Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de química

Resumen

Este artículo recoge un análisis de los errores más frecuentes cometidos por estudiantes de Matemáticas de 2° curso de la Licenciatura de Química (Universidad de Sevilla, España) en el trabajo con Ecuaciones Diferenciales (ED). Los errores se han tomado de las respuestas que los alumnos dieron a tres cuestiones relativas a ED (diseñadas expresamente para este trabajo) y que recogen diferentes aspectos puramente matemáticos: definir, ejemplificar y modelizar. Las respuestas se clasificaron atendiendo a dos criterios: según las nociones reflejadas en la definición de ED y según las características de los ejemplos dados. Además analizamos relaciones entre ambas categorías. Identificar y analizar errores puede ayudarnos a localizar obstáculos en la formación de conceptos y a detectar dificultades que nuestros alumnos encuentran al realizar tareas propuestas.

Abstract: In this paper, we analize the most frecuent mistakes made by Chemistry students in their second year at the University of Seville (Spain) while they are working on Differential Ecuations (DF). These mistakes were collected from the answers the students gave to a test that was prepared specifically for this purpose. The test had three questions focused on three purely mathematical aspects: defining, exemplifying and modelizing. The answers were classified according to the notions reflected in the definitions and the examples caracteristics our students gave. We analyze relations between both classifications too. Identifing and analyzing these mistakes can help us to locate obstacles in concept constructing and to detect individual difficulties in proposed tasks.

1 Introducción

Los estudios sobre Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Matemático en el nivel Universitario son relativamente recientes. El tema concreto de las Ecuaciones Diferenciales (ED) apenas empieza a ser considerado en los últimos años por investigadores en Didáctica del

María Trinidad Villar Liñan
Departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología
Salvador Llinares Ciscar
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla, España

Cálculo. Artigue, M. (1987, 1988, 1991) dedica parte de su estudio a éstas en sus investigaciones en ingeniería didáctica teniendo en cuenta la importancia que las ED adquieren en los contenidos de los primeros cursos de estudios universitarios europeos en carreras científico técnicas y su relación con las nuevas tecnologías.

Al analizar las concepciones que los estudiantes de primeros niveles de enseñanza superior tienen sobre la diferenciación y la integración, no podemos eludir las implicaciones correspondientes con los procesos de resolución de ED. Recíprocamente, si queremos analizar las concepciones sobre ED no podemos dejar al margen sus relaciones con los procesos de integración y diferenciación (Artigue, 1991).

Dentro del Marco de la Teoría de Errores (Radatz, 1980), consideramos importante un análisis de los mismos que nos permita diagnosticar dificultades individuales como punto de partida y como herramienta para la investigación de procesos de Enseñanza-Aprendizaje del Análisis. Para Radatz, teniendo en cuenta la teoría del procesamiento de información, los errores se producen como resultado de experiencias previas a la clase de Matemáticas están determinados causalmente, suelen derivarse de dificultades en los procesos de aprendizaje matemático o por interacción de variables de la educación matemática y pueden llegar a ser persistentes en el tiempo.

Identificar errores puede conducirnos a localizar obstáculos en la formación de los conceptos. En este sentido, según Vinner, al poner de manifiesto la relación entre la definición de un concepto y la imagen que se tiene del mismo, indica que

> "*Adquirir un concepto significa formarse una idea de él. Conocer por intuición la definición del concepto no garantiza la comprensión del mismo. Comprender significa tener una imagen del concepto. [...] Algunos conceptos, incluso conceptos de la vida diaria deberían ser introducidos mediante definiciones. [...] Las definiciones ayudan a formar la imagen del concepto. Pero en el momento en que la imagen se ha formado la definición no es indispensable,... podrá incluso olvidarse ...*" (Vinner, S. 1991).

En este sentido, Cornu (1991), Norman y Prichard (1992) detectan "situaciones" en las que aparecen obstáculos en la formación de los conceptos. Se refieren principalmente a las imágenes previas del concepto existentes en la mente del alumno cuando se enfrenta a la presentación formal del mismo.

Considerando que tales imágenes existen de manera natural, intuitiva e incluso social, en la mayoría de los casos, la enseñanza de un nuevo concepto en matemáticas (como en cualquier otra disciplina) "no empieza sobre un territorio virgen". Estas concepciones, llamadas "espontáneas" (Cornu, 1991), interfieren inevitablemente en la aparición de obstáculos al mezclarse con las nuevas imágenes adquiridas, tendiendo a impedir el desarrollo de la comprensión completa del nuevo concepto. Estos autores señalan que los modelos mentales antiguos no desaparecen inmediatamente sino que persisten largo tiempo junto con los recién incorporados en la mente del alumno. Este proceso hace que surjan factores de conflictos potenciales en la formación y adquisición del concepto, ya sea éste introducido mediante definición formal o ejemplos. De una manera general, los obstáculos cognitivos son construcciones o interpretaciones idiosincráticas de conceptos y procesos que, generados de forma natural en el proceso de desarrollo cognitivo, tienden a impedir el desarrollo de una comprensión completa del concepto o del proceso (Norman y Prichard, 1992).

Aunque es una constante tanto en Matemáticas elementales como en Pensamiento Matemático Avanzado, el proceso de "desequilibrio", en la construcción del conocimiento descrito por Cornu, hay características en el segundo que inciden de forma clara al favorecer la aparición de obstáculos (Robert y Schwarzemberger, 1991), como por ejemplo el cambio inmediato en la naturaleza de las Matemáticas reflejado en:

- la aparición de mayor cantidad de conceptos que deben ser asimilados en menos tiempo,
- la aparición de muchos problemas que no pueden ser resueltos con todo detalle,
- la necesidad de adquirir rápidamente conceptos que históricamente fueron formados lentamente, incluso por toda una comunidad de matemáticos, etc.

Es importante el papel que juega la acción individual en la construcción del conocimiento en el proceso de "re-equilibrar lo desequilibrado" en niveles superiores, así como hacer al estudiante consciente de su propio proceso de aprendizaje. (Robert y Schwarzemberger, 1991).

Es en el marco de estas investigaciones donde situamos nuestro trabajo con unos objetivos algo más específicos. El objetivo de nuestro estudio fue realizar una clasificación empírica de los errores producidos por los estudiantes ante tres cuestiones relativas a Ecuaciones Diferenciales, diseñadas expresamente para este estudio.

Este trabajo es la continuación de otro estudio realizado que se centraba en un análisis descriptivo de las respuestas producidas a un examen tradicional del contenido de ED (Villar, 1993).

2 Metodología

El presente trabajo recoge un análisis de errores cometidos por alumnos de la licenciatura de Química (de la Universidad de Sevilla, España), en el desarrollo de tareas con Ecuaciones Diferenciales. Las ED constituyen un contenido al que se dedica un trimestre en la asignatura Matemáticas II, impartida actualmente en Segundo curso de esta licenciatura. Un grupo de 100 alumnos, escogidos entre los matriculados asistentes a clase y entre los tres grupos de la asignatura Matemáticas II, después de finalizar la materia correspondiente a ED, respondieron al cuestionario propuesto. Los datos analizados proceden de las respuestas escritas a dicho cuestionario.

Cuestionario sobre ecuaciones diferenciales

1. *Definir Ecuación Diferencial.*
2. *Dar 5 ejemplos distintos de Ecuaciones Diferenciales.*
3. *Se ha descubierto que una bola de naftalina que tenía originariamente un radio de 1/4 de pulgada, tiene un radio de 1/8 de pulgada al cabo de un mes. Suponiendo que se evapore a un índice proporcional a su superficie, se quiere saber cuántos meses más tardará en desaparecer por completo. ¿Podría resolverse este problema mediante una ED? Razonar la respuesta.*

El objetivo era conocer el modo en que los estudiantes son capaces de definir ED y la proximidad entre su definición y la definición formal, incluso después de trabajar con dicho concepto.

Esta tarea se diseñó siguiendo la metodología utilizada por Dreyfus y Vinner (1989) en su estudio de la imagen del concepto de la noción de función. Se eligió este tipo de cuestiones, en este estudio, al observar las limitaciones de los ítems de los exámenes tradicionales centrados en un mayor uso de algoritmos algebraicos. (Villar, 1993).

El formato utilizado en las cuestiones planteadas (siguiendo el trabajo de Dreyfus y Vinner), puede permitirnos identificar las concepciones de los estudiantes sobre los objetos matemáticos que manejan, en nuestro caso las Ecuaciones Diferenciales. Las tres cuestiones planteadas intentan recoger diferentes aspectos de naturaleza puramente matemática: definir (Cuestión 1), ejemplificar (Cuestión 2) y modelizar (Cuestión 3).

Los alumnos contestaron a este cuestionario una vez finalizada la materia relativa a Ecuaciones Diferenciales. A partir de estos datos realizamos un análisis empírico de las respuestas a las cuestiones planteadas siguiendo un procedimiento inductivo de generación de categorías. En el proceso de análisis empírico se iban agrupando respuestas según algunos aspectos comunes de interés. Se creaban nuevas categorías cuando en algunas respuestas aparecían datos no contemplados en ninguna de las categorías ya formadas. Este proceso permitió ir creando y refinando paulatinamente las categorías que se iban considerando. Realizamos un análisis detallado de las definiciones dadas por los alumnos y dimos una clasificación de éstas basándonos en las nociones contempladas dentro del concepto de ED. Las nociones que intervienen en la definición y que hemos considerado más significativas son:

- Noción de función desde la perspectiva de objeto, ya sea de una o más variables reales, dependientes o independientes.
- Noción de ecuación funcional, asociada a ella estarían la idea de solución y la de resolución de dicha ecuación.
- Noción de derivación o diferenciación (de las funciones incógnitas).
- Proceso de matematización de un fenómeno físico.

Así se clasificaron las respuestas en grupos atendiendo a dos criterios:

1. Según las nociones reflejadas en la definición de ED de la cuestión 1 (ver Cuadro 1).
2. Características de los ejemplos proporcionados como respuesta a la cuestión 2 (ver Cuadro 2).

Además analizamos las relaciones existentes entre la definición de ED y los ejemplos dados en la segunda cuestión (ver Cuadro 3).

Luego examinamos brevemente las razones dadas en las respuestas a la cuestión 3, intentando poner de manifiesto las posibles relaciones entre éstas y la información obtenida a partir de las dos primeras cuestiones.

3 Resultados

3.1 Resultados relativos a las cuestiones 1 y 2

Teniendo en cuenta la forma en que los alumnos definen ED y si en sus definiciones aparecen o no las nociones relacionadas con dicho concepto expuestas anterior-mente, la categorización de las respuestas dadas a la cuestión 1 ha quedado como sigue (Cuadro 1):

A. Se recogen las respuestas que dan una definición precisa de ED, bastante fiel a la definición expuesta en clase: "*Ecuación en que aparecen relacionadas una función $f: R^n -> R^m$ y sus derivadas, de cualquier orden*".
B. Respuestas que, siendo poco precisas formalmente, contemplan al menos dos de las nociones fundamentales que intervienen en la definición de ED antes especificadas.
C. Respuestas en que aparecen identificados los términos "función" y "ecuación" aunque no necesariamente reflejando idénticas nociones.
D. Respuestas en las que no aparecen contempladas ninguna de las nociones fundamentales de la definición de ED o bien las palabras utilizadas no parecen dotadas de significado coherente con el concepto de ED.
E. Forman este grupo las respuestas no contestadas aunque sí hayan sido respondidas las cuestiones 2 y 3.

CATEGORÍA	CARACTERÍSTICA	Nº	EJEMPLOS
A	Definición precisa de ED, bastante fiel a la expuesta en clase.	11	*"Una ED es una relación funcional entre una función incógnita (f(x), sus derivadas y la variable independiente, x. Es decir, una ecuación donde la incógnita es una función que aparece en forma de derivadas y cuya solución será la función que al derivarla tantas veces como sea necesario y al sustituirla en la ecuación de lugar a una identidad".*
B	Definición formalmente poco precisa pero que contempla al menos dos de las nociones fundamentales del concepto de ED.	46	*"Ecuación en la que aparecen relacionadas la función a determinar, por ejemplo y, con sus derivadas y', y'',y''', etc."*
C	Aparecen identificados los términos "función" y "ecuación" aunque no reflejen necesariamente igual noción.	12	*"Es una función del tipo F(x, y, y' ,..., y^n) = 0"* *"Dada una función, definimos ED a una serie de derivadas n-ésimas (n = 0, 1, 2, ... n) para dar una solución general o particular de la función."*
D	No aparecen contempladas ninguna de las nociones fundamentales de la definición de ED, o utilizan palabras no dotadas de significado coherente con el concepto de ED.	12	*"Ecuación que nos define los componentes de un grupo en términos de sus derivadas parciales."* *"Una ED es aquella que tiene unas variables dependientes y otras independientes."*
E	No responden a esta cuestión pero sí a las demás.	16	

Cuadro 1 Resultados relativos a la Cuestión 1.

CATEGORÍA	CARACTERÍSTICAS	Nº	EJEMPLOS Y OBSERVACIONES
I	Todos los ejemplos son EDO	15 (C.N.[1]) 26 (S.N.[2])	Aparecen ejemplos genéricos como "y' $a(x)y = r(x)$." Algunos dan todos los ejemplos de EDL.
II	Incluyen EDDP y/o SEDL	3 (C.N.) 3 (S.N.)	"$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$" "$\left.\begin{array}{l} x' = 7x - y + 1 \\ y' = -3y + 1 \end{array}\right\}$ *SEDL completo, x e y son funciones de t.*"
III	Muestran dificultad con la notación	15	No todos los ejemplos son incorrectos. Aparecen con frecuencia expresiones del tipo: "$xDx + yDy =$ cte." "$\frac{\partial y}{xy} + \frac{\partial x}{y} = 0$"
IV	Dan nombre incorrecto en relación al ejemplo proporcionado	10	"*EDDP*: $xzy'' + 2xzy' + 3y' = 0$" "$y^V - 3y'' + y' - 2y = 0$ *ED de primer orden de quinto grado.*"
V	Dan nombre sin aportar ejemplo concreto	16 (Sólo EDO) 5 (EDDP y/o SEDL)	Predominan los ejemplos de EDH, EDL y EDVS. Algunos incorrectos son: *"ED Continua", "ED dependientes de parámetros".*
VI	Aportan, entre otros, ejemplos de aplicaciones de las ED	3	"$y' = v = \frac{dx}{dy}$" *(v = velocidad).* *"Ecuación de Onda".*
VII	No dan ejemplos	1	

[1] Identificados Con su Nombre.
[2] Sin nombre que los identifique.

Cuadro 2 Resultados relativos a la cuestión 2.

Un aspecto que nos pareció de interés, considerando el marco conceptual proporcionado por Vinner, fue analizar las relaciones entre las respuestas dadas a la cuestión 1 (definición) con las respuestas dadas a la cuestión 2 (ejemplos). El Cuadro 3 recoge la distribución de las respuestas en las categorizaciones anteriores. No obstante, hemos considerado oportuno destacar algunas observaciones dentro de cada clase para reflejar mejor la gran variedad y disparidad de resultados.

Categoría	A	B	C	D	E	Total
I	8	22	4	1	6	41
II	1	3	2			6
III		7	1	4	3	15
IV		3	3	4		10
V	2	8	1	3	7	21
VI		2	1			3
VII		1				1
Total	11	46	12	12	16	97

Cuadro 3 Distribución de resultados en las dos categorizaciones.

Describimos a continuación algunos casos que nos ayudan a caracterizar la posible relación entre las respuestas dadas a la cuestión 1 y los ejemplos aportados en la cuestión 2.

Grupo A:

Los ejemplos que estos alumnos consideran contemplan todos los casos de la definición aunque hay que hacer notar que predominan los de ED Lineales (EDL) (todos incluyen al menos una EDL). Destacan también los de ED de Variables Separables (EDVS). Sólo un alumno recoge en su definición la idea de ED en Derivadas Parciales (EDDP), incluyendo una de este tipo entre sus ejemplos junto con varios de EDO.

Grupo B:

Hay alumnos que incluyen la noción de EDDP con expresiones como:

* *"Una ED es una ecuación en la que aparecen derivadas (también pueden aparecer derivadas parciales) de la variable dependiente respecto de la independiente".*

* *"Una ED es aquella donde junto con las variables (x,ẏ,...) aparecen sus derivadas (Dx, Dy,...) parciales.*

Ejs: $xDx + yDy = 3$; $Dx/y + Dy/x = cte.$"

Observemos que estos ejemplos podrían representar EDDP en caso de notar correctamente $Dx = \partial/\partial x$ y aplicarlo a una función de dos o más variables, y análogamente para Dy. En caso de que por Dx se quiera representar la diferencial de x, estas expresiones son formalmente incorrectas.

Otro dato a tener en cuenta es que de los 7 alumnos cuya definición contempla el término de EDDP, sólo 2 dan un ejemplo correcto de ésta.

Siete alumnos dan ejemplos que no muestran coherencia con la definición de ED, algunos de éstos son:

"... *expresión que nos permite relacionar una función con su derivada ... Ej: $y''' + 2xy' + y' = 2.$* "

O bien definir EDL y poner como ejemplo: "$(x^2 + y^2)dx-(x/y)dy = O.$"

En todas las respuestas anteriores se puede considerar que los alumnos ponen ejemplos que guardan bastante relación con las definiciones que han considerado en la cuestión primera. La mayoría de los ejemplos que dan los alumnos (66,7%) que conforman este grupo están contemplados en la definición de ED, aunque, al igual que en el grupo A, son muy frecuentes los ejemplos de EDL.

Grupo C:

Las respuestas transcritas a continuación muestran cómo la confusión entre "función" y "ecuación" es más terminológica que conceptual. En la mayoría se observa un "cambio de nombres" simplemente:

* *"Es una función f: R^n - > R que contiene una variable independiente x, y una variable dependiente y = y(x) y sus derivadas,*
$F(x,y,y', ..., y^{n'}) = ED$."

* *"Una ED es una función de al menos dos variables (x,y) y donde pueden aparecer las n primeras derivadas de una de ellas con respecto a la otra."*

En otros casos se atribuyen al concepto de función características propias del concepto de ecuación o viceversa, por ejemplo "solución y resolución" para el concepto de función en:

* *"Dada una función, definimos ED a una serie de derivadas n-ésimas (n = 0,1, 2,..., n) para dar una solución general o particular de la función."*

En cuanto a los ejemplos de la cuestión 2, tenemos que decir que es difícil ver la coherencia con las definiciones, pues dan ED correctas que no se corresponderían con aquellas. La mayoría son EDO, con especial predominio de las EDL y alguna EDDP pero no correcta formalmente.

Grupo D:

Atendiendo a los resultados de la segunda cuestión, podemos decir que, aparezcan identificados correctamente o no, todos son ejemplos de ED, por lo tanto no pueden ser coherentes con la definición de la cuestión 1. Además, hay que resaltar una vez más la aparición repetida de determinados tipos de ED: EDO con predominio de EDL.

Grupo E:

Ninguno de los 16 alumnos incluidos en este grupo define ED pero todos dan ejemplos, especialmente de EDL, EDH, EDVS, y EDO de primer orden en general.

Cabe destacar algunos errores en la terminología y notación como los que presentamos a continuación:

* *"ED dependientes de parámetros." (encontrado en 2 pruebas)*
* *"ED de variables integrables $M(x)dx + N(y)dy = 0$"*
* *"$x' y = x''' y'' + x''y''$"*

Es generalizado, a la luz de los resultados recogidos tanto en el grupo C como en el D, el hecho de que los alumnos no hayan definido correctamente ED pero sí han sido capaces de identificar algunos casos concretos mediante ejemplos. (La mayoría presentan al menos 3 ejemplos).

3.2 Resultados relativos a la cuestión 3

Las distintas razones que han argumentado para responder a la tercera cuestión han sido muy variadas y, por tanto, difíciles de categorizar. No obstante, hemos distinguido varios tipos de respuestas dentro de las afirmativas (67) y de las negativas (7).

De los alumnos que han respondido a alguna de las cuestiones, 10 han dejado en blanco la tercera. Resumimos a continuación esta agrupación ilustrándola con algunos ejemplos literales:

SI, PORQUE ...

1. *"...ocurre como en los problemas de desintegración..."*
   " es un problema físico."

Trece alumnos han dado argumentos de este tipo, comparando el problema con uno de los modelos trabajados en el aula, el de la desintegración de la materia radiactiva.

2. *"...con los datos del ejercicio podemos construir una ED donde la derivada de r con respecto al tiempo es la incógnita..."*

Trece alumnos dan como razón principal el hecho de contar con datos suficientes para dar una ED, tal como muestra el ejemplo anterior.

3. *"...La ED podría ser... S' (t) = cteS(t). (S(t) es la superficie de la bola de naftali- na)."*

Dar la ED que resolvería el problema, aunque no se les pedía, ha sido el argumento principal de 13 alumnos, 3 de ellos incluso la resuelven con todo detalle.

4. *"...podemos saber la relación existente entre evaporación [...], superficie [...], radio y tiempo."*

Doce alumnos han razonado su respuesta mediante la existencia de relaciones entre las distintas variables que aparecen en el fenómeno, aunque no en todos los casos las establecen específicamente mediante derivación.

5. *"Si originalmente es r = 1/4 y pasa en un mes a r = 1/8, r disminuye a la mitad y así disminuye proporcional a este, vemos que a los dos meses r = 1/16 habría disminuido a este valor ... a los 3, a 1/32 y a los 4, 1/64, ya de por sí sería un valor muy pequeño."*

Tres alumnos han razonado de este modo, entendiendo de manera errrónea la proporcionalidad de la disminución del radio.

6. Por último, hay que considerar a los 15 alumnos que, o bien responden afirmativamente sin razonar su "sí", o bien su respuesta es una solución breve del ejercicio, aunque no se les preguntaba.

NO, PORQUE ...

1. *"...si lo hacemos por ED nunca se terminaría la bola."*

En este caso, se compara con el problema de desintegración pero, previendo que la función solución de la ED en estos casos no se anula salvo para "tiempo infinito" y así se vio en el aula responden negativamente 3 alumnos.

2. *"...siempre quedaría radio y no desaparecería la bola."*

Un alumno responde con un razonamiento análogo al de la proporcionalidad recogido entre las respuestas afirmativas pero para responder negativamente.

Tres alumnos piensan que no se puede resolver por "falta de datos" o no poder relacionar las variables que intervienen.

4 Discusión

Recogemos aquí algunas reflexiones surgidas de nuestros análisis.

Los ejemplos de errores conceptuales muestran cómo la terminología en Matemáticas no es siempre suficientemente clara ni adecuada, utilizamos un mismo término, "homogénea", para objetos muy distintos (función homogénea y ecuación lineal homogénea). Más aún, la notación sigue generando dificultades para alumnos de estos niveles.

Además, de este grupo de errores y de las definiciones analizadas a partir del cuestionario, podríamos inferir que los alumnos tienen dificultades en contemplar todas las posibilidades de la noción matemática dentro de la definición formal. Sin embargo, el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto, como ocurre con el concepto de EDDP, según se señala en la descripción de resultados del grupo B.

Detectamos pues, un obstáculo didáctico notorio generado por el modo en que el bloque temático sobre ED es presentado al alumno. En el desarrollo de los contenidos se insiste ampliamente en las EDO, en las EDL y en los SEDL. Así, la importancia que se da a éstas y a su resolución hace que el alumno adquiera una imagen restringida del concepto de ED tal como hemos observado a partir de los ejemplos recogidos en la cuestión 2. Esto hace que nos preguntemos, considerando las características de los alumnos, que:

- ¿Hasta qué punto deben saber definir conceptos matemáticos teniendo en cuenta que no van a ser profesionales de las Matemáticas?
- ¿Qué nivel de exigencias sería el apropiado para determinar si un estudiante de ciencia experimental conoce bien un determinado objeto/concepto matemático?
- ¿Cuándo la definición formal pasa de ser una ayuda a convertirse en un obstáculo?

No olvidemos que los matemáticos somos nosotros, debemos reflexionar si es acertado pedir el mismo rigor al futuro químico que al futuro matemático. Por otra parte, cabe destacar que la imagen del concepto de ED que nuestros alumnos tienen está muy ligada aún a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos.

Respecto a los argumentos dados en la cuestión 3, destacamos el hecho de que una misma razón, —comparación con el problema de desintegración o la relación entre los datos del enunciado—, es utilizada tanto para dar una respuesta afirmativa como negativa. Nos cuestionamos pues:

- ¿Cómo es interpretado el resultado matemático en términos físicos para el caso concreto de la solución de la posible ED que pudiera resolver el problema planteado?
- ¿El alumno cree que todo problema físico se puede modelizar matemáticamente mediante una ED?
- ¿Por qué es necesario para el estudiante dar la ED (19,4% de las respuestas), incluso resolverla para dar la razón que se pide?

De acuerdo con las apreciaciones de Vinner acerca de la definición en Matemáticas (Vinner, 1991), a la hora de presentar por primera vez un objeto matemático a los alumnos, no siempre se adopta la expresión formal más afortunada de la definición de dicho objeto. Es bien sabido que la definición formal que se tiene para un concepto matemático no es siempre única. Los matemáticos eligen una u otra dependiendo de la "elegancia", conveniencia, mejor caracterización, contexto, relaciones con otros conceptos, etc. Digamos que hay cierto margen de arbitrariedad, —casi subjetividad—, en la elección de la definición. Observemos que la definición "más elegante" para un matemático puede no ser la más clara para un estudiante de Matemáticas, al que habría que darle algún tiempo para que se familiarizara con el nuevo concepto, formara una imagen de éste y, una vez incorporado a su "cuerpo de conocimientos" pudiera pasar de forma natural a usar la definición "mejor considerada" entre los matemáticos.

No podemos dejar pasar alguna apreciación relativa al cuestionario propuesto, el cual no tuvo en ningún momento el carácter de un examen, aunque sí guardaba cierta semejanza con éste en cuanto a su estructura y al ambiente que se creó en el aula. Algunos alumnos llegaron a pensar que se les calificaría la prueba condicionando así las respuestas. Esto nos lleva a pensar que las tareas "tipo examen" no siempre reflejan si el alumno ha dotado de significado al concepto.

A pesar de que faltan aún muchos datos para poder establecer la clasificación de obstáculos que proponía Artigue (1988), queremos indicar que una de las líneas de investigación próxima iría encaminada a examinar más detenidamente casos en los que se comparen los métodos de resolución de ED que utilizan los estudiantes de forma espontánea o "no dirigida" por el profesor y los que usaron los matemáticos durante los Ss XVIII-XIX.

Nuestros análisis nos han llevado a reflexionar sobre la necesidad de exigir definiciones y demostraciones "rigurosas" a los estudiantes de Carreras Científico-Técnicas en lugar de fomentar la identificación de situaciones reales (en sus prácticas de laboratorio o en otras asignaturas, por ejemplo) que podrían ser modelizadas y resueltas matemáticamente. Llevar a la clase de Matemáticas algunas de ellas podría ser un paso para conseguir que la materia sea más adecuada para estudiantes de Matemáticas (que no quieren ser matemáticos), a la vez que la reconocen como herramienta de trabajo.

Para finalizar, queremos señalar que la tarea no concluye aquí sino que necesitamos más pruebas que nos proporcionen datos para conocer las concepciones de los estudiantes sobre:

- Las Ecuaciones Diferenciales
- Las Matemáticas "útiles".

Además, el paso siguiente podría estar centrado en la identificación de obstáculos epistemológicos para hacer una comparación, en la medida de lo posible, entre éstos y las dificultades que han tenido que superar los científicos en el desarrollo de la noción de Ecuación Diferencial a lo largo de la Historia del Cálculo (Farfán y Cantoral, 1990) con vistas a poder hacer una propuesta de tareas más adecuadas en los cursos venideros. No obstante, esta metodología ha sido discutida, por las carencias que presenta, entre algunos investigadores en Didáctica del Análisis (Nemirovsky, 1991).

NOTA FINAL:

Se agradecen los comentarios realizados por los evaluadores anónimos a una primera versión de este artículo.

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1987): *Ingenierie Didactique à propos d'Equations Differencielles.* Actas PME 1987. (236-242).

ARTIGUE, M. (1988): *Ingenierie Didactique.* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.9, n. 3 (281-308).

ARTIGUE, M. (1991): *Análisis.* En D. Tall (Ed): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Pb.: Dordrech (168-198).

CORNU, B. (1991): *Limits.* En D. Tall (Ed): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Pb.: Dordrech (153-166).

DREYFUS, T. (1990) *Advanced Mathematical Thinking.* En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.): Mathematics and Cognition. Cambridge University Press: Cambridge (113-134).

DREYFUS, T. y VINNER, S. (1989): *Images and Definitions for Concept of Function.* Journal for Research in Mathematics Education, 20, (356-366).

FARFÁN, R.M. y CANTORAL, R. (1990): *Elementos Metodológicos para la Reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior.* Cuadernos de Investigación, n. 13. México (19-26).

NEMIROVSKY, R. (1991): *Notas sobre la Relación entre Historia y el Aprendizaje Constructivo del Cálculo.* En R. Cantoral, F. Cordero, R. M. Farfán y C. Imaz. (Eds): Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Área Cálculo Análisis. Universidad Autóno- ma del Estado de México. (37-53).

NORMAN, F.A. y PRICHARD, M.K. (1992): *A Kruteskian Framework for the Interpretation of Cognitive Obstacles, an Example from the Calculus.* Proceedings of the XVI PME Conference. University of New Hampshire. Durham, NH (USA) vol 2. (178-185).

RADATZ, H. (1980): *Students' Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey.* For the Learning of Mathematics, 1, 1, FLM Publishing Co. Ltd, Montreal, Quebec, Canadá. (16-20).

ROBERT, A. y SCHWARZENBELGER, R. (1991): *Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level.* En D. Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Pb.: Dordrech. (127-129).

TALL, D. (1992): *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof.* En Grows (Ed.): Handbook of Teaching and Learning Mathematics. McMilan, New York. (495-511).

VILLAR, M.T. (1993): *Análisis Descriptivo de Errores en la Resolución de Ecuaciones Diferenciales Homogéneas.* Actas de las VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Sociedad Extremeña de Educación Matemática. Badajoz, España. (493-499).

VINNER, S. (1991): *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.* En David Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Pb. Dordrech. (65-81).