

# El algebrista: Una plataforma para el desarrollo de sistema tutores con componente inteligente en el área del álgebra<sup>1</sup>

## Resumen

Este trabajo resume los propósitos, los procedimientos y algunos de los hallazgos de una línea de investigación cuyo propósito se puede resumir en las siguientes preguntas: ¿es posible formalizar el conocimiento que utiliza un tutor al mediar el aprendizaje del álgebra y usar esos formalismos para desarrollar sistemas computacionales que los emulen?, en esa búsqueda, ¿se puede utilizar la formalización del conocimiento mediante técnica de la Inteligencia Artificial para comprender mejor cómo actuamos al mediar el aprendizaje? Esto es, la investigación tuvo tanto el propósito de desarrollar sistemas tutoriales con apoyo informático, como aprender acerca de formas efectivas para facilitar el aprendizaje. El trabajo describe la arquitectura de los sistemas, muestra que fue necesario crear un espacio —decimos plataforma de desarrollo— que permitiese representar el conocimiento utilizado por los tutores observados. El estudio mostró las serias limitaciones que la tecnología impone a la representación de la actuación humana a la vez que su potencial en el área estudiada. Los principales hallazgos se encuentran en la nueva comprensión el conocimiento que emplea un docente mientras orienta el aprendizaje de un aprendiz.

**Abstract:** This paper resumes objectives, procedures and some finding of a research program intended to answer the following questions: Is possible to formalize knowledge teacher uses in the action of mediating learning in algebra?, and, is it possible to use this formalism for developing computational systems to emulate those performances?, also, can we use these formalism to better understand how we perform when mediating learning? This research had the objectives of developing tutorial systems with intelligent components, and to learn about effective ways to facilitate learning. The papers also shows the basic architecture of a "development platform" for the representation of the knowledge (rules) used by the observed human tutors. Research made evident, both, the important limitations, and the potentiality of the computer technology, when simulating human performances. Main findings where about a new understanding of the nature and kind of knowledge used by teachers when mediating learning.

**Fidel Oteiza Morra<sup>2</sup>, Hernán Miranda Vera, Juan Silva Quiroz, Adrián Silva Ulloa, Gonzalo Villarreal Farah**

Depto. de Matemática y Ciencia de la Computación,  
Universidad de Santiago de Chile, Chile

<sup>1</sup> Trabajo desarrollado en el marco del proyecto FONDECYT No. 91-0453 y presentado en el VII Encuentro Nacional de Informática y Educación. Concepción-Chile, Julio de 1994.

<sup>2</sup> Profesor investigador del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile y ayudantes de investigación.

## Presentación

Los sistemas tutores inteligentes son programas que hacen uso del conocimiento especializado para guiar el aprendizaje. Su estrategia se basa en recibir la consulta de un alumno y a través de preguntas y/o interacciones con el estudiante, completar la información referida al problema, para así, utilizando la base de conocimiento, entregar una orientación adecuada al alumno.

Las principales características de los “tutores inteligentes” son:

- a. El conocimiento que facilita está almacenado en una base de conocimiento. Esto implica que el sistema “posee” las capacidades que pretende facilitar en el estudiante.
- b. El sistema “comprende” la actuación del alumno, y detecta errores en su razonamiento al resolver el problema.
- c. El sistema, a partir de los errores detectados, ayuda al estudiante a corregirlos.

El “Algebrista” fue concebido originalmente como un sistema tutor con componente inteligente para apoyar el aprendizaje independiente del álgebra.

Estaría orientado a la: simplificación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones de primer grado, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y otros.

Entre otras características, el sistema debería ser capaz de: resolver problemas propuestos por un estudiante y seguirlo en el desarrollo de su problema, explicitando los pasos que dio y justificándolos de acuerdo con los axiomas y teoremas.

En el curso de la investigación, y producto de los aprendizajes logrados en el área de desarrollo de sistemas inteligentes, se optó por darle al “Algebrista” una arquitectura flexible, que lo hiciera adaptable a distintos tipos de conocimiento.

Los sucesivos prototipos del sistema, contemplando la arquitectura antes señalada, dieron origen finalmente a una versión del sistema muy cercana a lo que la literatura especializada refiere como “shells”. Los “shells” son sistemas expertos vacíos de contenidos, esto es, poseen un motor inferencial —que es la parte del sistema que permite hacer inferencias y actuar a partir del conocimiento con que trabaja el sistema— y una interface. El conocimiento es codificado y almacenado en una “base de conocimiento” que está separada del núcleo del sistema. El usuario se comunica con el sistema a través de la interface que es la que establece la triple relación: usuario, conocimiento, motor inferencial.

En definitiva, lo que se logró fue un sistema adaptable a distintos tipos de conocimiento algebraico, sin tener para ello que cambiar el núcleo del sistema. Esto permite hablar, entonces, de una **plataforma de desarrollo** para sistemas tutores con componente inteligente en el área del álgebra, pues se pueden tener tantos tutores específicos como bases de conocimiento se puedan codificar.

Este documento describe las principales características del “Algebrista”, presenta su arquitectura interna, su funcionamiento y su forma de interacción con el estudiante.

## El enfoque, las motivaciones y las metáforas iniciales

### El contexto

La experiencia que sirvió de pivote para el desarrollo de este trabajo, tuvo su origen en el proceso de diseño y de elaboración de un "sistema experto"<sup>1</sup> —o sistema basado en conocimientos— para el apoyo del aprendizaje matemático.

Los sistemas expertos son un producto del área de la ciencia de la computación llamada "inteligencia artificial". Estos sistemas emulan el comportamiento de un especialista humano al enfrentar un problema complejo que requiere de conocimientos especializados (Charniak y McDermott, 1986).

El sistema generado en esa experiencia inicial, desarrollada en el marco del proyecto FONDECYT 1046-88 "Mediación efectiva del aprendizaje matemático" (Oteiza, Antonijevic y Montero, 1989), hace uso del conocimiento de especialistas en la enseñanza del cálculo y tiene por objeto apoyar a un estudiante independiente en el proceso de resolución de integrales. Está dirigido, preferentemente, a los alumnos de los primeros cursos de Cálculo en los programas de Ingeniería y de Licenciatura en Educación Matemática.

En esta oportunidad, se buscó orientar los esfuerzos hacia la generalización de esa experiencia inicial y a poner a prueba algunos supuestos teóricos acerca de la mediación adulta y de las formas en que esta mediación puede ser representada e implementada en los sistemas basados en conocimiento.

Los resultados de estos esfuerzos, se expresan en el logro de un sistema en el área del álgebra con una arquitectura flexible, que se adapta a distinto tipo de conocimiento algebraico. Además, se encontró una solución a la incorporación en el sistema de conocimiento relacionado con la mediación del aprendizaje.

Lo alcanzado, en definitiva, representa una generalización de los modelos utilizados en la experiencia inicial y un acercamiento a la meta de tener un sistema genérico que actúe como "shell" en el área del álgebra y, como tal, permita generar fácilmente sistemas tutores que apoyen el aprendizaje de temas específicos.

### Los sistemas expertos

Se trata de programas que tienen la capacidad para ayudar, aconsejar, analizar, consultar y determinar la pertenencia de un objeto, fenómeno o situación a una clase dada. Son herramientas para tratar problemas que, generalmente, exigen para su solución total o parcial de la presencia de un especialista.

Se diferencian de los programas más convencionales por el uso de procedimientos deductivos y por la posibilidad de realizar "razonamientos" aproximados o inciertos. Esto les dota de la capacidad para resolver problemas insuficientemente definidos o pobremente estructurados (Townsend, 1986; Harmon y Sawyer, 1990).

En el proceso de desarrollo de este tipo de sistemas, se hace necesario hacer explícito el conocimiento que usa un experto para resolver problemas en su área de especiali-

<sup>1</sup> En español también se usa la expresión "sistema especializado". Ambas son traducciones de la expresión inglesa *expert systems*, y hacen referencia a sistemas computacionales que simulan la actuación de un especialista humano en el proceso de resolver problemas en los que sus conocimientos son considerados importantes.

**zación.** La literatura se refiere a las personas que realizan esta tarea de extraer el conocimiento del experto como ingenieros del conocimiento.

Estos ingenieros del conocimiento, aprenden acerca del problema objeto del sistema y entrevistan al especialista. El objetivo de estas entrevistas es lograr que el especialista traduzca en palabras las reglas, procedimientos, conceptos, en fin, el conocimiento, que le permite actuar como tal.

En la literatura relacionada con el tema se le ha dado un espacio importante a esta actividad, refiriéndose a ella como "ingeniería del conocimiento" (Feigenbaum y McCorduck, 1983, p. 99). Según estos autores, "actualmente el problema de la adquisición del saber es el punto crítico de estrangulamiento de la inteligencia artificial".

Los sistemas expertos poseen una componente, la **base de conocimientos**, en la que se almacena el conocimiento del especialista. Esto supone disponer de procedimientos para **representar ese conocimiento**.

Esta representación adopta diversas formas. Una es la estructura de reglas: si  $A$  y  $B$  y  $C$  y, ..., entonces  $P$  o  $Q$  o...  $W^2$ . También se usan formas análogas a una oración del lenguaje natural pero limitada por ciertos formalismos codificados. Otra representación hace uso de estructuras análogas a una "ficha", algo así como una cédula de identidad, en la que en determinados espacios se ubica cierto tipo de información. También se usan formalismos análogos a una obra de teatro, en la que los personajes y los papeles, determinan un curso de acción. La mayoría de las veces se usan combinaciones de las formas nombradas (Silva y Villarreal, 1991).

Una vez ensambladas todas sus partes, el sistema debe poder: a) relacionarse con el usuario en un lenguaje o una forma simple y conocida por él; b) solicitar y tomar razón acerca de la información específica relativa al problema consultado (esto supone capacidad de diálogo y la posibilidad de almacenar hechos temporales); c) relacionar los datos del problema consultado con el conocimiento almacenado en la base para inferir soluciones, nuevas preguntas, posibles cursos de acción o consejos y d) explicar las razones que tiene —como lo haría el especialista— para proponer una solución o un curso de acción determinado.

### La intuición inicial: los "tíos inteligentes"<sup>3</sup>

La metáfora se basa en la siguiente observación: estudiando las formas de mediación adulta en el proceso de aprendizaje, se organizaron una serie de observaciones. En un ambiente de sala de clases y en situaciones especialmente organizadas para observar la interacción uno-a-uno entre un estudiante y un tutor.

La experiencia mostró una distinción básica entre las situaciones uno-a-muchos y las uno-a-uno. La escena que mejor muestra esta distinción es la situación espontánea en la que un estudiante pregunta a un mayor o a un compañero que le puede ayudar. Con cierta

<sup>2</sup> Algunas de las cuales pueden ser inciertas o expresadas en forma de posibilidades, sospechas, reglas que dá la experiencia o preferencias en el comportamiento del especialista "generalmente es así", "prefiero esa solución", etc.

<sup>3</sup> Lo de "inteligentes", está tomado de la literatura especializada anglosajona que agrega el adjetivo de inteligentes a los sistemas computacionales que tienen una componente o hacen uso de técnicas provenientes de la "inteligencia artificial". En este caso se refiere a sistemas con procedimientos inferenciales como los discutidos en la sección anterior.

frecuencia, especialmente en un ambiente hogareño, puede darse una consulta a un hermano mayor, a uno de los padres o a un "tío"; el que puede ser de ayuda y que está disponible. "Tío, ¿cómo resolvería esto?"; "tío, ¿me puede ayudar con esta tarea?"; o con este problema, ejercicio, duda o lo que sea.

La experiencia muestra que en estas situaciones el adulto rara vez, muy rara vez, reacciona entregando respuestas o haciendo una pequeña clase; lo que hace es muy diferente a lo que usualmente realiza un profesor en el aula. En vez de explicar o de dar su versión **responde con preguntas**, usualmente varias preguntas. "Déjame ver, ¿qué problema tienes?"; "¿qué es lo que no comprendes o lo que te preocupa?"; "¿haz intentado tal cosa, o esta otra?"; "¿cómo te lo enseñaron?"; déjame ver tu cuaderno. El "tío" o el adulto, pregunta, orienta, propone, rara vez resuelve por su cuenta o dicta clase.

Este fue el punto de partida: la metáfora del adulto instruido que media<sup>4</sup> la relación del estudiante con el conocimiento. Si la enseñanza asistida por computadores pudiese emular a este adulto, se dispondría de una nueva generación de sistemas para el apoyo al estudio independiente. Estos sistemas tendrían la capacidad para preguntar y dispondrían del conocimiento suficiente para orientar al aprendiz. Lo que supone que el sistema debiera tener alguna forma de "conocimiento" acerca del tema y acerca del modo de razonar y de aprender los contenidos de aquellas consultas que puede atender.

La recomendación que recibieron estos investigadores de parte de los especialistas en ciencias de la computación fue: "ustedes necesitan o quieren construir un sistema experto". De allí en adelante, los "tíos inteligentes" fueron "sistemas expertos".

Una vez construido el primer sistema experto, el paso siguiente fue la generalización de la experiencia y el diseño de un sistema que se adaptara flexiblemente a diversos conocimientos. El resultado de este proceso fue el "Algebrista".

## Una sesión de trabajo con el algebrista

A continuación, se describe la forma en que el "Algebrista", utilizando una base de conocimientos específica, interactúa con un estudiante frente a un problema de ecuaciones de primer grado planteado por este último. Posteriormente, se relaciona esta manera de actuar con los conceptos recién discutidos y con la arquitectura interna del sistema.

La primera tarea a desarrollar por el estudiante es describirle al sistema el problema sobre el cual desea ayuda. Esta tarea la realiza a través de la interface, que es la cara visible del sistema, el ambiente donde el estudiante realiza sus consultas y, por lo tanto, interactúa con el sistema. Este ambiente de trabajo tiene la siguiente apariencia.

---

<sup>4</sup> El concepto de mediación del aprendizaje está tomado del trabajo de Feuerstein (1980) y se refiere a la actuación de un agente externo al aprendiz que interviene en el flujo de información que existe entre el sujeto que aprende y el objeto de su aprendizaje. El agente mediador selecciona, ordena, filtra y dota la información con un sentido específico.

---

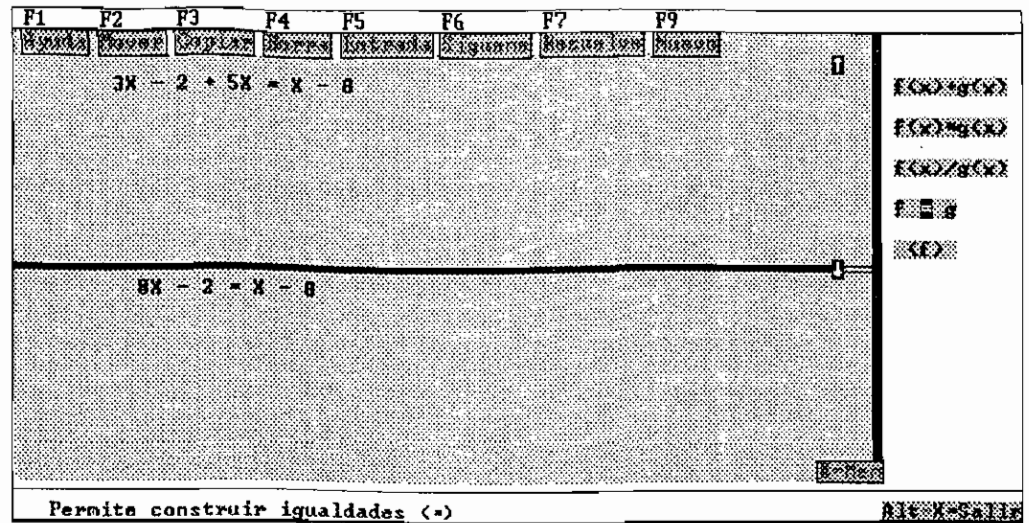


Figura 1 Ambiente de trabajo principal del "Algebrista".

Es en este ambiente donde el estudiante, haciendo uso de las funciones programadas para facilitarle la comunicación con el sistema, va procediendo paso a paso a resolver su problema.

El "Algebrista", por su parte, procede a analizar cada paso dado por el estudiante y verifica si éste es correcto o no. En caso afirmativo, le da a conocer las reglas y/o heurísticas que posiblemente aplicó para dar el paso desplegando en un costado de la pantalla una ventana con mensajes correspondientes a su actuación. En caso negativo, trata de encontrar el error y dar indicaciones para corregirlo. Si no puede hacerlo, indica sólo que el paso contiene un error. A esta forma de actuar nos referimos cuando decimos que el sistema "sigue" a un estudiante.

### El "Algebrista" sigue a un estudiante

Este modo de actuar es lo que más se acerca a la metáfora de los "tíos inteligentes". Aquí es el estudiante el que toma el control de la situación y va dando los pasos matemáticos que, según él, le permitirán resolver el problema. El sistema sólo "observa" la actuación del estudiante y "reacciona" a ella, señalando si el paso dado es correcto o no y emitiendo una hipótesis acerca del posible razonamiento que aplicó para dar dicho paso.

En este modo es dónde se expresa más claramente, la componente "inteligente" del sistema, ya que debe ser capaz de comprender la acción que realiza el estudiante y reaccionar a ella utilizando el conocimiento matemático y de mediación que posee almacenado en sus bases de conocimiento. Es importante señalar aquí que el problema con el cual se trabaja lo define el estudiante y no el sistema. La única restricción es que pertenezca al dominio de conocimiento con que se está trabajando en ese momento.

La estrategia utilizada para abordar el seguimiento del estudiante, supone una secuencia finita de pasos dados por éste ( $P_0, \dots, P_n$ ). El sistema procede a analizar dos pasos contiguos en esta secuencia, verifica la validez del paso dado y emite la hipótesis correspondiente. Además, guarda los elementos (objetos matemáticos) que le sirvieron para generar dicha hipótesis, dejándolos disponibles y clasificados para emitir mensajes de mediación.

En términos operativos, el sistema identifica dos entradas contiguas en la secuencia de pasos dados por el estudiante. Una vez identificadas las dos entradas —las que llamaremos  $P_0$  y  $P_1$ — resuelve en forma independiente, aplicando el conocimiento algebraico que posee, las ecuaciones expresadas en  $P_0$  y  $P_1$ . Si el resultado obtenido al despejar la incógnita coincide en ambas ecuaciones, el sistema emite un mensaje indicando que el paso está correcto. En caso contrario, emite un mensaje de error.

En el caso que el paso sea correcto, el sistema procede a optimizar el proceso de búsqueda, tratando de encontrar las hipótesis alternativas —en caso de que existan— que explican el paso desde  $P_0$  a  $P_1$ . Para ello, identifica los términos de  $P_0$  y  $P_1$  que han variado y aquellos que no han sufrido ningún cambio. A continuación, busca **todas las reglas** (y su secuencia) que justifican el paso dado, considerando sólo los términos que han variado. En la práctica, el sistema no toma en cuenta los términos que se repiten en  $P_0$  y  $P_1$  y genera las entradas  $P_0'$  y  $P_1'$  que contiene sólo los términos que han variado y sobre éstas aplica las reglas. De esta manera, se reducen las búsquedas en la base de conocimiento, haciendo más rápido y óptimo el proceso.

Veamos un ejemplo donde se ilustra la situación descrita. Supongamos que un estudiante, resolviendo una ecuación de primer grado, ha dado el paso que se muestra en  $S_1$ .

$$P_1: 4x + 3 - 5 = -8 + 2x - x$$

$S_1$

$$P_2: 4x = -6 + x$$

El sistema procede a resolver las ecuaciones expresadas en  $P_1$  y en  $P_2$ , obteniendo en ambos casos que  $x = -2$ . Por lo tanto, indica que el paso está correcto.

Después, identifica que en lado izquierdo de la igualdad ha permanecido sin variaciones el término  $4x$ , lo tacha y genera la situación que se muestra en  $S_2$ . Esto es, genera una situación donde no se considera el  $4x$ .

$$P_1': +3 - 5 = -8 + 2x - x$$

$S_2$

$$P_2': +0 = -6 + x$$

Con estas entradas, el sistema busca en la base de conocimientos las razones que justifican este paso. Las hipótesis interesantes sobre la actuación del estudiante que se generan en  $S_1$  y  $S_2$  son las mismas. La diferencia está en que en  $S_2$  no se generan hipótesis espúreas (como por ejemplo, explicar por qué el  $4x$  se transforma en  $4x$ ), optimizando así el proceso.

A continuación se presentan dos ejemplos concretos que ilustran la actuación del "Algebrista" en este proceso de seguir a un estudiante. El primero muestra la actuación del sistema y el segundo relaciona dicha actuación con las estructuras internas que utiliza el sistema para representar el conocimiento matemático sobre el cual trabaja.

Ejemplo 1: La actuación del "Algebrista" cuando sigue al estudiante

Supongamos que el estudiante desea resolver la ecuación:

$$3x + 5 - x + 3 = 2x - 7x$$

Nótese que el problema lo definió el estudiante, no lo eligió desde un "menú de problemas" predefinidos ni fue el sistema el que se lo propuso.

El estudiante le indica al sistema cuál es su ecuación y procede a resolverla paso a paso de la siguiente manera.

### Paso 1

Estudiante:  $3x - x + 8 = -5x$

**Sistema:** El paso es correcto y entiendo que éste podría ser tu razonamiento:

Sumaste los números 5 y 3 del primer miembro de la ecuación, lo que da como resultado 8.

Hiciste una reducción de los términos semejantes  $2x - 7x$  y el resultado es  $-5x$ .

Eso es todo, por el momento...

### Paso 2

Estudiante:  $2x + 8 = -5x$

**Sistema:** El paso es correcto y entiendo que éste podría ser tu razonamiento:

Hiciste reducción de los términos semejantes  $-x + 3x$  y el resultado es  $2x$ .

Eso es todo, por el momento...

### Paso 3

Estudiante:  $7x = -8$

**Sistema:** El paso es correcto y entiendo que éste podría ser tu razonamiento:

Aplicaste el inverso aditivo de la constante 8. En otras palabras, sumaste  $-8$  en ambos lados de la ecuación.

Aplicaste el inverso aditivo de la variable  $-5x$ . En otras palabras, sumaste  $5x$  en ambos lados de la ecuación.

Hiciste reducción de los términos semejantes  $2x + 5x$  y el resultado es  $7x$ .

Eso es todo, por el momento...



#### Paso 4

Estudiante:  $x = -8/7$

**Sistema:** El paso es correcto y entiendo que éste podría ser tu razonamiento:

Aplicaste el inverso multiplicativo del coeficiente 7. Dicho de otro modo, multiplicaste por  $1/7$  en ambos lados de la ecuación.

El problema ha sido resuelto.

Ejemplo 2: La representación interna del conocimiento algebraico

Este ejemplo ilustra cómo el sistema aplica el conocimiento para seguir al estudiante y la relación con las estructuras internas utilizadas para representar dicho conocimiento.

Supongamos que el estudiante está resolviendo la ecuación:

$$5x - 5 = 2x + 3$$

Y ha decidido que el paso siguiente es:

$$3x - 5 = 3$$

Ante esta situación, el sistema responde:

El paso es correcto y entiendo que éste podría ser tu razonamiento:

Aplicaste el inverso aditivo de la variable  $2x$ . En otras palabras, sumaste  $-2x$  en ambos lados de la ecuación.

Hiciste reducción de los términos semejantes  $5x - 2x$  y el resultado es  $3x$ .

Eso es todo, por el momento...

Lo que opera ante esta situación, es una búsqueda, por parte del sistema, de un encadenamiento de reglas que permitan explicar el paso dado. En este caso, el sistema encuentra la secuencia que aparece explicada en el recuadro.

Desde el punto de vista de la representación interna, la secuencia de que encontró corresponde a las reglas identificadas como "aplica\_inverso\_aditivo" y "reduce\_términos\_semejantes". A su vez, esta última en su proceso hace actuar a otras dos reglas: "factoriza" y "reduce\_números".

En términos genéricos, cada regla posee un nombre, una entrada, un proceso y una salida. Además, posee los parámetros para producir la mediación y, asociado a ella, están los mensajes que se utilizan para esta tarea.

A continuación, se presenta un esquema gráfico de la actuación de las reglas mencionadas.

---

``aplica_inverso_aditivo``

$A = B + Cx$	Entrada
$A = B + Cx / -Cx$	Proceso
$A - Cx = B$	Salida

**Mensaje:** Aplicaste el inverso aditivo de la variable Cx. En otras palabras, sumaste  $-Cx$  en ambos lados de la ecuación.

Esta regla, actúa cuando detecta un objeto algebraico que posee un término variable en el miembro derecho, en cuyo caso, procede a trasladarlo al otro lado de la igualdad con el signo contrario y entrega como salida la ecuación transformada.

En la codificación interna de PROLOG, esta regla y el mensaje asociado a ella, se ven así:

```
r("aplica_inverso_aditivo", % nombre
  obj(p("ecu",[O1,O2],[ ]), % entrada
  obj(p("ecu",[R1,R2],[ ]), % Salida
  [OBJcx,OBJop):- % parámetros para la mediación
    r_proced(bus_const_equis,O2,[OBJcx,OBJop,_,R2]),
    cubre("suma",[ ],[O1,OBJop],R1).

mensaje("aplica_inverso_aditivo",
  [OBJcx,OBJop],
  [txt("Aplicaste el inverso aditivo de la \n"),
  txt("variable"),OBJcx,txt(". En otras palabras, \n"),
  txt("sumaste"),OBJop,txt("en ambos lados\n"),
  txt("de la ecuación")]).
```

`"factoriza"`

Ecuación	Entrada
$Ax + Bx$	Proceso
$(A + B) x$	Salida

`"reduce_términos_semejantes"`

Ecuación	Entrada
factoriza y reduce números	Proceso
Ecuación reducida	Salida

`"reduce_números"`

$(A + B) x$	Entrada
$A + B \rightarrow H$	Proceso
$Hx$	Salida

Mensaje:

Hiciste reducción de los términos semejantes  $Ax Bx$  y el resultado es  $Hx$ .

Esta regla recibe como entrada la ecuación completa y en el proceso hace actuar a otras dos reglas: "factoriza" y "reduce\_números". A su vez, la regla "factoriza" recibe como entrada la ecuación, la analiza, detecta los objetos que poseen factor común y los entrega factorizados y, finalmente, la regla "reduce\_números" actúa sobre esta expresión factorizada y reduce las expresiones numéricas que conforman el factor. Así, la regla entrega como resultado la ecuación con sus términos semejantes reducidos.

En la codificación interna de PROLOG, esta regla junto con su mensaje poseen la siguiente apariencia:

```
r("reduce_términos_semejantes",
  OBJE,
  OBJS,
  [OB1, OB2, OBr]:
      reglas_y(OBJE,OBJS,
              ["factoriza","reduce_números"],
              [OB1,OB2,_OBr|_]).
```

```
mensaje("reduce_términos_semejantes",
        [OB1,OB2,OBr],
        [txt("Hiciste reducción de los términos\n"),
        txt("semejantes"),obj(p("suma",[OB1,OB2]),[]),
        txt("\n y el resultado es"),OBr]).
```

En el caso concreto analizado en el ejemplo 2, el encadenamiento de reglas que el sistema encuentra se puede visualizar esquemáticamente del modo siguiente:

"aplica\_inverso\_aditivo"

$5x - 5 = 3 + 2x$	Entrada
$5x - 5 = 3 + 2x / -2x$	Proceso
$5x - 5 - 2x = 3$	Salida

Mensaje:

Aplicaste el inverso aditivo de la variable  $2x$ . En otras palabras, sumaste  $-2x$  en ambos lados de la ecuación.

"factoriza"

$5x - 5 - 2x = 3$	Entrada
$5x - 2x$	Proceso
$(5 - 2) x$	Salida

"reduce\_términos\_semejantes"

$5x - 5 - 2x = 3$	Entrada
factoriza y reduce números	Proceso
$3x - 5 = 3$	Salida

"reduce\_números"

$(5 - 2) x$	Entrada
$5 - 2 \text{ ----} \rightarrow 3$	Proceso
$3x$	Salida

Mensaje:

Hiciste reducción de los términos semejantes  $5x - 2x$  y el resultado es  $3x$ .

En síntesis, cuando el sistema sigue al estudiante, resuelve las ecuaciones y comprueba que tengan el mismo resultado. Trata de determinar qué reglas matemáticas y/o heurísticas de resolución aplicó el estudiante para realizar el paso. Entrega un mensaje relacionado con las posibles reglas aplicadas y el problema que se intenta resolver.

Al actuar el sistema de esta manera, el alumno, al efectuar un paso, puede aplicar una o más reglas simultáneamente. No es necesario que vaya paso a paso, procediendo detalladamente en la resolución del problema. Puede ir a su propio ritmo, lo que le deja más control sobre su aprendizaje.

Además, el sistema detecta los casos en que el estudiante ejecuta un paso correcto pero que no le acerca a la solución del problema. Cuando esto ocurre, le indica al estudiante que su: "paso es correcto, pero seguramente estás complicando el problema..."

En la versión actual, el sistema está en condiciones de indicarle al estudiante si el paso dado fue erróneo. En el futuro, se espera incorporarle **reglas de error** que permitan detectar el error en el razonamiento del estudiante y sugerir un camino de acción para su solución.

## Una mirada hacia el interior del algebrista

### Estructura y componentes del sistema

El sistema está compuesto por tres componentes principales: el compilador, la interface y el motor inferencial. Posee, además, un módulo hipertexto que facilita la comunicación con el estudiante presentando ciertos conceptos matemáticos claves y un procesador algebraico, que le permite interpretar cualquier tipo de expresión algebraica. Todas estas componentes se relacionan entre ellas e intercambian información relativa a su actuación a través de bases de datos.

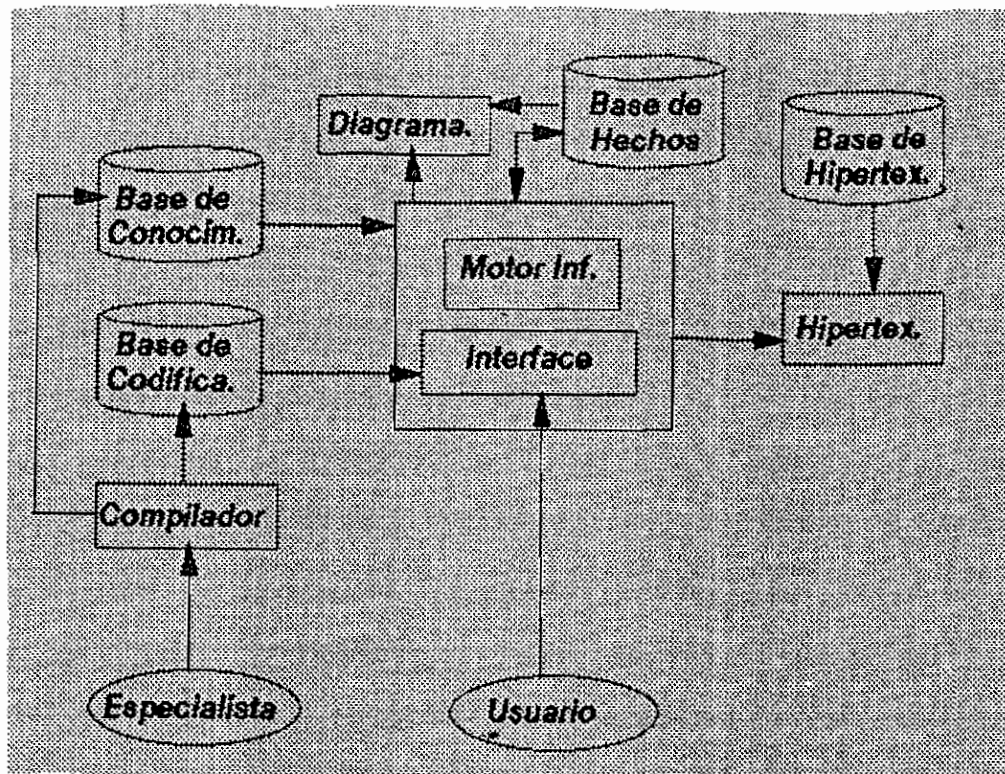


Figura 2 Componentes y estructura del "Algebrista".

El núcleo del sistema es el motor inferencial, que es la componente que interpreta el conocimiento representado y almacenado en las bases de conocimiento.

La interface es la componente que hace posible la comunicación entre el usuario y el sistema. A través de ella, el estudiante especifica su problema y el sistema va reaccionando (y dando los mensajes apropiados) de acuerdo a estas especificaciones.

El compilador es una componente que podríamos llamar anexa al sistema, pero que cumple un rol muy importante en su funcionamiento. Esta componente traduce una base de conocimiento desde un archivo de texto, y escrita en un lenguaje especialmente diseñado para representar conocimiento matemático, en una base compilada que el sistema puede comprender y trabajar.

Este compilador hace posible la incorporación del conocimiento matemático, con sus reglas respectivas, de una manera relativamente simple y se puede hacer con un editor similar a un procesador de texto. Para ello, se deben usar las palabras claves y otras convenciones definidas en el lenguaje antes mencionado, para especificar las reglas y otros formalismos propios del conocimiento matemático. En esta base se deben especificar los objetos y estructuras matemáticas propias del dominio de conocimiento en que se trabajará y las reglas que actúan sobre dichos objetos y estructuras. La base creada debe quedar guardada en un archivo de texto cuya extensión tiene que ser BCA (Base de Conocimiento Algebraico).

El compilador toma esta base \*.BCA, la interpreta y decodifica para dejarla en un formato que es "comprendido" por el sistema. Una vez compilada la base BCA, se generan dos nuevas bases cuyo nombre es el mismo, pero difieren en su extensión. Una posee extensión BCC (Base de Conocimiento Compilada), y es la que contiene las reglas

que describen el conocimiento matemático y la otra posee extensión BZC (Base de Zonas Compilada) y contiene especificaciones relativas a la representación en pantalla de los objetos matemáticos involucrados (ecuaciones, fracciones, potencias, etc.).

### **Funcionamiento del sistema**

Una vez que se ha especificado el conocimiento con que el sistema va a trabajar, esto es, la base de conocimientos compilada, es el motor inferencial el encargado de aplicar las reglas matemáticas sobre un problema específico y la interface la encargada de establecer la comunicación con el usuario. Para este efecto, analiza la base de conocimientos compilada y procede, mediante mecanismos apropiados de búsqueda y encadenamiento entre las reglas, a buscar la solución al problema algebraico planteado.

Cabe señalar que, en la base de conocimientos, existen diferentes tipos de reglas. Algunas están orientadas a tareas específicas (por ejemplo, poner y sacar un signo a un número), otras establecen las condiciones bajo las cuales ciertas operaciones son posibles, otras permiten realizar operaciones sobre los objetos, otras (las de diagramación) permiten visualizar en pantalla los objetos matemáticos y, por último, otras permiten mediar la situación de aprendizaje a que se enfrenta el estudiante.

Además, las reglas se pueden organizar en forma heurística, esto es, haciendo referencia a la forma en que son utilizadas en la práctica. Así, existen reglas subordinadas a otras reglas, que actúan sólo cuando la regla de mayor nivel lo requiere. El uso de estas reglas "organizadoras del conocimiento" permite hacer más eficiente el funcionamiento del sistema al orientar las búsquedas del motor inferencial, mejorando considerablemente el tiempo de respuesta de éste.

Una característica importante que surge en las situaciones de aprendizaje real, es que los estudiantes poseen cierto conocimiento previo y, a medida que avanzan en el proceso, van adquiriendo otros conocimientos. Esta situación se emula en el sistema, haciendo que no todas las reglas que aplica sean explicadas. Esta situación da origen a dos tipos de reglas que deben quedar explícitas cuando se genera la base de conocimientos: las reglas mediadas y reglas no mediadas.

En resumen, el motor inferencial organiza las reglas, las aplica según el orden lógico que corresponda y le traspa la información a la interface para que ésta se relacione con el estudiante.

### **El dominio de conocimiento**

El álgebra es un campo de trabajo muy amplio que contempla ciertos elementos estables, como lo son los axiomas, teoremas y propiedades, que son válidos en una determinada estructura algebraica (grupo, anillo, cuerpo). El encadenamiento adecuado de estos elementos, es lo que permite llegar a la solución de un problema algebraico.

Sin embargo, los problemas algebraicos, las más de las veces, poseen varios caminos de solución, los cuales no son rígidos y, aunque se pueden reducir a reglas propias del álgebra y de la lógica matemática, son parte de la heurística, de la experiencia personal del individuo. Esto es más notorio cuando se trata de especialistas en el tema. El sistema, al trabajar con el conocimiento algebraico, tiene que representar, sino todas, una parte importante de todas estas posibilidades.

## Definición del dominio

Para operar correctamente, el sistema debe conocer el dominio algebraico bajo el cual se trabajará. La opción por defecto es el dominio  $R(+,*)$ . Además de éste, se pueden especificar otros dominios como por ejemplo  $Zn(+,*)$  o  $N(+,*)$ . Esto le permitirá al sistema saber qué axiomas, teoremas, propiedades y/o heurísticas son aplicables. Esto es importante, ya que un problema algebraico que se puede resolver en un dominio, no necesariamente tiene solución en otro.

Una vez definido el dominio de trabajo, el segundo aspecto a definir es el tipo de problema con el cual se desea trabajar. Para ello, ofrece las siguientes alternativas:

TIPO DE PROBLEMA
Operatoria
Simp. Expr. Algebraicas
Identidades
<b>Ecuaciones</b>
Inecuaciones
Sistemas de Ecuaciones

Si no se hace ninguna especificación, se asume que se desea trabajar en resolución de ecuaciones.

De esta manera, el sistema puede reconocer el dominio matemático y el tipo de problema que se desea resolver, delimitando el tipo de conocimiento a usar, las características de la interacción y la forma de establecer la mediación.

## Interface con el usuario

La interface es la encargada de hacer operacional la comunicación alumno-sistema. Le permite al estudiante describir el problema a trabajar y recibir los mensajes que el sistema retorna relativos al problema en consulta.

Para lograr la representación en pantalla de cualquier expresión matemática y que, simultáneamente, fuera reconocida como una expresión válida de acuerdo con la representación interna del conocimiento, se trabajó con el concepto de objeto.

Un objeto es una estructura genérica que posee ciertos valores y atributos específicos que la caracterizan. Asociados a los objetos, existen funciones generales, esto es, válidas para todos los objetos, y funciones propias, que posibilitan su manipulación.

Desde el punto de vista operativo de la interface, la expresión completa, así como cada uno de sus entes individuales, son considerados y representados como un objeto. Así, la expresión es un objeto que está compuesto de otros objetos, los que también pueden, a su vez, estar compuestos de otros objetos.

Esta manera de mirar el problema, facilitó la programación de la interface e hizo posible la representación en pantalla de cualquier expresión algebraica.

De otra parte, la interface debe ofrecer al alumno cierta comodidad y facilidad en la tarea de describir las expresiones algebraicas que desea resolver. El punto crítico aquí es no hacer más difícil la forma en que el estudiante le comunica el problema al sistema que el problema mismo. Para lograr esto, se le ha incorporado a la interface el uso del mouse,

no hacer más difícil la forma en que el estudiante le comunica el problema al sistema que el problema mismo. Para lograr esto, se le ha incorporado a la interface el uso del mouse, funciones de edición que evitan rehacer lo que ya se hizo y algunas expresiones algebraicas genéricas usuales predefinidas donde sólo hay que completar los casilleros que quedan vacíos.

Es importante destacar, además, que la interface se adecúa al conocimiento expresado en las bases. De esta manera, posee una estructura genérica que se especifica una vez que se define la base de conocimiento a utilizar. En su versión actual, la pantalla de la interface tiene la estructura que se muestra en la Figura 3.

Área de funciones	E X P R E S I O N E S	P R E D E F I N I D A S
ÁREA DE TRABAJO  Paso Anterior		
Paso actual		
Ayuda en Línea	Alt-X=Salir	

**Figura 3** Estructura de la interface del "Algebrista".

Al centro está el área de trabajo, que permite describir las expresiones algebraicas y donde se van acumulando los pasos dados hacia la solución del problema. Arriba están las funciones de edición y operación del sistema. Al lado derecho están las expresiones predefinidas que se pueden utilizar para construir la expresión algebraica y abajo se muestra una ayuda en línea.

### El área de trabajo

En esta área es donde se construye la expresión algebraica y se produce la mediación. Cada transformación que el estudiante o el sistema haga a la expresión, será mostrada aquí.

Para describir el problema a estudiar, existen dos modos posibles: digitarlo directamente en una línea, para lo cual la interface dispone de un editor de línea o tomar una de las expresiones predefinidas (suma, división, ecuación y otros, de acuerdo al tipo de problemas y al área de conocimiento que se esté tratando) y completar cada una de sus componentes.

Una vez que el estudiante ha descrito su problema o un paso a la solución, el área de trabajo se divide en dos ventanas. En la ventana superior se muestra el paso dado y en la inferior el paso actual.

Cuando el estudiante ha dado más de un paso, éstos se pueden visualizar en la ventana superior a través de los indicadores ↑ flecha arriba y ↓ flecha abajo. Para hacerlo, bastará ubicar el mouse sobre el indicador que corresponda y hacer "click" con el botón izquierdo.



## Funciones de edición y operación

En esta área están las funciones para facilitar la escritura y edición del problema algebraico. Se trata de darle herramientas al estudiante para disminuir al máximo la dificultad para escribir el problema. De esta manera, se puede ir construyendo la expresión tomando partes de los pasos anteriores y modificándolas. Así, se evita tener que escribir nuevamente las expresiones completas. En caso de error en la descripción, estas funciones permiten borrar sólo lo necesario y modificar la expresión las veces que sea necesario.

Estas funciones actúan en forma directa sobre los términos que se está construyendo o bien sobre toda la expresión. Existen funciones para construir y/o editar las expresiones algebraicas y para controlar el funcionamiento del sistema. Dentro de las primeras, están las funciones para mover, copiar y borrar expresiones algebraicas y dentro de las segundas están las funciones **Entrada** (que le indica al sistema que se desea ingresar una expresión algebraica para procesarla); **Sígueme** (que le indica al sistema que el estudiante desea que lo siga en su actuación) y **Resuelve** (que le indica al sistema que resuelva el problema algebraico). Además, está la función **Ayuda** que permite obtener ayuda sobre el funcionamiento del sistema y la utilización de la interface.

## Expresiones predefinidas

Aquí, es posible encontrar varias formas algebraicas usuales. Estas formas (o iconos) se seleccionan moviendo el puntero del mouse sobre alguna de ellas y haciendo "click" con el botón izquierdo. Al seleccionar una forma, ésta va abriendo espacios en el área de trabajo que hay que completar posteriormente. Adicionalmente, las formas pueden actuar sobre un objeto ya definido, transformando su apariencia a la forma seleccionada.

Por ejemplo, si se ha ingresado la expresión  $3a + 2b$  y, posteriormente, se la ha seleccionado para editar, en ese momento si se selecciona la forma predefinida de la multiplicación ( $f(x) * g(x)$ ), inmediatamente la interface entiende que ahora la expresión algebraica es una multiplicación donde  $3a + 2b$  es uno de los factores.

Las formas predefinidas por defecto, son:

- suma  $f(x) + g(x)$ ,
- producto  $f(x) * g(x)$
- fracción  $f(x)/g(x)$ ,
- potencia  $f(x)^g(x)$ ,
- ecuación o identidad  $f(x) = g(x)$
- cambio de signo  $+ -f()$

En todo caso, las formas predefinidas están directamente ligadas al tipo de conocimiento matemático que el sistema esté trabajando. Así, es posible tener diferentes formas dependiendo del área de conocimientos. Por ejemplo, si se está trabajando con ecuaciones trigonométricas, entonces las formas predefinidas podrían ser funciones trigonométricas elementales, además de las ya mencionadas, que son utilizadas para el álgebra de los números reales.

## Área de ayuda en línea

En esta área, se despliega un texto con información acerca de la utilidad de las funciones definidas. Esto permite al usuario conocer la acción que realiza cada una de estas funciones sin necesidad de un manual de operaciones.

Además, aquí está la opción para terminar la sesión de trabajo con el "Algebrista" (Alt-X) y salir al ambiente DOS. Esto se hace presionando simultáneamente las teclas Alt y X o haciendo click sobre esta opción.

## Conclusiones y proyecciones

### Conclusiones

Desarrollar un sistema con las características del "Algebrista", implicó enfrentar y resolver una serie de aspectos, tales como: representar el conocimiento para resolver problemas algebraicos, comunicarse eficientemente con el usuario y seguir la actuación del estudiante. La versión actual del sistema da cuenta satisfactoriamente de estos aspectos y es adaptable a distintos tipos de conocimiento.

De lo avanzado, se puede concluir que, tanto el conocimiento matemático que posee un adulto como el conocimiento que utiliza para traspasarlo, son susceptibles de capturar, formalizar y representar, de modo que puedan ser usados por un sistema computacional para apoyar el aprendizaje independiente del estudiante. Uno de los problemas que hubo que resolver en el curso de la investigación, fue el diseño de estructuras adecuadas, potentes y flexibles, para representar un conjunto amplio de conocimientos matemáticos y de reglas de mediación.

En relación al desarrollo de sistemas, quedó en evidencia la importancia que tuvo el haber concebido la arquitectura interna del sistema en la forma en que se lo hizo. Lo anterior queda demostrado en el desarrollo de tres sistemas que apoyan el aprendizaje del álgebra elemental mediante la plataforma de desarrollo del "Algebrista". Este avance no hubiese sido posible de no haberse separado el núcleo del sistema —que es el que realiza la inferencia— del conocimiento en que éste se basa. Esta arquitectura permite tener sistemas distintos, que utilizan conocimiento diverso —y, por lo tanto, diversas reglas— tan sólo cambiando la base de conocimientos, sin modificar sustancialmente la estructura básica del sistema.

En el nivel de desarrollo actual, es posible que sea el propio estudiante el que propone el problema a estudiar y "seguir" el razonamiento del estudiante. El sistema puede resolver el problema, paso-a-paso y "explicar" su actuación; puede "seguir" la actuación del estudiante y "explicarla", aunque realice dos o más pasos simultáneos. Además, el estudiante puede elegir un "nivel de ayuda" entre los que dispone el sistema. En particular, puede determinar que el sistema le muestre la solución con o sin comentar sus "razones". También es posible que el sistema sea programado para que las explicaciones sean suprimidas a partir del momento que el estudiante alcance un determinado nivel de aprendizaje.

### Proyecciones

En el futuro, se espera avanzar en la línea propuesta, esto es, en el desarrollo de la plataforma para generar sistemas tutores, de modo de contar con una versión optimizada

del "Algebrista" que permita generar distintos tutores para ponerlos a prueba en ambientes reales de aprendizaje. También se trabaja en la optimización de su interface, para que pueda adaptarse flexiblemente a diversos tipos de conocimiento.

Así, de acuerdo con los resultados alcanzados, se espera: a) ampliar la gama de expresiones y reglas algebraicas expresadas en bases de conocimiento; b) diseñar un esquema generalizado para representar reglas de mediación y usarlas en los tutores y c) generalizar los resultados en ambientes educativos reales a partir de los efectos mostrados por los sistemas.

Por último, consideramos que una de las proyecciones más importantes del trabajo en su conjunto, dice relación con la posibilidad real de contar con herramientas que apoyen el aprendizaje independiente.

La práctica educativa actual, y en particular la enseñanza de la matemática, dista mucho de ser óptima en cuanto a sus resultados. Estudios recientes señalan que, en el nivel medio, una proporción cercana al 62% de estudiantes obtiene puntajes bajo el promedio (Universidad de Chile, 1993). Además, la matemática es percibida por una proporción alta de estudiantes como difícil, ajena y fuera de su alcance (Montero y González, 1989; Montero, 1988).

Ante esta situación, es tentador responsabilizar a los profesores. La realidad, en cambio, muestra que las herramientas que encuentra un profesor a su alcance para mejorar la calidad de su labor son escasas, en particular aquellas que puedan apoyar al alumno en su aprendizaje independiente. En este sentido, los sistemas tutores discutidos en esta oportunidad podrían ayudar en esa dirección.

Sin embargo, la inserción de la tecnología en general, y de los sistemas computacionales en particular, en la práctica docente, es también objeto de diversos estudios y presenta problemas complejos nada simples de resolver y merece la atención de los investigadores.

Durante la etapa de experimentación en establecimientos educacionales chilenos, se pudo apreciar las dificultades que se generan producto de la inclusión de una tecnología ajena a la práctica habitual. En algunos casos, ni siquiera proveyendo el material, los equipos y la asesoría, este grupo de investigación logró que se realizaran experiencias con los sistemas en situaciones de aula. Luego, cabe preguntarse ¿bajo qué condiciones un profesor incorpora esta tecnología a su práctica? ¿cómo se relaciona esta tecnología con su experiencia acumulada? ¿Cuáles son los desafíos profesionales que la tecnología impone al profesor?

Pensamos que la tecnología informática, mediante el desarrollo de herramientas adecuadas y aplicadas en un ambiente de experimentación, de creatividad e iniciativa profesional, puede y debe ser puesta al servicio de objetivos educativos válidos y socialmente significativos, traspasando al estudiante una cuota importante de la responsabilidad sobre su aprendizaje. Para lograrlo, sin embargo, es necesario abrir la cultura escolar, romper la inercia de la escuela y de un conocimiento que permanece estático. Es necesario, entonces, ampliar el espacio educativo tomando en cuenta el espacio simbólico total y avanzar en la tarea de incorporar a la labor escolar conocimiento proveniente de otras áreas de la cultura, la ciencia y la tecnología.

---

## Bibliografía

- CHARNIAK E. y McDERMOTT D. (1986). *Artificial Intelligence*. Reding-Massachusetts: Addison-Wesley.
- FEIGENBAUM, E. y P. McCORDUCK. (1983). *La Quinta Generación*. Barcelona España: Ed. Planeta.
- FEURSTEIN R. y otros. (1980). *Instrumental Enrichment an Intervention Program for Cognitive Modificability*. Baltimore-EE.UU: University Park Press.
- HARMON, PAUL y BRIAN SAWYER. (1991). *Creating Expert System, For Business and Industry*. New York: John Wiley y Sons, Inc.
- MONTERO, PATRICIO. (1989). "Autoconcepto para Aprender Matemática: Un Constructo basado en la Teoría de atribuciones". *Revista de Tecnología Educativa*, Vol. 11, No. 1, 1988-1989.
- MONTERO, PATRICIO y GONZÁLEZ, HERNÁN. (1988). "Hacia un pensamiento en educación matemática. Aportes de las investigaciones chilenas de los niveles básicos y medios". *Boletín Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe*. Santiago-Chile: UNESCO.
- KEARSLEY, G. (1987). *Artificial Intelligence and Instruction, Applications and Methods*. Reading-Massachusetts-EE.UU: Addison Wesley.
- OTEIZA, F.N. ANTONIJEVIC y P. MONTERO. (1990). "Una Aplicación de la Inteligencia Artificial a la Mediación del Aprendizaje independiente". *Revista de Tecnología Educativa*. Vol. XI, No. 3, Santiago-Chile: CPEIP.
- SILVA, ADRIÁN y GONZALO VILLARREAL. (1991). *Un sistema experto para orientar el aprendizaje de integrales indefinidas*. Memoria para optar al título de Profesor de Estado de Matemática y Computación. Santiago-Chile: Univesidad de Santiago de Chile.
- TOWNSEND, CARL. (1986). *Mastering Expert Systems with Turbo Prolog*. Indianapolis, EE.UU: Howard W. Sams & Co.
- Universidad de Chile. (1993). "Pre-Informe Prueba de Matemáticas. Proceso de Admisión 1993". Documento de Trabajo para la Comisión. Vicerrectoría Académica y Estudiantil. Santiago-Chile.
-