Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria

Resumen

En este trabajo se trata de proporcionar algunas respuestas a las siguientes preguntas:

¿Qué papel juega la *Combinatoria* en Probabilidad y en Matemática Discreta? ¿Es la capacidad combinatoria sólo un instrumento matemático o es un componente fundamental del razonamiento lógico? ¿Hay variables de tarea que afecten a los procedimientos y errores de los alumnos al resolver problemas combinatorios? ¿Cómo deberíamos considerar estas variables en la enseñanza y evaluación? Se presenta, asimismo, un cuestionario para evaluar el razonamiento combinatorio y los resultados obtenidos al aplicarlo a una muestra de 720 alumnos, de 14 y 15 años. Esta información puede ser útil a profesores y a investigadores en Educación Matemática interesados en la enseñanza del análisis combinatorio.

La *combinatoria* (o *análisis combinatorio*) es un componente esencial de la matemática discreta, y como tal, tiene un papel importante en las matemáticas escolares. En 1970, Kapur, para justificar la enseñanza de la combinatoria en la escuela, presentó las razones siguientes, que todavía son válidas:

— Puesto que no depende del Cálculo, permite plantear problemas apropiados para diferentes niveles; pueden discutirse con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matemáticas.
— Puede emplearse para entrenar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.
— Sirve para desarrollar muchos conceptos, como los de aplicación, relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etcétera.

Virginia Navarro-Pelayo, Carmen Batanero y Juan Díaz Godino
Universidad de Granada
España

— Es útil para muchas aplicaciones en campos como: química, biología, física, comunicación, probabilidad, teoría de números, grafos, etcétera.

La **combinatoria** no es simplemente un medio de cálculo para la probabilidad. Según Piaget e Inhelder (1951), si la persona no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales. Más aún, tales autores relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de *permutación*, y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del concepto de *combinación*. Si analizamos el uso del diagrama de árbol en probabilidad y combinatoria, podemos también observar que hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.

Además de su importancia en el desarrollo de la idea de probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa, por medio de operaciones combinatorias. Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del periodo de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Para estos autores, la combinación supone la coordinación de la seriación y la correspondencia, y la permutación implica una reordenación respecto a un sistema de referencia móvil y reversible. Por tanto, las operaciones combinatorias son operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal.

En resumen, como Fischbein (1975) señaló, las operaciones combinatorias son algo más que una simple parcela de las matemáticas. Representan un esquema tan general como la proporcionalidad y la correlación, que emergen simultáneamente a partir de la edad de 12 o 13 años.*

Sin embargo, los resultados de Fischbein (1975) muestran que la capacidad de resolver problemas combinatorios, no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales, si no hay una enseñanza específica. Fischbein y Gazit (1988) estudiaron el efecto de la instrucción sobre la capacidad combinatoria, descubriendo que, incluso niños de 10 años, pueden aprender algunas ideas combinatorias con la ayuda del diagrama de árbol. También analizaron la dificultad relativa de los problemas combinatorios, en función de la naturaleza y el número de elementos que debían ser com- binados, identificando algunos errores típicos en la resolución de problemas combinatorios simples.

En España, la enseñanza de la combinatoria en el bachillerato ha estado separada del resto de los contenidos curriculares, excepto en su relación con la probabilidad. Esta enseñanza se ha centrado en el aprendizaje de las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias y en la ejecución de ejercicios de cálculo con expresiones combinatorias. La combinatoria es considerada difícil por los profesores quienes, a veces, han preferido omitir su enseñanza. En el nuevo currículum, la combinatoria está prácticamente eliminada, aunque se hace una tímida mención al recuento y al diagrama de árbol, en el bloque de probabilidad.

Esta propuesta contrasta con los estándares del NCTM (1989), que presentan el razonamiento combinatorio como un medio útil, puesto que es la base de la matemática discreta, cuya enseñanza se pide con insistencia (véase, por ejemplo, Kenney y Hirsch, 1991).

Como consecuencia de las razones presentadas, estamos convencidos del interés de continuar e incluso ampliar la enseñanza de la combinatoria. Consecuentemente, comenzamos en 1991 un proyecto de investigación para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos españoles y mostrar su mejora con la instrucción. En este artículo se expone un resumen de los resultados, haciendo un énfasis especial en el análisis del cuestionario que hemos elaborado, que podría ser útil a los profesores. Tal cuestionario se presenta como apéndice, y será empleado en las discusiones y ejemplos de este artículo.

Clasificación de los problemas combinatorios e implicaciones en la evaluación

El papel de la resolución de problemas en la evaluación

De acuerdo con las tendencias recientes en Educación Matemática, la ciencia matemática no es sólo un lenguaje simbólico y un sistema conceptual, sino una actividad humana que implica la resolución de problemas socialmente compartidos. En Godino y Batanero (1994) se analizan estos tres aspectos y, consecuentemente, enfatizamos el papel de la *resolución de problemas* en la enseñanza, aprendizaje y evaluación del conocimiento matemático de los alumnos. De acuerdo con nuestra visión, el sistema cognitivo de los sujetos es una totalidad organizada y compleja. Mas aún, a causa de la naturaleza inobservable del conocimiento, la caracterización de la capacidad de los alumnos, respecto a un campo conceptual matemático, tal como la combinatoria, debe realizarse a través de un proceso de inferencia, a partir del sistema de respuestas observables de los alumnos a los problemas planteados.

Además de puntuar la corrección de la solución, se debe también evaluar las estrategias de los alumnos, sus argumentos y los tipos de error que manifiestan. El éxito o fracaso en los elementos (ítems) de una prueba, podrían estar relacionados entre sí, ya que se refieren a competencias similares. Por ello debe concluirse que las respuestas de los alumnos tienen un carácter cualitativo, multidimensional e interdependiente. Esto requiere enfocar el problema de la evaluación del conocimiento matemático desde una nueva perspectiva, como indica Webb (1992): "El informe comprensivo del funcionamiento de un individuo o grupo en la matemática o en la aplicación de la matemática." (p. 662).

Más aún, los elementos de los medios de evaluación forman una muestra del universo de posibles problemas relacionados con los conceptos de interés. Para minimizar los errores incluidos en todo proceso de muestreo, es decir, para asegurar la fiabilidad y validez de los instrumentos de prueba, la muestra elegida de ítems ha de ser representativa. Por lo tanto, el primer paso para construir un medio o instrumento es caracterizar las principales variables de tarea de los ítems, de modo que podamos seleccionar una muestra representativa, usando combinaciones adecuadas de los valores de esas variables de tarea.

En lo sucesivo se considerarán únicamente los problemas combinatorios simples de enumeración y recuento, en los que se pide a los alumnos el inventario de todos los casos posibles producidos por una cierta operación combinatoria o el cálculo —sin enumeración— del número de esas configuraciones. En este último caso, si el alumno ha estudiado combinatoria, puede identificar la operación combinatoria del enunciado, que es una de las principales dificultades de los problemas combinatorios, según Hadar y Hadass (1981). Si el alumno no estudió análisis combinatorio previamente, podría encontrar la solución aplicando las tres reglas combinatóricas básicas de *suma, producto* y *cociente*. Usualmente, la resolución de los problemas requiere también un razonamiento recurrente (o recursivo).

Modelo combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatóricos simples

Según Dubois (1984), es posible clasificar las configuraciones combinatorias simples en tres modelos: 1) *Selección,* que enfatiza la idea de muestreo; 2) *colocación,* relacionado con el concepto de aplicación; y 3) *partición* o división de un conjunto en subconjuntos.

En el modelo de *selección* se considera un conjunto de m objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de n de ellos, como por ejemplo, en el ítem 11 del Apéndice. La palabra clave "elegir", incluida en el enunciado del problema, sugiere al alumno la idea de extraer bolas de una caja, como se muestra en la Figura 1. Si sustituimos las bolas por personas, podríamos interpretar los ítems 8 y 13 de la misma forma. Otros verbos claves que generalmente se refieren a la idea de muestreo son "seleccionar", "tomar", "extraer", "sacar", etcétera.

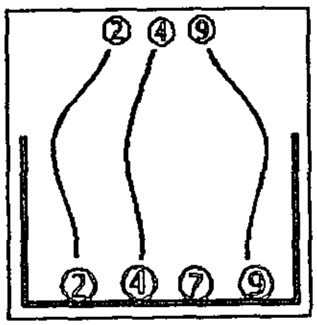

Figura 1 El modelo de selección (ítem 11).

Al seleccionar una muestra, a veces se puede repetir uno o más elementos, como en el ítem 11 y otras veces no es posible, como en el ítem 5. Según esta característica y si el orden en que la muestra es extraída es relevante o no, obtenemos las cuatro operaciones combinatorias básicas, que se muestran en la Tabla 1 (las permutaciones son un caso particular de las variaciones). En esta tabla usamos la siguiente notación: $VR_{m,n}$ para las variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n; $V_{m,n}$ para las variaciones sin repetición, $CR_{m,n}$ para las combinaciones con repetición y $C_{m,n}$ para las combinaciones ordinarias.

	Muestra ordenada	Muestra no ordenada
Con resposición	$VR_{m,\ n}$	$CR_{m,\ n}$
Sin resposición	$V_{m,\ n}$	$Cm,\ n$

Tabla 1 Diferentes posibilidades en el modelo de selección.

Otro tipo de problemas se refiere a la *colocación* de una serie de n objetos en m celdas, como en el ítem 3, donde cada una de tres cartas iguales deben introducirse en uno de los cuatro sobres. Otros verbos claves que pueden considerarse en este modelo son: "colocar", "introducir", "asignar", "guardar", etc. La solución a este problema es $C_{4,3}$, pero hay muchas posibilidades en este modelo, dependiendo de las siguientes características:

— Si los objetos a colocar son idénticos o no.
— Si las celdas son idénticas o no.
— Si deben ordenarse los objetos colocados dentro de las celdas.
— Las condiciones que se añadan a la colocación, tales como el máximo número de objetos en cada celda, o la posibilidad de tener celdas vacías, etcétera.

No hay una operación combinatoria distinta para cada posible colocación, y más aún, se puede obtener la misma operación combinatoria con diferentes problemas de colocación. Por ejemplo, podrían definirse las variaciones como el número de formas de colocar n objetos diferentes en m celdas distintas (es irrelevante si la colocación es ordenada o no). En el caso de objetos indistinguibles se obtienen las combinaciones. Pero podemos obtener también algunos tipos de colocaciones que no pueden expresarse con una operación combinatoria básica. Por ejemplo, si se consideran las colocaciones no ordenadas de n objetos distintos en m celdas idénticas, obtenemos los números de Stirling de segundo género $S_{n,m}$. En consecuencia, no es posible traducir cada problema de colocación en un problema de muestreo. El lector interesado puede encontrar un estudio más completo de los números de Stirling en Grimaldi (1989), y de las diferentes posibilidades del modelo de colocación, en Dubois (1984).

Asignar los n objetos a las m celdas es, —desde un punto de vista matemático— equivalente a establecer una aplicación desde el conjunto de los n objetos al conjunto de las m celdas, como se muestra en la Fig. 2. Para las aplicaciones inyectivas se obtienen las variaciones ordinarias; en caso de una biyección resultan las permutaciones. Sin embargo, no hay definición directa para las combinaciones ordinarias usando la idea de aplicación. Todavía más, si consideramos una aplicación no inyectiva podría obtenerse un problema para el cual la solución no es una de las operaciones combinatorias básicas.

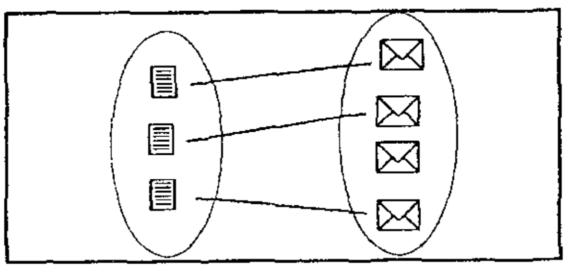

Figura 2 El modelo de colocación (ítem 3).

Finalmente, quizá se estuviera interesado en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, en efectuar una *partición* de un conjunto, como en el ítem 10 (Fig. 3). Podríamos visualizar la colocación de n objetos en m celdas como la partición de un conjunto de n elementos en m subconjuntos (las celdas). Por tanto, hay una correspondencia biyectiva entre los modelos de partición y colocación, aunque para el alumno esto podría no ser tan evidente. Otros verbos claves asociados a la partición son: "dividir", "partir", "descomponer", "separar", etcétera.

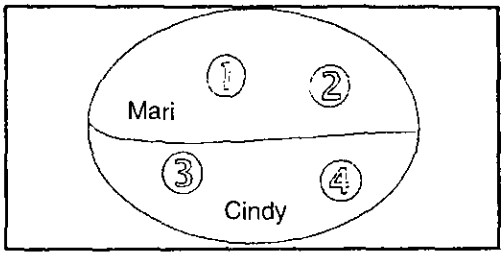

Figura 3 El modelo de partición (ítem 10).

Consecuentemente, no puede suponerse que los tres tipos de problemas descritos (selección, colocación y partición) sean equivalentes en dificultad, incluso aunque puedan corresponder a la misma operación combinatoria. Por tal razón, se ha tomado el *modelo combinatorio implícito* en el problema, como una variable de tarea fundamental para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos.

Descripción del cuestionario y resumen de los datos

Para elaborar el cuestionario se construyó un banco inicial de ítems, traduciendo varios elementos tomados de diferentes investigaciones, como las de Green (1981), y Fischbein y Gazit (1988). Se efectuaron algunas modificaciones para obtener una muestra más representativa de problemas y hacer los ítems más homogéneos. También se tuvieron en cuenta las sugerencias de algunos profesores y alumnos acerca de la comprensión de los enunciados y la dificultad de los problemas. Se utilizaron dos muestras piloto de 106 y 37 alumnos, respectivamente, para estimar el tiempo necesario para completar el *test* y revisar los valores de los parámetros en algunos problemas. También se calcularon los índices de generalizabilidad, que tomaron los valores $G = 0.73$ para la generalizabilidad a la población de ítems, es decir, la posibilidad de generalizar los resultados a otra muestra de problemas con valores similares de las variables de tarea, y $G = 0.99$ para la generalizabilidad a la población de alumnos.

La versión final del cuestionario tiene 13 elementos o ítems. Como podemos ver en el Apéndice, cada uno es un problema combinatorio simple y el alumno puede explicar en detalle su razonamiento. Las variables de tarea que hemos considerado al escoger los problemas son las siguientes:

a) Modelo combinatorio implícito: se han elegido situaciones de selección, colocación y partición, como contexto del problema.
b) Tipo de operación combinatoria: variaciones y permutaciones, con y sin repetición, y combinaciones ordinarias.
c) Tipo de elementos que se combinan: letras o números, personas y objetos.
d) Valor dado a los parámetros m y n.

Como se observa en la Tabla 2, se utilizó una técnica parecida al diseño factorial grecolatino para permitir un balance de las diferentes variables de tarea del cuestionario.

Operación combinatoria	Modelo combinatorio		
	Colocación	Selección	Partición
Combinaciones	Objetos; $C_{4,3}$ *ítem 3*	Personas; $C_{5,3}$ *ítem 8*	Números; $C_{4,2}$ *ítem 10*
Permutaciones con repetición	Letras; $PR_{5,1,1,3}$ *ítem 12*	Objetos; $PR_{4,1,1,2}$ *ítem 2*	Personas; $PR_{4,2,2}$ *ítem 7*
Variaciones con repetición	Personas; $VR_{2,4}$ *ítem 6*	Números; $VR_{4,3}$ *ítem 11*	Objetos; $VR_{3,4}$ *ítem 4*
Permutaciones	Personas; P_4 *ítem 1*	Números; P_3 *ítem 5*	
Variaciones	Objetos; $V_{5,3}$ *ítem 9*	Personas; $V_{4,3}$ *ítem 13*	

Tabla 2 Diseño del cuestionario.

La muestra final incluía 720 alumnos (de 14-15 años), de 9 Institutos de Granada y Córdoba: 352 habían recibido instrucción en combinatoria, y el resto (368) no habían tenido enseñanza de la misma. En la Tabla 3 se presentan los porcentajes de soluciones correctas en ambos grupos de alumnos.

Ítem	Operación	Modelo	Porcentaje correcto (grupo con instrucción)	Porcentaje correcto (grupo sin instrucción)
1	P_4	Distribución	71.0	23.9
2	$PR_{4,1,1,2}$	Selección	27.5	16.3
3	$C_{4,3}$	Distribución	26.7	26.9
4	$VR_{3,4}$	Partición	6.0	3.0
5	P_3	Selección	80.7	77.2
6	$VR_{2,4}$	Distribución	7.4	13.0
7	$PR_{4,2,2}$	Partición	39.2	32.3
8	$C_{5,3}$	Selección	46.0	22.5
9	$V_{5,3}$	Distribución	41.8	3.8
10	$C_{4,2}$	Partición	37.2	31.0
11	$VR_{4,3}$	Selección	59.1	12.5
12	$PR_{5,1,1,3}$	Distribución	29.5	10.6
13	$V_{4,3}$	Selección	59.6	9.5

Tabla 3 Porcentaje de soluciones correctas en los dos grupos de alumnos.

En general, podemos observar en la citada Tabla 3 que ambos grupos de alumnos tuvieron gran dificultad en resolver los problemas, aunque éstos implicaban una sola operación combinatoria. Incluso para valores pequeños de los parámetros, el número total de configuraciones combinatorias se incrementaba rápidamente, como en el ítem 4, en el que hay un total de 81 particiones posibles. Los alumnos mostraron una falta de razonamiento recursivo, el cual les hubiese permitido escribir todas las configuraciones o calcular su número sin enumerarlas. En el grupo de alumnos sin instrucción previa no hubo gran diferencia de dificultad entre los tres tipos de modelos (selección, colocación y partición) con la excepción del problema 5, que fue muy fácil, porque los alumnos resultaron capaces de hallar su solución mediante ensayo y error, incluso con procedimientos de enumeración no sistemáticos.

Encontramos una mejora en las soluciones de los alumnos que habían recibido enseñanza de combinatoria en un subconjunto de ítems. Hubo una reducción general de la dificultad en los problemas de selección y en los de variaciones, permutaciones, y permutaciones con repetición. En los de colocación, la mejora no fue general, y en los de partición no hubo ninguna mejora. Esto podría explicarse por las definiciones usadas para introducir las operaciones combinatorias, que están basadas principalmente en la idea de muestra (modelo selección), a la cual se añade en algunos libros, el modelo de colocación para las variaciones y permutaciones. En consecuencia, enfatizamos la necesidad de considerar los tres tipos de modelos en los futuros desarrollos curriculares en combinatoria.

Empleo del cuestionario para diferentes fines

Como la intención al elaborar el cuestionario fue probar el efecto de las diferentes variables de tarea sobre la respuesta de los alumnos, fue necesario incluir los trece ítems. Esto suponía bastante tiempo para completar el cuestionario (alrededor de 60 a 70 minutos). Sin embargo, si el profesor o investigador no tiene tiempo suficiente, sugerimos usar parte del cuestionario para distintos fines, en la forma siguiente:

— Aplicar el test en dos sesiones (del ítem 1 al 6; del ítem 7 al 13).
— Elegir ítems correspondientes a una sola operación combinatoria o a un único modelo específico, para explorar la capacidad de resolución de un subconjunto de problemas combinatorios; por ejemplo, de los problemas de permutaciones antes de la enseñanza.
— Aplicar una versión reducida usando sólo los ítems 3, 5, 7, 9, 10 y 11 (reduciendo los valores de los parámetros a $V_{4,2}$ en el ítem 9 antes de la instrucción). Esta combinación incluye todas las operaciones combinatorias y modelos, y un rango de dificultad moderada en los ítems.

Finalmente, el profesor puede construir otros elementos o ítems, con fines educativos o de evaluación, cambiando los valores sólo en algunas variables de tarea. Por ejemplo, en el ítem número 9, podría cambiarse el contexto (ascensor que transporta personas a diversos pisos, enviar postales navideñas a varios amigos, etcétera).

Descripción de los principales tipos de errores

Un punto clave en la evaluación del razonamiento combinatorio es identificar el tipo de error en las soluciones de los alumnos. Una vez que éstos terminaron con los cuestionarios, se analizan sus soluciones clasificando todos los errores de acuerdo con la siguiente categorización:

Errores comunes a los diferentes modelos de selección, colocación y partición

E1: Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema:
Por ejemplo, cambiar un problema de selección por un problema de partición.

E2: Error de orden:
Este tipo de error, descrito por Fischbein y Gazit (1988), consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial. Éste es un ejemplo tomado de la solución de un alumno al ítem 8 (selección de tres alumnos para borrar la pizarra):

> "*E = Elisa, F = Fernando, G = Germán, J = Jorge, M = María*
> EFM, EMF, EGJ, EJF, EFG, EMG, EGF, EJM, EFJ, EMJ, EGM, EJG;
> $12 \times 5 = 60$ Hay 60 formas distintas".

E3: Error de repetición:
El alumno no considera la posibilidad de repetir los elementos cuando esto es posible, o repite los elementos cuando no es posible hacerlo. Éste es un ejemplo en el ítem 5 (selección de tres números sin reposición):

> "*724-742-722-772-744-472-427-477-444-422-422-274-247-277-222-244*
> quince números diferentes."

E4: Confundir el tipo de objetos:
Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles, o bien qué objetos diferentes son indistinguibles. Por ejemplo, en el ítem 3 (introducir cartas en sobres) algunos alumnos creen que es posible distinguir entre las tres cartas iguales.

E5: Enumeración no sistemática:
Este tipo de error fue descrito por Fischbein y Gazit (1988), y consiste en resolver el problema por enumeración, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades.

E6: Respuesta intuitiva errónea:
Los alumnos sólo dan una solución numérica errónea, sin justificar la respuesta.

E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente:
Por ejemplo dar "$C_{4,3} = 4 \times 3 = 12$" como solución al ítem 3.

E8: No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria:
Por ejemplo, dar la siguiente respuesta en el ítem 4 (distribuir cuatro coches entre tres jóvenes):

> "*Es una variación con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3*".

E9: Interpretación errónea del diagrama de árbol:
A pesar de su importancia como medio para producir la solución, muy pocos alumnos usaron el diagrama arbóreo, incluso en el grupo que había recibido instrucción en combinatoria, prefiriendo buscar una fórmula conveniente. Más aún, algunos de los alumnos que intentaron construir un diagrama de árbol para resolver el problema, construyeron uno inadecuado, o interpretaron incorrectamente el diagrama producido.

Errores adicionales, específicos de los problemas de colocación y partición

E10: Confusión en el tipo de celdas (tipo de subconjuntos):
Es decir, creer que podríamos distinguir celdas (subconjuntos) idénticas o que no es posible diferenciar las celdas (subconjuntos) distinguibles. Por ejemplo, en el ítem 7 (asignar dos tareas diferentes a 4 jóvenes), algunos alumnos sólo consideran las tres maneras en que el conjunto de cuatro alumnos puede dividirse en dos grupos. Así, no diferencian qué grupo realizará el trabajo de matemáticas, y cuál el trabajo de idioma.

E11: Error en las particiones formadas
Esto puede ocurrir en los dos siguientes casos.

a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total. Por ejemplo, en el ítem 4 (distribución de cuatro autos entre tres jóvenes):

"1. *Azul, blanco, verde, rojo — Fernando*
2. *Azul, blanco, verde, rojo — Luis*
3. *Azul, blanco, verde, rojo — Teresa*

4. *Azul — Fernando*	5. *Azul — Luis*	6. *Azul — Teresa*
7. *Blanco — Fernando*	8. *Blanco — Luis*	9. *Blanco — Teresa*
10. *Verde — Fernando*	11. *Verde — Luis*	12. *Verde — Teresa*
13. *Rojo — Fernando*	14. *Rojo — Luis*	15. *Rojo — Teresa*."

b) Olvidar algunos tipos posibles de partición. Por ejemplo, en el ítem 6 se necesita dividir un grupo de cuatro personas en dos subgrupos. Para resolver el problema requerimos considerar todas las siguientes descomposiciones del número 4.

$$4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 0 + 4.$$

No obstante, como en el siguiente ejemplo, algunos alumnos sólo consideran un subconjunto de todas las posibles particiones.

"10 formas

A, B, C, D = S	B, D, C = S; A = B
A, B, C, D = B	A, B, C = B; D = S
A, B, C = S; D = B	A, B, D = B; C = S
A, B, D = S; C = B	A, D, C = B; B = B
A, D, C = S; B = B	B, C, D, = B; A = S"

En la Tabla 4 se expone la frecuencia de cada uno de estos tipos de errores, en ambos grupos de alumnos. Podemos observar que antes de la instrucción, la principal dificultad para resolver los problemas fue la ausencia de enumeración sistemática. También fue usual, en este grupo de alumnos, la confusión en el tipo de objetos; tipo de casillas y tipo de partición. En lo referente al grupo de alumnos con instrucción, los dos principales errores fueron los de orden y repetición y aparecen nuevos errores, como los de "fórmula" e "incorrecta interpretación del diagrama de árbol", en algunos alumnos.

Errores	Grupo con instrucción		Grupo sin instrucción		Ítems en los que este error tuvo especial incidencia
	Número de errores	Media por alumno	Número de errores	Media por alumno	
Cambio de modelo	88	0.25	26	0.07	Ítems 4; 6
Orden	787	2.24	153	0.44	Ítems 3; 6; 7; 8; 9; 10; 12
Repetición	563	1.6	145	0.42	Ítems 2, 4, 6, 12
Tipo de objetos	26	0.07	241	0.69	Ítems 2, 3, 4
Enumeración no sistemática	50	0.14	1678	4.82	Todos, excepto 4, 5
Respuesta intuitiva errónea	29	0.08	220	0.63	Ítems 1, 9, 13
Fórmula	156	0.44			No hay diferencia
Parámetros	458	1.3	30	0.08	Ítems 4, 6
Diagrama en árbol	36	0.1			
Tipo de celdas	42	0.12	280	0.8	Ítems 4, 6, 7, 10
Partición	36	0.1	272	0.78	Ítems 4, 6
No da solución	549	1.6	648	1.86	No hay diferencia

Tabla 4 Frecuencia y número medio de errores por alumno en los dos grupos.

No hay gran diferencia en lo referente al número medio de problemas para el cual los alumnos no proporcionan solución en ambos grupos. También el número medio de errores por ítem y alumno fue 0.78 para los alumnos sin instrucción, y 0.6 para los alumnos con instrucción. Esto muestra el efecto positivo de esta última, aunque es obvio que muchos alumnos no han comprendido el significado de la operación combinatoria, ya que aparecen nuevos tipos de errores después del trabajo instructivo.

Finalmente, notamos que los tipos de error no se distribuyen al azar en los diferentes ítems. Es notable la mayor incidencia de varios errores en los ítems 4 y 6, de variaciones con repetición, en los que el parámetro m es menor que n y el modelo combinatorio es partición y colocación, respectivamente. El error de orden está ligado principalmente a las combinaciones, aunque también aparece en algunos problemas de variaciones. Los errores de repetición y tipo de objetos están más asociados a los problemas variatorios con repetición y permutaciones asimismo con repetición. La significancia estadística de estas asociaciones fueron confirmadas mediante el análisis de datos y presentado en Navarro-Pelayo (1994).

Conclusiones

En este artículo hemos resumido nuestros hallazgos de investigación referentes a la estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en dos grupos de alumnos de 14-15 años de edad, uno que había recibido instrucción en combinatoria (o análisis combinatorio) y otro sin instrucción. Finalmente, añadimos algunas reflexiones referentes a las consecuencias de estos resultados en la práctica educativa.

Algunas de las variables de tarea descritas, especialmente el *modelo combinatorio implícito*, han mostrado sus fuertes efectos en la dificultad del problema y en los tipos de error. Así, dichas variables necesitan considerarse para evaluar el razonamiento combinatorio de los alumnos, si se desea conseguir una evaluación más comprensiva de las capacidades y concepciones de los alumnos. También deben ser tenidas en cuenta para organizar la enseñanza que debe también destacar el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración, en lugar de sólo centrarse en aspectos algorítmicos y en definiciones combinatorias. El lector puede encontrar en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) una propuesta de desarrollo del currículo de combinatoria para el intervalo de edades de 10 a 18 años, que tiene en cuenta de modo sistemático las ideas y resultados experimentales descritos en este trabajo.

Bibliografía

BATANERO, M.C., GODINO, J.D., y NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

DUBOIS, J.G. (1984). "Une systématique des configurations combinatoires simples". *Educational Studies in Mathematics.* v. 15, n. 1, pp. 37-57.

FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. (1988). "The combinatorial solving capacity in children and adolescents". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* v. 5, pp. 193-198.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1994). "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". *Reckerches en Didactique des Mathêmatiques,* v. 14, n. 3, pp. 325-355.

GREEN, D.R. (1981). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. D. Thesis. Loughborough University.

GRIMALD, R. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction.* Reading, Ma: Addison-Wesley.

HADAR, N. y HADASS, R. (1981). "The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls". *Educational Studies in Mathematics,* v. 12, pp. 435-443.

INHELDER, B., y PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent.* París: P.U.F.

KAPUR, J.N. (1970). "Combinatorial analysis and school mathematics". *Educational Studies in Mathematics,* v. 3, pp. 111-127.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

PIAGET, J., e INHELDER, B. (1951). *La génèse de l'idée d'hasard chez l'enfant.* París: Presse Universitaire de France.

WEBB, N.L. (1992). "Assessment of student's knowledge of mathematics: Step toward a theory". En D.A. Grouws (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Nueva York: Macmillan.

APÉNDICE

Cuestionario para la evaluación del razonamiento combinatorio

1. Cuatro jóvenes son enviados al director del colegio por alborotar en la clase. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!

Supongamos que se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel, pero los designaremos brevemente como A, B, C y D. Se desea escribir todos los órdenes posibles en que podrían alinearse.

Por ejemplo: para el orden

A	B	C	D
1º	2º	3º	4º

escribiremos ABCD. ¿Cuántas formas diferentes hay en total?

RESPUESTA: ______________________________

2. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una trás otra, las cuatro fichas. ¿De cuántos modos diferentes se puede hacer la selección de las mismas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, *blanca, azul, roja* y *azul.*
3. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de los colores amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta, ¿de cuántas formas es posible colocar las tres cartas en los cuatro sobres? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre *amarillo*, otra en el *blanco* y otra en el *crema.*
4. Un niño tiene cuatro pequeños coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas distintas puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.
5. En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda y se registra su número; y sin devolverla, se saca una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: El número *724.*
6. Cuatro niños: Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Ésta tiene dos habitaciones (salón y buhardilla) donde poder alojar a los niños para dormir. ¿De cuántas maneras diferentes puede la abuela colocar a los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía.) Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón, y Diana en la buhardilla.
7. Un grupo de cuatro amigos: Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos: uno de Matemáticas y otro de Idioma. Para ese trabajo deciden dividirse en dos grupos de dos personas cada uno. ¿De cuántos modos pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas, y Clara-Daniel, el de Idioma.
8. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas maneras puede elegir tres de esos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

9. El garaje de Ángel tiene cinco sitios. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches, los de Ángel, Beatriz y Carmen, que pueden colocar cada día el auto en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Éste es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Ángel puede colocar su coche en el sitio número 1, Beatriz en el número 2, y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen situar sus coches en la cochera?

10. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿De cuántos modos se pueden repartir los objetos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los 3 y 4.

11. En una urna hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Se saca una bola de la urna y anotamos su número. La bola extraída se repone en la urna y se elige una segunda, anotando luego su número. La bola sacada se vuelve a introducir en la urna. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 222.

12. Disponemos de cinco cartas, y cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

13. Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir según los cuatro candidatos? Ejemplo: Arturo como presidente, Carlos como tesorero y David como secretario.