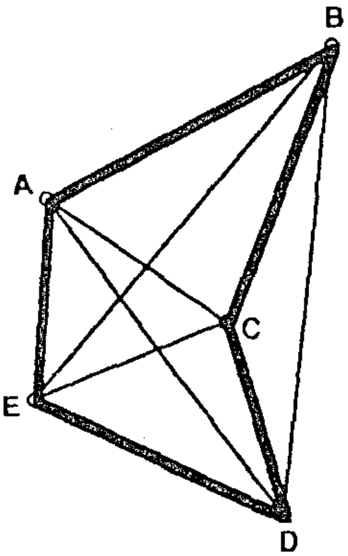

Figura 2

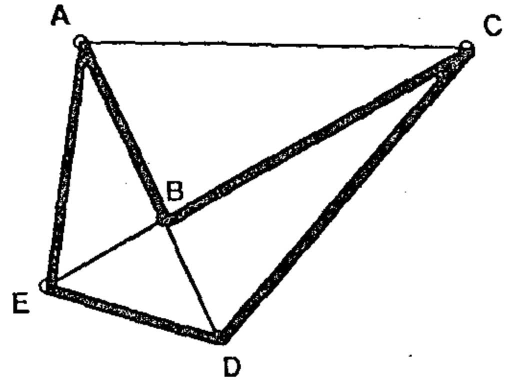

Figura 3

Debe discutirse con los alumnos que algunas de sus conjeturas son válidas si se imponen ciertas restricciones sobre el tipo de pentágono a considerar; por ejemplo, las conjeturas (1) y (2) son siempre ciertas para pentágonos convexos regulares para una definición dada de diagonal. Por otro lado, que ciertas conjeturas son ciertas o falsas dependiendo de las definiciones adoptadas. Para una definición de diagonal tenemos que todo pentágono, convexo o no, tiene cinco diagonales. Pero para otra definición de diagonal no todos los pentágonos tienen el mismo número de diagonales, siendo posible tener pentágonos hasta con dos diagonales. Esto llevaría a discutir la importancia de las definiciones en matemáticas.

Construir un contraejemplo para la proposición (5) es muy sencillo en el CdG; basta construir un cuadrado y sus diagonales. Esto mostraría a los alumnos un polígono de cuatro lados con dos diagonales, y deformando el cuadrado colapsando uno de los vértices sobre uno contiguo permite construir rápidamente un triángulo, esto es, un polígono de tres lados sin diagonales. Así podemos mostrar en una lección o dos unas cuantas ideas importantes en geometría, sin la obstrucción de la posible falta de habilidad para dibujar del profesor y de los estudiantes, agregando el dinamismo de las figuras construidas con el CdG, y a esto le sumamos el intercambio de ideas matemáticas entre los alumnos. Todos estos elementos crean un clima en el aula propicio para la investigación matemática. En otras palabras, la actividad que hemos descrito, permite a los alumnos trabajar en un aula donde se hace matemática, se actúa sobre objetos matemáticos, se elaboran conjeturas, contrajemplos y justificaciones, en lugar de memorizar hechos y oír descripciones de algoritmos a repetir en un examen sin comprensión alguna, un aula donde la computadora es utilizada como herramienta cognitiva.

A continuación presentaré el ejemplo tomado de Emma Castelnuovo (1963/1979) y reconstruido con el uso del CdG y una computadora en el aula como pizarrón electrónico y como estación de trabajo. Antes de pasar al ejemplo, deseo hacer notar que Castelnuovo se refiere a la investigación en el aula en dos sentidos. Por un lado, se refiere a la actitud de experimentalidad que debe asumir el docente en el aula para poder llegar a una mejor comprensión de la formación de ideas, conceptos y estructuras matemáticas en los alumnos. Para ello no basta la intuición y la observación, sino que el profesor debe tener presentes los conocimientos hasta ahora alcanzados en la pedagogía, la psicología y la matemática. Por otro lado, Castelnuovo se refiere a la actividad matemática que los estudiantes realizan en el aula; es decir, trabajando en temas de investigación en matemática. Esta sección está dedicada a la segunda interpretación de la investigación matemática en la escuela.

El profesor hace a los estudiantes la pregunta siguiente: "¿Cuántos triángulos hay que tengan la misma área? Dibuje algunos. Hablen, si quieren, también del perímetro." (Castelnuovo, 1963/1979, p. 194). Los alumnos tienen toda la hora de clase para trabajar en esta pregunta. Los que lo deseen pueden pasar a hacer algunas exploraciones en la computadora la cual está siendo utilizada como estación de trabajo. Después de realizar varios dibujos tanto en la computadora como en sus cuadernos, una gran parte de los alumnos concluye que basta con que los triángulos tengan la misma base y la misma altura para que tengan igual área.

Una de las niñas de la clase realizó un dibujo como el que se muestra a continuación [Figs. 4(a), 4(b)], en su cuaderno y escribió que hay una infinidad de triángulos que tienen la misma base y la misma altura. Planteó, como se ve en el dibujo, que basta fijar una base y mantener el vértice opuesto sobre una recta paralela a ésta para obtener

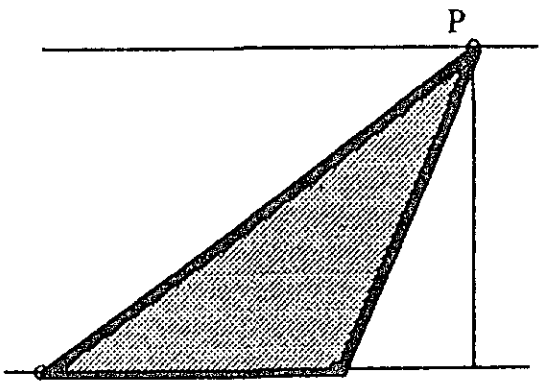

Figura 4(a)

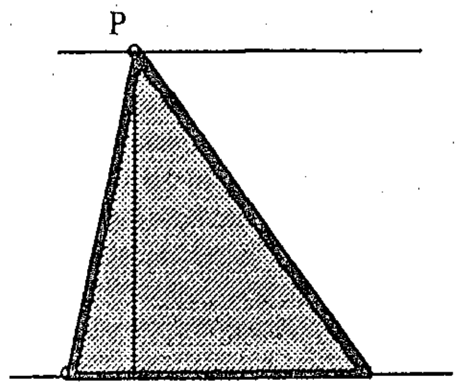

Figura 4(b)

triángulos. Esta idea llevó a Castelnuovo a diseñar una forma de producir materialmente lo que la alumna llamó una línea de triángulos utilizando madera, clavos, una liga y un anillo de metal. Ahora bien, una construcción "similar" puede hacerse de manera sencilla en el Cuaderno del Geómetra: se construye un segmento AB que servirá de base al triángulo; por un punto cualquiera Q en el plano, no colineal con A y B, se traza una recta l paralela al segmento AB, se traza luego un punto P sobre dicha recta y los segmentos AP y BP; a continuación se construye la región poligonal APB y se mide su área y su perímetro. Existen comandos en el CdG que permiten hacer todas estas construcciones fácilmente. La figura mencionada fue construida de esta forma. Animando el punto P sobre la recta l se puede ver como cambia el perímetro de los diferentes triángulos, mientras que el área se mantiene constante.

Siguiendo la investigación, otros estudiantes han observado que variando la base y la altura proporcionalmente, obteniendo una serie de triángulos isósceles [Figs. 5(a), 5(b)] también se obtienen triángulos con la misma área.

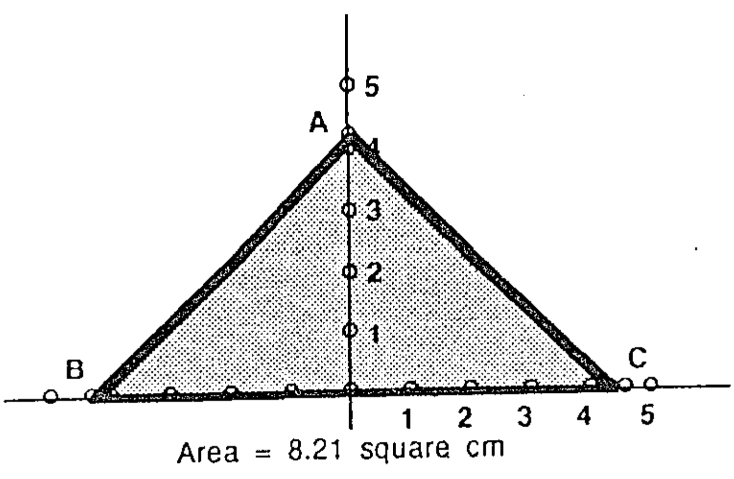

Figura 5(a)

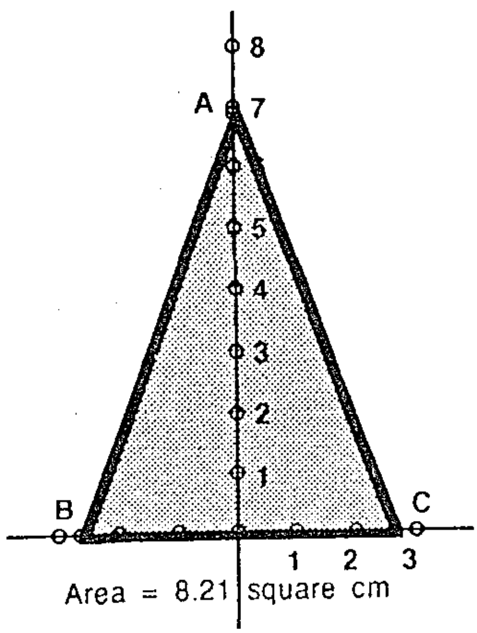

Figura 5(b)

Castelnuovo expresó que para este caso:

> Es mucho más complicado realizar, materialmente, la serie de triángulos isósceles de igual área (p. 196).

Esto es comprensible si tomamos en cuenta el estado de la tecnología en los años 50, pero hoy en día contamos con herramientas que nos permiten hacer esto fácilmente. Por ejemplo, la construcción en el CdG para esta demostración es sencilla y se describe a continuación con detalles (Fig. 6).

Nos interesa construir un triángulo isósceles de manera que al animar el punto A sobre la recta m obtengamos triángulos con la misma área. En otras palabras, tenemos que construir una familia de triángulos isósceles tal que el producto $\frac{1}{2}bh$ sea constante, donde b es la base y h la altura. Sobre una recta horizontal l construimos el segmento con puntos extremos O y D. Tomamos éste como segmento unidad; es decir, $OD = 1$. Se traza una recta m que pase por O y sea perpendicular a l. Se toma un punto F sobre m y se considera el segmento OF de longitud fija igual a k. Luego se considera un punto cualquiera A sobre la recta m y se traza el segmento DA, y una recta paralela a DA que pase por F. La intersección de esta recta con la recta l se denota por C. Entonces los triángulos ODA y OCF son semejantes. Por lo tanto,

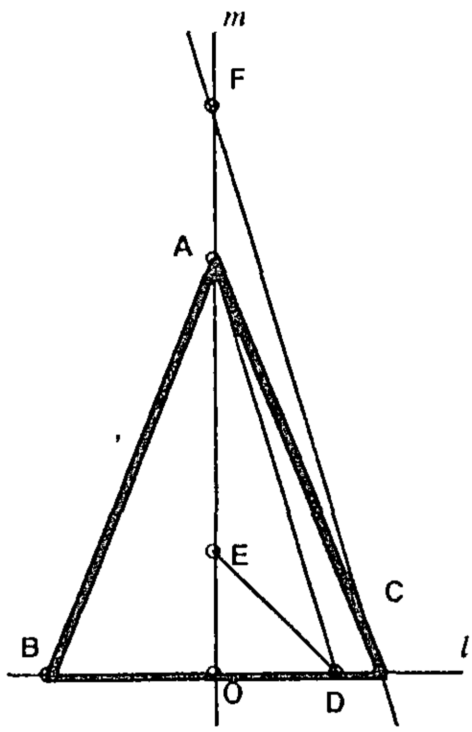

Figura 6

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OF},$$

y entonces

$$OF = OC \cdot OA$$

$$OC \cdot OA = k$$

Por lo tanto, el triángulo BCA tiene área constante e igual a k, para todo punto A sobre la recta que pasa por los puntos O y F.

La investigación continúa, y se pasa ahora a discutir situaciones relacionadas con el perímetro. En los dos casos presentados anteriormente se pregunta a los estudiantes: "¿Cuáles son los triángulos de perímetro mínimo?" Utilizando el menú Medición en el CdG podemos calcular el perímetro de todos los triángulos de manera dinámica y crear una tabla de valores para ambos casos. Dichas tablas pueden ser transferidas a una hoja de cálculo como Excel, o a la hoja de cálculo de un paquete integrado, como Claris Works o Greatworks. Una vez transferida la tabla se puede hacer una gráfica y determinar el punto mínimo. Volviendo luego al CdG puede establecerse cual de los triángulos satisface esa condición. Como vemos, hay muchas ideas en esta investigación; una que se destaca por sí sola es la del estudio de la diferencia entre el área y el perímetro de una figura geométrica. Mediante esta actividad se pueden despejar dudas acerca de estos conceptos, ya que la computadora permite explorar de manera dinámica objetos matemáticos en un contexto significativo.

Una vez realizada la investigación en el modo experimental como se ha presentado, los estudiantes podrían ser invitados a escribir justificaciones geométricas o algebraicas para apoyar sus conjeturas.

El ejemplo anterior ilustra lo que propongo como estrategia didáctica en la enseñanza de la matemática apoyada por el uso de una computadora en el aula. En tal estrategia la clase es entendida como una comunidad de aprendizaje donde se hace matemática y donde la computadora sirve de soporte a esta actividad. Se invita a los estudiantes a "hacer matemática" y a expresarse matemáticamente en vez de memorizar lo que expone el profesor; se les invita asimismo a hablar bien matemáticamente:

> hablar bien significa hablar con razón; si el niño aprende de memoria una definición, las más de las veces repite una bella frase sin darse cuenta de lo que dice; su hablar es sólo, un "verbalizar." Para expresarse, aprenderá más escribiendo que hablando, y más observando que repitiendo. (Castelnuovo, 1963/1979, p. 201).

La elección es nuestra; debemos escoger, pues, entre enseñar a los estudiantes "a hacer" matemática o a enseñarles a "verbalizar" matemática. Esta decisión está estrechamente relacionada con la elección entre **educación matemática** y **entrenamiento en matemática,** como lo señalamos en la primera parte de este trabajo.

Conclusión

En este material he presentado algunas ideas generales acerca del uso de las microcomputadoras como herramienta cognitiva en la enseñanza de la matemática en la escuela, y dos ejemplos de como realizar investigación matemática en el aula apoyada en tal herramienta. Argumenté que las micros pueden ser introducidas en la clase de matemática como estación de trabajo, como una alternativa a la estrategia de llevar a los estudiantes a un laboratorio de computación donde —en general— se descontextualiza la actividad matemática y no se tiene una clara percepción de lo que se está haciendo. Esto y otros efectos sobre la formación de concepciones erróneas en aritmética, han sido documentados en el caso del uso masivo de computadoras en Israel, en el trabajo de Nora Hativa. En el aula, la computadora puede ser utilizada tanto por el docente para hacer demostraciones, como un pizarrón electrónico, como por los estudiantes, para la realización de tareas específicas dentro del proceso de investigación o de resolución de problemas en matemática.

El otro punto importante desarrollado en este artículo es que la introducción de micros en la escuela debe hacerse para la implementación de estrategias didácticas específicas para las materias que se enseñan en aquélla. Tal es el caso de los ejemplos presentados aquí. Con ellos se ilustra la introducción de una micro en el aula como herramienta cognitiva para implementar una enseñanza de la matemática basada en la investigación. En otras palabras, las computadoras y las herramientas informáticas deberían ser introducidas en la enseñanza de la matemática como respuesta a una estrategia didáctica establecida previamente, y no como una solución en busca de un problema (Bigum, 1987).

Con la introducción de micros en el aula se espera que el profesor reflexione acerca de los posibles usos de estos aparatos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pero al mismo tiempo —como argumenta Bigum (1987b)— se espera que revise sus creencias sobre estos procesos. Por lo tanto, debemos considerar la relación entre las concepciones que tiene una cierta comunidad de un medio determinado y las formas como la misma es utilizada. Según expresan Brown, Collins y Duguid (1989), tenemos que reflexionar sobre lo siguiente:

> La comunidad y su punto de vista, tanto como la herramienta misma, determinan la forma en que la herramienta es utilizada [...]. Como las herramientas y la manera en que son utilizadas reflejan los *insights* particulares acumulados en las comunidades, no es posible usar una herramienta apropiadamente sin comprender la comunidad o cultura en la cual se utiliza (p. 33). [Trad. del autor].

Para concluir, pienso que en general las ideas didácticas deberían preceder y no seguir a las innovaciones tecnológicas. El mejor ejemplo que tenemos de esto son las ideas desarrolladas por Emma Castelnuovo en los años 60, las cuales podemos implementar ahora con mayor facilidad mediante las tecnologías informáticas desarrolladas en la última década.

Bibliografía

ARSAC, GILBERT; BALACHEFF, NICOLÁS, y MANTE, MICHEL (1992). "Teacher's role and reproducibility of didactical situations", *Educational Studies in Mathematics*, 23, 5-29.

BIGUM, CHRIS (1987). *Beyond tools*. Victoria: Deakin University Press.

BORENSON, HENRY (abril 1986). "Teaching the process of mathematical investigation". *The Arithmetic Teacher*. 33(8). pp. 36-38.

BROWN, J.S., COLLINS, A., y DUGUID, P. (1989). "Situated cognition and the culture of learning". *Educational Researcher*. 18, 32-42.

CASTELNUOVO, EMMA (1979). *Didáctica de la matemática moderna* (Felipe Robledo V., trad.). México: Trillas. (Original. 1963).

COOPER, PETER (1993). "Paradigm shifts in designed instruction: From behaviorism to cognitivism to constructivism". *Educational Technology*. 33(5). 12-19.

KOROVKIN, P.P. (1976). *Desigualdades. Lecciones Populares de Matemáticas* (C. Vega, trad.). Moscú: MIR. (Original. 1974).

KRYWOSKA, A.Z. (1978). "El proceso de matematización en la enseñanza". En Hernández, Jesús (ed.) *La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 187-193). Madrid: Alianza. (Original, 1968).

LEINHARDT, GAEIA (1992). "What research on teaching tells us about teaching". *Educational Leadership*, 49(7).20-25.

MAKRAKIS, VASILIOS, y YUAN-TU, LIU (1993). "Informatics. development and education". *Educational Technology*. 33(9). 31-37.

OLIVE, JOHN (1993). "The Geometer's Sketchpad Version 2.0". *The Mathematics Educator*. 4(1). 21-23.

OTEIZA, FIDEL L. (1993). "The impact of computer technology on schools in Chile". *Educational Technology*. 33(9). 25-30.

SCHUMANN, HEINZ (1993). "The design of microworlds in geometry based on a two-dimensional graphics system devised for secondary education". *International Journal of Mathematics Education for Science and Technology*. 24. 231-250.

TALL, DAVID, y WEST, BEVERLY (1992). "Graphic insight into mathematical concepts". En CORNU, BERNARD, y RALSTON, ANTHONY (eds.). "*The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching—Science and Technology*. 44 (pp. 117-123). París: UNESCO.