Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución

Resumen

Una actividad importante para los estudiantes en el estudio de las matemáticas es la resolución de múltiples problemas. Aun cuando los estudiantes pueden pensar que el obtener la solución de un problema es la etapa final y más importante en matemáticas, es interesante hacer notar que el análisis de la calidad de las estrategias o métodos empleados al resolver tal problema juega un papel fundamental en el desarrollo y aprendizaje de esta disciplina. En este estudio, se analiza el trabajo que *muestran* estudiantes de enseñanza media superior al interactuar con problemas que ofrecen varios métodos de solución. Los resultados muestran que, en general, los estudiantes experimentan dificultades al tratar de resolver los problemas en diferentes formas. Sin embargo, cuando los estudiantes reciben cierta ayuda y explícitamente se les pide pensar en otras formas de solución, éstos generalmente responden y muestran avances significativos. Una implicación directa para la instrucción matemática es que el análisis de las cualidades de las diversas formas de solución de un problema ofrece un potencial para los estudiantes exploren otros contextos (geométrico, algebraico, aritmético, entre otros) y establezcan o valoren los límites y ventajas de determinados métodos.

Abstract: What type of tasks or problems helps students develop a mathematical disposition in the study *of mathematics? has been an important research* question in mathematical problem solving. Students may think that getting the solution of a problem is the most significant part of the solution process, however, the analysis of the qualities of the strategies or methods used to solve problems plays an important role during the development and study of mathematics. This paper documents the work shown by high school students who were asked to work on problems that included multiple ways or methods of solution. Results shows that students experienced difficulties to think of various or different forms to solve a problem initially. However, when they received some help and were asked explicitly to think of another approach, they normally showed significant progress. There is indication that asking students to use different methods of solution help them discuss and value mathematical ideas related to those methods. For instance, some students realized that using special cases, or trial and error methods could be as efficient as using algebraic approaches.

Luz Manuel Santos Trigo[1]
CINVESTAV, México

[1] La escritura de este trabajo se realizó mientras el autor realizaba una estancia de investigación en la "University of California, Berkeley". Se agradece el apoyo de CONACyT y del CINVESTAV.

Introducción

En los últimos años, ha habido gran interés por restructurar el sistema educativo no sólo en matemáticas sino, también, en el estudio de las ciencias en general. Se parte de la premisa de que una mejor educación le ayudará al individuo a responder adecuadamente a los cambios y necesidades sociales. Por ejemplo, desde el punto de vista del trabajo de un obrero, se observa que existe una tendencia a que realice actividades donde tiene que responder y ajustarse a situaciones cada vez más complejas. Es decir, es importante que aprenda a usar diferentes aparatos en tiempos cortos y transferir sus conocimientos a diversas situaciones o contextos. Parece que la idea de mantenerse realizando la misma rutina a través de los años ha ido cambiando y ahora se pide que un trabajador cambie y se ajuste al desarrollo de varias actividades constantemente. Los avances de la tecnología están contribuyendo a que exista este tipo de movilidad en la fuerza de trabajo. Este fenómeno se observa tanto en campos tan tradicionales como la agricultura (mecanización) o más especializadas como la producción de automóviles o aparatos electrónicos. En la misma dirección, los problemas y movimientos sociales requieren que la población en general pueda entender, interpretar, y contrastar diversos tipos de información. Esto es una necesidad en cualquier medio donde se valore la participación crítica de la gente en la toma de decisiones. El leer un periódico, oír la radio, o el comprar un producto requiere que el individuo analice a diversos niveles ciertos tipos de información, y, en consecuencia, responda de acuerdo a ciertos criterios o metas individuales o sociales.

¿Qué tipo de conocimiento ayuda al individuo a responder adecuadamente en esta sociedad en constante transformación?¿Qué habilidades y estrategias deben promoverse en la educación preuniversitaria del estudiante? son algunas preguntas que han servido de base en las propuestas de qué conocimiento y de cómo éste debe ser aprendido por los estudiantes. Particularmente, en cuanto al estudio de las matemáticas han surgido grandes movimientos donde se han propuesto líneas generales acerca de los fundamentos que los estudiantes deben aprender en su educación preuniversitaria (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, 1991, 1995; Steen, 1990; Schoenfeld, 1994; Santos, 1994). En esta dirección, no solamente resulta importante que el estudiante aprenda una gama de contenidos matemáticos, reglas, fórmulas, y procedimientos; sino que también es necesario que desarrolle un conjunto de habilidades y estrategias que le permitan aplicar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. En este proceso, es importante que el estudiante proponga y analice conjeturas, formule, rediseñe, y resuelva diversos tipos de problemas. Además, es necesario que el estudiante desarrolle cierta disposición hacia el estudio de las matemáticas donde valore y comunique eficientemente sus ideas.

En países como Estados Unidos y Canadá el movimiento de restructurar el estudio de las matemáticas explícitamente recomienda que la resolución de problemas matemáticos debe ser la actividad esencial en el estudio de esta disciplina (Santos, 1993). De hecho, en los últimos 20 años la resolución de problemas ha sido una línea importante en la investigación en educación matemática. Esto ha influido en el desarrollo de propuestas curriculares, y, como consecuencia, en lo que ocurre en el salón de clases. Por ejemplo, Alan Schoenfeld inició un programa de investigación en los setenta con énfasis en la resolución de problemas. En el desarrollo del programa, Schoenfeld ha estudiado en detalle cómo matemáticos y estudiantes interactúan con problemas y tareas matemáticas. Alrededor de la investigación, Schoenfeld ha diseñado un curso de resolución de problemas cuyo objetivo ha sido que los estudiantes aprendan a pensar matemáticamente y a desarrollar matemáticas en el salón de clases (Schoenfeld, 1992). Entre los resultados importantes de esta línea de investigación está la categorización del proceso utilizado por los individuos al resolver problemas matemáticos.

En el presente estudio, se analizan las cualidades de los diversos métodos que utilizan estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas que involucran diversos modos de solución. En virtud de que los problemas seleccionados para la investigación sólo requieren recursos matemáticos previamente estudiados, el análisis se enfoca qué tipos de estrategias, y cómo los recursos son empleados por los estudiantes en el proceso de solución.

La Importancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas

¿Qué tipo de problemas promueven o motivan a los estudiantes a discutir y valorar el uso de diversas estrategias? es una pregunta que inquieta tanto a los investigadores como a los profesores de matemáticas. Schoenfeld (1994) recomienda que los problemas deben incluir un lenguaje e *ideas matemáticas entendibles* para estudiantes con distintos niveles de sofisticación o aprovechamiento matemático. Santos (1995) analiza los problemas que Schoenfeld ha utilizado en sus cursos de resolución de problemas y afirma que la mayoría de los problemas son familiares para los estudiantes. Lo que los hace diferentes es la manera de resolverlos, ya que durante el proceso de solución los estudiantes dedican gran tiempo a la exploración de conexiones, extensiones, y al análisis de cualidades de los diversos métodos de solución.

Entre las propiedades que la mayoría de los problemas seleccionados para la discusión durante el desarrollo del curso destacan:

1. Sin ser triviales, los problemas deben ser accesibles a los estudiantes en base a sus conocimientos previos. No deben requerir el uso de ideas sofisticadas o gran cantidad de procedimientos mecánicos.
2. Deben poderse resolver por medio de diferentes formas o caminos (varios métodos de solución).
3. Deben ilustrar ideas matemáticas importantes.
4. No deben involucrar trucos o soluciones sin explicación.
5. Deben poder extenderse o generalizarse a otros contextos donde se muestren exploraciones o conexiones matemáticas.

Santos (1993) emplea problemas con diversos métodos de solución como un medio para explorar las estrategias que estudiantes a nivel universitario muestran durante el proceso de resolución. De hecho, esta misma idea se retoma en la selección y preparación de los problemas utilizados en el presente estudio.

Marco conceptual

El quehacer matemático es un acto de encontrarle sentido a las ideas matemáticas. Durante esta actividad, es común el buscar patrones y relaciones, el comunicar las ideas, el usar métodos empíricos, y el trabajar a nivel comunidad. En este contexto, es importante que estas ideas se vean reflejadas en el salón de clases. Es decir, es importante que la instrucción matemática sea un medio para que los estudiantes participen en la construcción y encuentren sentido a las ideas matemáticas. Así, el tipo de problemas o tareas matemáticas juegan un papel importante en el aprendizaje de esta disciplina. Lamper (1990) indica que "escoger y usar 'buenos' problemas e instituir los medios apropiados para una comunicación en el salón de clases pueden pensarse como las tareas fundamentales que el maestro necesita llevar a cabo en la enseñanza de las matemáticas" (p. 125). Es decir, los problemas deben tener el potencial para que los estudiantes tengan la oportunidad de conectar las ideas matemáticas, así como evaluar y discutir las estrategias que aparezcan durante el proceso de solución.

Algunos principios fundamentales, consistentes con el enfocar el aprendizaje de las matemáticas a la resolución de problemas, incluyen el que es posible que los estudiantes participen en actividades similares a las que los matemáticos realizan al trabajar en esta disciplina. Así, los problemas son un medio para que los estudiantes discutan y defiendan sus ideas, especulen acerca del potencial de cierto método de solución, utilicen argumentos matemáticos que soporten sus conjeturas, o propongan contraejemplos que contradigan algún resultado.

Al analizar el trabajo de los estudiantes, se utilizó un marco que ayuda a caracterizar las diversas acciones que éstos muestran al resolver problemas. El marco se basa en el trabajo de Schoenfeld, el cual ha permitido explicar muchas de las dificultades que los estudiantes experimentan en el proceso de encontrar la solución de problemas (Schoenfeld, 1992). Sin embargo, es importante mencionar que no existe en la actualidad un marco completo coherente que explique cómo los múltiples aspectos del pensamiento matemático se ensamblan en la resolución de problemas. Santos (1993) analiza las dificultades de los estudiantes al resolver problemas no rutinarios a través de un marco que incluye aspectos relacionados con el marco epistémico de la propia matemática y las estrategias metacognitivas.

De manera general, Schoenfeld identifica varias categorías o dimensiones que explican el proceso de resolución de problemas. Entre los aspectos importantes que ayudaron a organizar y analizar el trabajo de los estudiantes en el presente estudio se destacan:

i. **Los recursos matemáticos.** El estudiante, al enfrentarse a un problema, recurre o identifica espontáneamente una serie de elementos matemáticos básicos que le pueden ser de utilidad al resolver el problema. Es decir, los hechos básicos, las definiciones, los algoritmos, reglas, y procedimientos que el estudiante emplea en la resolución de problemas. En este sentido, no solamente es importante que el estudiante conozca los recursos matemáticos sino que también desarrolle diversas estrategias para acceder y utilizarlos eficientemente al resolver problemas.

ii. **Las estrategias heurísticas.** Un componente esencial en la resolución de problemas es el uso de varias estrategias en las diversas fases del proceso de solución. Polya (1945) ilustra con varios ejemplos la importancia de utilizar estrategias como "el uso de casos particulares", "la búsqueda de analogías", "el uso de elementos auxiliares" "el uso de diagramas" "la presentación de una lista ordenada o tabla" tanto en la fase de entendimiento del problema como en el diseño de un plan de solución.

iii. **La autorregulación, o monitoreo y control del proceso de solución.** Al trabajar algún problema matemático uno puede encontrar varias dificultades en el camino hacia la solución. En este sentido, existen estrategias de monitoreo o evaluación de las ideas usadas por el estudiante en las distintas fases de solución del problema. Por ejemplo, es importante reflexionar constantemente en aspectos relacionados con el diseño de un plan, la toma de decisiones, y la verificación o sentido de los resultados. Así, la evaluación de las estrategias utilizadas juegan un papel importante en la toma de decisiones que permitan resolver tales dificultades. Schoenfeld (1992) ilustra la importancia de poner atención al proceso cuando describe y analiza el trabajo de algunos estudiantes al resolver un problema:

> Los estudiantes leyeron el problema, rápidamente seleccionaron una estrategia para resolverlo y la intentaron implementar. Siguieron trabajando a pesar de que era claro de que no había ningún progreso hacia la solución. El tiempo se les terminó, y al final, no pudieron explicar cómo la estrategia que habían elegido les habría podido ayudar a resolver el problema (pp. 355-356).

Schoenfeld afirma que el estudiante, en general, muestra este comportamiento cuando se enfrenta a problemas que no son solamente ejercicios rutinarios. De hecho, Schoenfeld va más allá al indicar que la principal diferencia entre un matemático o experto y un estudiante al resolver un problema descansa en que el experto muestra un claro control y monitoreo constante del proceso de solución. Así, un experto dedica más de la mitad del tiempo tratando de encontrarle sentido al problema. En este contexto, analiza, explora, conjetura, y evalúa varias opciones antes de tomar una dirección determinada. Por otro lado, los estudiantes al intentar resolver problemas, en general, dedican poco tiempo a la fase de entendimiento del problema y muestran poca flexibilidad en cuanto al cambio de estrategias; aun cuando el camino seleccionado no le esté dando buenos resultados.

iv. **Las ideas o creencias acerca de las matemáticas.** Las ideas que los estudiantes muestran, al resolver o trabajar problemas matemáticos, reflejan lo que ellos creen acerca de las matemáticas. Estas ideas influyen en la motivación, participación, y hábitos de trabajo del estudiante al estudiar esta disciplina. Schoenfeld indica que lo que los estudiantes piensan acerca de las matemáticas está directamente relacionado con lo que pasa en el salón de clases. Al observar el desarrollo de diversas clases de Geometría durante un año, Schoenfeld (1992) encontró que:

> ...ninguno de los estudiantes de las clases observadas trabajó tareas matemáticas que pudieran ser consideradas como problemas. Lo que trabajaron fueron ejercicios, o tareas designadas a dominar pequeños pedazos del tema [en estudio] en un corto tiempo....El propósito u objetivo parecía claro: Si entiendes el material, puedes trabajar los ejercicios. Si no puedes resolver los ejercicios en un tiempo razonable, entonces no has entendido el material. Esto es una señal de que debes buscar ayuda (p. 359).

Es aquí donde se observa que muchas de las actividades que ocurren en el salón de clases contribuyen a que los estudiantes desarrollen ideas que influyen negativamente en la resolución de problemas.

Así, durante el análisis del trabajo de los estudiantes, fue importante explorar a qué nivel las dimensiones anteriores se reflejaban en las formas de solución.

Métodos y procedimientos

Treinta y cinco estudiantes, todos voluntarios, participaron en el estudio[2]. Cada estudiante trabajó en los problemas alrededor de una hora. El método de trabajo fue a nivel de entrevista donde se le pidió al estudiante pensar en voz alta. El entrevistador siempre trató de reducir su participación a un mínimo y algunas veces cuestionó al estudiante acerca de algo que no era claro, o le dio alguna ayuda mínima en caso de existir algún bloqueo. Los problemas utilizados en las entrevistas fueron:

1. Pedro y María visitaron una granja el fin de semana la cual produce gallinas y cerdos. Pedro observó que en total había 19 cabezas, mientras que María dijo que tenían 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en esa granja que visitaron?
2. ¿Puedes encontrar dos números enteros positivos **a** y **b** cuyo producto sea un millón y ninguno de los dos números incluya ceros en su representación? ¿Es este par de números único?
3. Un libro se abre al azar. El producto de los números de las páginas observadas es 3192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?

Una fase importante en el desarrollo del estudio fue el examinar cada uno de los problemas en detalle antes de presentarlos a los estudiantes. Así para cada problema se identificaron algunas soluciones anticipadas. Es importante mencionar que no se esperaba que los estudiantes siguieran algunas de las soluciones anticipadas, sino que en principio sirvió como herramienta metodológica para planear y desarrollar las entrevistas con los estudiantes. Por ejemplo, el entrevistador antes de observar al estudiante trabajar en los problemas había diseñado una serie de preguntas que podía usar en caso de que este mostrara serias dificultades. Posteriormente, este trabajo fue importante al caracterizar las cualidades e ideas mostradas por los estudiantes.

La siguiente tabla representa las ideas fundamentales relacionadas con cada uno de los problemas.

Problema	Métodos de solución	Estrategias	Contenido
El problema de la Granja	* Pictográfico * Ensayo y Error * Correspondencia * Algebraico	Uso de diagramas o dibujos reales, Lista sistemática, tabla, ecuaciones o comparaciones	Operaciones fundamentales con enteros, ecuaciones de primer grado, o sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
El problema del Millón	*Prueba de los divisores *Factores Primos *Problema más simple	Lista, tabla, pensar un problema más simple (10, 100, o 1000), y busca de patrones	Multiplicación y división de enteros, factorización, exponentes, y números primos.
El problema de las páginas	* Ensayo y error * Factorización * Raíz cuadrada * Álgebra	Estimación, prueba y error, lista sistemática, representación simbólica, y ecuaciones.	Números consecutivos, multiplicación de enteros, factorización, significado de la raíz cuadrada, y ecuación cuadrática.

[2] Los estudiantes que participaron en este estudio pertenecían a escuelas públicas de la provincia de British Columbia, Canadá (grado 10 que es equivalente al primero de educación media superior del sistema Mexicano).

Un ejemplo del tipo de soluciones anticipadas que se trabajaron para cada problema se ilustra a continuación tomando como referencia el problema del millón. Este trabajo sirvió para diseñar un instrumento para la captura de información y también para elaborar un conjunto de preguntas que podía ayudar a los estudiantes en las diferentes fases del proceso de solución.

a) Factorización: La idea aquí es factorizar 1 000 000, es decir

		Factores		
		a	b	
1	1 000 000	1	1 000 000	no
2	500 000	2	500 000	no
2 × 2	250 000	4	250 000	no
2 × 2 × 2	125 000	8	125 000	no
2 × 2 × 2 × 2	62 500	16	62 500	no
2 × 2 × 2 × 2 × 2	31 250	32	31 250	no
2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2	15 625	64	15 625	si

b) Casos más simples: Aquí se consideran números más pequeños y se encuentra sus factores de acuerdo a las condiciones del problema. Por ejemplo, la siguiente tabla nos orienta acerca de la dirección de la solución:

Producto	*10*	*100*	*1000*	10 000	...
Factores sin ceros	2 × 5 2 × 5	4 × 25 2 2 2 × 5	8 × 25 3 3 2 × 5	16 × 625 4 4 2 × 5	... ...

En la tabla, se observa el patrón entre el número de ceros y la potencia de los factores. De aquí que 1 000 000 se pueda representar como 26 × 56.

c) Otro método de solución puede involucrar el encontrar los factores primos del número 1 000 000 como punto de partida. Al observar que cuando estos factores (2 y 5) contribuyen juntos en un factor entonces producirán un cero en el producto. Por lo tanto, deben arreglarse de tal manera que aparezcan en factores diferentes. La única alternativa es 26 × 56 lo que resuelve el problema. Esta misma idea ayuda a resolver la parte de la unicidad de la solución.

Resultados de las entrevistas

En la presentación de los resultados, no existe interés por cuantificar estrictamente el número de estudiantes que mostró determinado trabajo. Se intenta realizar un análisis de carácter cualitativo, sin embargo, cuando determinado aspecto del trabajo incluya más del 50% de los estudiantes, se usará el término "la mayoría"; cuando esté por abajo del 50% se utilizará "algunos", y cuando sea necesario, se hablará de casos concretos, o puntuales, como por ejemplo uno o todos los estudiantes. La estructura de la presentación de los resultados se inicia con una primera caracterización de lo que ocurrió a nivel macro para cada problema. Aquí se presenta algún ejemplo donde se ilustra el tipo de trabajo mostrado por los estudiantes con algunos comentarios. Después, esta información sirve de base para discutir los resultados en un contexto más específico del uso de diversas estrategias. En esta parte es donde los elementos del marco conceptual se identifican explícitamente en el trabajo de los estudiantes.

En el problema de la granja el método más común usado por los estudiantes fue el representar el problema algebraicamente. Es decir, trataron de simbolizar las variables del problema y establecer las ecuaciones correspondientes. Se observó que la mayoría no le dedicó tiempo a tratar de analizar y entender la información del problema, sino que inmediatamente empezaron a escribir los datos del problema. Algunos estudiantes utilizaron diferentes símbolos (letras) para representar las gallinas, cerdos, cabezas, y patas. Este tipo de representación posteriormente los confundió cuando trataron de establecer algunas relaciones. El hecho de que se enfrentaran a ciertas dificultades fue importante para que regresaran al enunciado del problema y entendieran lo que el problema les pedía. En general, con algunos tropiezos, los estudiantes resolvieron el problema. Al obtener la respuesta sólo dos estudiantes verificaron la solución. Aquí, el entrevistador les preguntó que si podían resolver el problema con un método diferente. La mayoría reconoció que sí había un "camino largo" en donde podían usar ensayo y error. Cuando se les pidió que lo intentaran, la mayoría no inició con un método sistemático, incluso algunos estudiantes sugirieron casos extremos como el considerar 19 gallinas y 10 cerdos. Ninguno de los estudiantes usó alguna tabla o diagrama al resolver el problema y la mayoría usó la calculadora incluso para verificar aún operaciones con números pequeños. Por ejemplo, un estudiante sumó 19 y 60, después dividió el resultado entre 2 y 4, obteniendo así 34.5 y 17.2 respectivamente. Con estas operaciones el estudiante concluyó que había 34.5 gallinas y 17 cerdos.

De manera general, los estudiantes al trabajar el problema inmediatamente después de leer el enunciado empezaron a realizar algunas operaciones. En la mayoría de los casos no se tenía claridad de qué información era importante y cómo tratar de establecer ciertas relaciones con los datos. Las dificultades que tuvieron que enfrentar al tratar de encontrar algunas relaciones les dieron la pauta para regresar y releer el enunciado varias veces. Fue claro que los estudiantes asociaron la información del problema con algunas operaciones, pero mostraron dificultades para pensar en algún plan que les ayudara. Un ejemplo del tipo de trabajo mostrado por los estudiantes se presenta a continuación:

Ana leyó el problema. Inició tratando de representar a las gallinas (c), cerdos (p), cabezas (h), y patas (p). Esto le causó cierta confusión. Después, dividió 60 entre 4 y 19 entre 2. Escribió, 15 y 9 como resultados.	El entrevistador aquí le pidió que explicara su solución.
Ana respondió que había 15 cerdos y 9 gallinas.	El entrevistador le sugirió que si podía verificar su solución con la información del problema.
Aquí Ana se dio cuenta que no estaba tomando en cuenta la información. Como consecuencia volvió a leer el problema, concluyó que había 19 animales y que posiblemente podía tener 10 gallinas y 9 cerdos. Sin embargo, cuando contó el número de patas se dio cuenta de la respuesta no cumplía las condiciones. En seguida empezó a usar ensayo y error primero arbitrariamente, y después sumando y restando una unidad a cada número, pero manteniendo el 19 como fijo.	Fue aquí donde Ana empezó a mostrar cierta confianza y trabajar con las operaciones rápidamente.

En el problema del millón, a la mayoría de los estudiantes les costó trabajo aceptar que pudieran existir tales factores inicialmente. Con la ayuda de la calculadora empezaron a checar algunos posibles candidatos sin tener éxito. La mayoría intentó representar el problema algebraicamente como **a** × **b** = 1 000 000 y así despejaron **a** = 1 000 000/ **b**. **Tomando como referencia esta expresión, le asignaron valores a b** y calcularon con la ayuda de la calculadora el valor correspondiente de **a**. Después de varios intentos, concluyeron que no era posible encontrar tales factores. Es importante mencionar que ningún estudiante avanzó hacia la solución del problema por sí mismo. Cuando el entrevistador sugirió el tratar de resolver el problema con números más pequeños que 1 000 000, entonces algunos fueron capaces de detectar un patrón al analizar casos como: 10 = 2 × 5, 100 = 4 x 25 y así sucesivamente. Sólo un estudiante intentó factorizar 1 000 000. En este intento observó que había una serie de 2s y 5s; sin embargo, aun con esta información no pudo arreglar o llegar a la solución requerida. La segunda parte del problema resultó también ser difícil para todos los estudiantes. Nadie fue capaz de explicar lo que de alguna forma intuyeron de que no había otra pareja de factores. Dos estudiantes mencionaron de que dado que con el 10 y el 100 no era posible encontrar otras representaciones, entonces lo más seguro era que tampoco era posible para 1 000 000. Al solicitarles algún argumento que sustentara tal aseveración, se dedicaron a enlistar todos los pares que dieran 100 y en ningún momento hablaron de las propiedades de los factores (primos).

En general, se observó que los estudiantes trataron de resolver el problema a través de la búsqueda de ejemplos concretos. En virtud de que estos ejemplos no satisfacían las condiciones, entonces pensaron que no existían tales números. En este problema fue claro que los estudiantes mostraron *una carencia de estrategias y criterios que les permitieran* decidir acerca de la existencia de tales factores. Para la mayoría, el hecho de que no funcionaba o no encontraban tales números para 4 o 5 casos era suficiente. O el hecho de que para el 10 y el 100 sólo existía una pareja de factores era suficiente para generalizar.

Pedro leyó el problema y empezó a realizar algunos cálculos con la calculadora: 963 × 56 = 53 928; 99 987 × 89 = 9 799 804; 9999 × 89 = 889 911; y 99 999 × 89 = 899 911.	Pedro mencionó que iba a ser difícil obtener los números con este método. Sin embargo, dijo que *no se le ocurría otra forma. Cuando se observó* que podía continuar por largo tiempo, el entrevistador le sugirió el trabajar con números más pequeños.
Pedro empezó a trabajar con el 10 y escribió: 10 = 5 × 2; en este momento dudó en continuar, después de una pausa escribió 100 = 25 × 4; 1000 = 125 × 8; 10 000 = 625 × 16. En base a este *desarrollo, Pedro mencionó que había una* relación entre el número de ceros y los exponentes de 5 y 2. Es decir, notó que 1 000 000 = $5^6 \times 2^6$.	Se le pidió que explicara el porque tales números correspondían a la solución.
Con la ayuda de la calculadora, Pedro realizó las operaciones y encontró tales números. Aquí mencionó que el problema no fue fácil hasta que pudo encontrar el patrón.	Se le pidió que explicara cómo había determinado el patrón. Contestó que el 10 y el 100 le dieron la pauta. Pero solamente hasta que encontró los números fue cuando sabía que el patrón funcionaba.
Al final expresó de que estaba seguro de que no había otros pares ya que las otras incluían al cero.	Aquí se le preguntó acerca de la existencia de otras parejas diferentes. Su respuesta aquí fue que como el 10, 100, ..., tenían sólo a el 2 y el 5 como factores, entonces se podía intuir que lo mismo ocurría con 1 000 000.

En el problema de las páginas, la mayoría de los estudiantes representaron el problema algebraicamente; sin embargo, tuvieron dificultades al tratar de resolver la ecuación cuadrática. Se observó que algunos estudiantes intentaron despejar la variable de la siguiente manera: partiendo de $x^2 + x = 3192$ llegaron a $x + 1 = 3192/x$ sin darse cuenta que no se trataba de una ecuación lineal. Esto fue una de las dificultades iniciales que no les permitía avanzar. Cuando se les preguntó a los estudiantes acerca de si se podía trabajar el problema con otros métodos, respondieron que quizás usando el método largo (ensayo y error).

Al intentar usar ensayo y error, algunos estudiantes empezaron a proponer algunos números sin tener en cuenta la condición de que los números tenían que ser consecutivos. Este hecho ocurrió aun en algunos estudiantes que inicialmente habían representado el problema algebraicamente en forma correcta. Ningún estudiante usó la idea de la raíz cuadrada como una forma de seleccionar los posibles candidatos. En general, los estudiantes encontraron productos consecutivos mayores y menores que 3192 y tomando esto como referencia empezaron a checar las posibilidades en este rango. Fue difícil para los estudiantes el pensar en otros métodos de solución aun cuando no mostraban avances en sus intentos originales. Es decir, seguían con el método inicial, y hasta que, después de un tiempo, decidían abandonar el problema.

Discusión de los resultados y algunas recomendaciones

Entre las categorías importantes que moldearon el trabajo de los estudiantes se destacan la idea general de cómo resolver problemas (creencias o concepciones). Por ejemplo, se observó una carencia de un plan organizado que les ayudara a entender el enunciado de los problemas y a identificar las ideas esenciales que había que considerar. Además, dado que un aspecto fundamental en el contenido del primer año de bachillerato es el uso del álgebra (problemas verbales), la mayoría de los estudiantes trató de aplicar estas ideas al resolver los problemas aun cuando mostraban dificultades en este camino. Es decir, parece que les parece natural que el contenido que han estudiado recientemente tiene que funcionar necesariamente en los problemas que se les presenten. Los resultados muestran que los estudiantes seleccionan el método algebraico como la forma obligada para resolver casi cualquier problema y le dan poca importancia a otras alternativas. Por ejemplo, parece que no valoran estrategias como ensayo y error o el uso de representaciones gráficas. Esta tendencia de los estudiantes es similar a los resultados reportados por Lave (1988) en donde algunos adultos resolvieron problemas relacionados con las compras en el mercado correctamente en un 95%. Sin embargo, cuando estos mismos problemas fueron dados en un contexto escolar, estos mismos adultos respondieron en forma correcta sólo en un 60%. Cuando se les cuestionó acerca de los métodos usados en sus compras, afirmaron que los métodos enseñados en la escuela eran más efectivos aun cuando habían fallado al utilizarlos.

La idea que los estudiantes tienen en relación a operar con números fue evidente cuando intentaron trabajar la solución a partir de ciertos cálculos, la mayoría de las veces sin un orden determinado. En este sentido, parece que lo que les interesaba era obtener un resultado, sin preocuparles si éste correspondía a las condiciones del problema. Además, en general, piensan que la consideración de algunos casos les proporciona elementos suficientes para validar o rechazar alguna hipótesis. Esto fue evidente en el problema del millón.

En general, los estudiantes redujeron a un segundo plano estrategias como "ensayo y error" y el "uso de diagramas o figuras", parece que la idea que se tiene acerca de este tipo de estrategias es que son tediosas y no se usan comúnmente en matemáticas. Sin embargo, cuando se les pidió que emplearan métodos diferentes de los algebraicos, se observó que nunca utilizan "ensayo y error" en forma organizada. Quizás, este hecho los haga pensar que el usarlas no es un buen camino. El uso de tablas o listas ordenadas en *ningún momento* pareció *ser importante en la exploración de algunos casos concretos.* Un hecho consistente en los intentos de solución fue que, al tratar de realizar algunas operaciones y no avanzar en la solución ello fue importante para que los estudiantes regresaran y dedicaran más atención al enunciado del problema.

Se observó que, en general, los estudiantes no verifican cuándo las soluciones que obtienen cumplen con las condiciones del problema. Tampoco monitorean el curso de las acciones que emprenden en sus intentos de solución. En algunos casos, reducen la evaluación del proceso a checar si han cometido algún error en las operaciones que realizaron. Esto naturalmente influye que muchas veces propongan soluciones que no tienen sentido en el problema. Además, para los estudiantes parece que sólo cuenta obtener la solución por un método y si este método no funciona, entonces lo más seguro es que abandonen el problema. Por ejemplo, al intentar resolver el problema de las páginas, la mayoría de los estudiantes seleccionaron el método algebraico, sin embargo al no poder resolver la ecuación cuadrática no se les ocurrió trabajar otra forma. Aquí se tuvo que intervenir para que usaran otro camino, y al tratar de utilizar ensayo y error no consideraron que los números tenían que ser consecutivos aun cuando esta condición la habían representado correctamente un poco antes.

Los resultados mostraron que el uso de este tipo de problemas ayuda a explorar las dificultades que los estudiantes experimentan en el proceso de solución. Una de las recomendaciones es que problemas que ofrezcan un potencial para que el estudiante discuta las cualidades y potencial de varias estrategias de solución deben ser una parte importante en las actividades de aprendizaje. Además, es necesario que no solamente se valore la solución final que se obtenga, sino que se discutan también las estrategias, conexiones, y extensiones que se puedan establecer durante el proceso de solución. Es importante también que se valore la forma de comunicar y establecer argumentos matemáticos que soporten las soluciones. Schoenfeld (1988) sugiere que el establecimiento de un microcosmos de la práctica matemática en el salón de clases es un punto esencial para lograr estas metas. En este microcosmos, el estudiante tendrá la oportunidad de expresar y defender sus ideas, especular y establecer conjeturas, reflexionar acerca del potencial de diferentes métodos para resolver problemas, establecer conexiones, y formular o explorar otros problemas. Así cuando el estudiante observe que estas son las actividades importantes durante su experiencia en el aprendizaje, empezará a valorar y practicar lo que los expertos muestran cotidianamente en el quehacer matemático.

Finalmente, es necesario mencionar que la mayoría de los estudiantes resolvieron los problemas cuando recibieron cierta dirección. El simple hecho de preguntarles el significado de sus respuestas muchas veces fue suficiente para que revisaran y analizaran con detalle el planteamiento del problema. Algunos, aun cuando inicialmente no fueron sistemáticos al presentar posibilidades o casos, al cuestionárseles acerca del orden, fueron capaces de mostrar una lista de eventos más ordenada. En este sentido, fue claro que los estudiantes tenían los recursos necesarios para trabajar los problemas; sin embargo, parece que no han desarrollado estrategias que les permitan usar y acceder a tales recursos eficientemente.

Conclusiones

Un objetivo fundamental en el desarrollo del trabajo fue el explorar las estrategias que utilizan los estudiantes al resolver problemas con múltiples formas de solución. Las ideas que de alguna forma les han funcionado en el estudio de las matemáticas no fueron suficientes para abordar los problemas presentados en el estudio. Aun cuando los estudiantes tenían los recursos matemáticos necesarios para resolver los problemas, en general, les costó trabajo utilizar tales recursos y así usarlos eficientemente en el proceso de solución. En la fase inicial, que incluye el encontrar el sentido del enunciado del problema, los estudiantes simplemente no le dedican tiempo al análisis de los elementos y relaciones del problema. En la mayoría de los casos, creen que siempre es más conveniente usar álgebra que otros métodos aun cuando no logren avanzar por tal camino. La carencia de un plan de solución fue evidente en el trabajo de los estudiantes. Un resultado importante de este estudio es que es necesario que este tipo de problemas aparezcan frecuentemente en la instrucción. Así, cuando el estudiante directamente discuta las cualidades y limitaciones de los diversos métodos, éstos podrán valorar y aceptar que esto es una actividad fundamental en el estudio de las matemáticas. Además, este tipo de problemas puede ayudar a los maestros a identificar las dificultades que los estudiantes muestran al interactuar con los problemas. Como Easly (1977) indica "los maestros tendrán que entender muy bien el proceso del desarrollo cognitivo y escuchar y observar a los estudiantes cuidadosamente para tener una idea razonable acerca de qué clases de operaciones mentales usan al interactuar con los problemas" (p. 21).

Finalmente, el presente estudio ilustra la importancia de discutir los problemas entre colegas. Esta discusión ayuda a identificar y categorizar las diversas formas de solución de los problemas. Este tipo de actividad también debe promoverse entre los estudiantes ya que contribuye a desarrollar un punto de vista de las matemáticas más consistente con el quehacer matemático (Santos, 1994).

Bibliografía

EASLY, J.A. (1977). *On clinical studies in mathematics education.* Columbus, OH: Ohio State University, Information Reference Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

LAMPERT, M. (1990). Connecting mathematical teaching and learning. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 121152). State University of New York Press. New York.

LAVE, J. (1988). Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life. Cambridge University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1990). *Professional standards for teaching mathematics: Working draft.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

POLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

SANTOS, T.M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Cuaderno de investigación #28. México: CINVESTAV, Departamento de Matemática Educativa.

SANTOS, T.M. (1994b). Hacia el desarrollo de una comunidad matemática en el salón de clases. *Hoja Informativa*. Grupo de Estudios Sobre la Enseñanza de la Matemática del Bachillerato. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

SANTOS, T.M. (1993). *Learning mathematics. A perspective based on problem solving*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAVIPN: México.

SANTOS, T.M. (1995). *On mathematical problem solving instruction: Focusing on moral associated with the class problems*. Paper presented at the function group meeting. University of California, Berkeley.

SCHOENFELD, A. (1988). Mathematics, technology, and higher order thinking. In R. Nickerson & P. Zodhiates (Eds.), *Technology in Education: Looking toward 2020*, (pp. 6796). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (ed). *Hanbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334370). New York: Macmillan.

SCHOENFELD, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

STEEN, L.A. (1990)(Ed.). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. National Academic Press. Washington, D.C: National Academic Press.