

Experiencias pre-algebraicas

Resumen

Algunas de las dificultades que encuentran los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, pueden deberse a la falta de experiencia previa en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que los lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. En este artículo se muestra la factibilidad de ofrecer experiencias de este tipo. Se presenta un ejemplo que ilustra cómo la capacidad de los niños para trabajar a nivel numérico se puede usar para ayudarlos a construir la idea de número general, entendido éste como un número indeterminado involucrado en un método o regla general.

Abstract: Some of the difficulties pupils have when starting the study of algebra might be due to a lack of experience in coping, at a numeric level, with a variety of mathematical problems leading to the necessity and acceptance of algebraic ideas. The feasibility of providing such experience is shown in this article. An example illustrates how pupils capability for working with numbers can be used for helping them construct the idea of general number, conceived as an indetermined number involved in a general method or a general rule.

Introducción

Numerosos estudios nacionales y extranjeros (e.g. Booth, 1984; Kieran 1980,1988; Mason et al., 1985; Filloy y Rojano, 1985; Ursini, 1990a) han investigado y catalogado las dificultades y los errores más comunes que cometen los alumnos que se inician en el estudio del álgebra elemental. Se señala, por ejemplo, que los alumnos:

- tienden a usar métodos aritméticos para resolver problemas de tipo algebraicos;
- buscan resultados numéricos;

Sonia Ursini

Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN

- tienen dificultad para entender que mientras en aritmética las operaciones se ejecutan y se obtienen resultados numéricos, en álgebra las operaciones se indican y su ejecución efectiva queda suspendida;
- tienden a interpretar el signo de igualdad solo como un signo de acción mientras que en álgebra este signo suele usarse para representar equivalencias;
- tienen serias dificultades con la adquisición de conceptos nuevos, propios del álgebra, por ejemplo, con el concepto de variable.

Estos hallazgos han llevado a considerar que un bagaje aritmético estereotipado puede llegar, en ocasiones, a constituir un obstáculo para el aprendizaje del álgebra (Filloy y Rojano, 1985; Kieran, 1988). Se enfatiza entonces que para lograr un manejo adecuado del álgebra es necesario que los alumnos, por un lado, desarrollen una capacidad para percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta; y, por el otro, construyan nociones completamente nuevas propias del álgebra.

A pesar de poner en evidencia algunas de las diferencias importantes entre la aritmética y el álgebra, estos comentarios parecen reflejar cierta sorpresa ante las dificultades que encuentran los alumnos, e implícitamente parecen sugerir que el álgebra es una continuación natural de la aritmética y que, por lo tanto, el paso de ésta al álgebra debería de poderse dar de manera fluida.

Si se analiza la evolución histórica de las matemáticas lo primero que salta a la vista es el enorme trabajo desarrollado a nivel numérico, no limitado a la aritmética, que precedió y constituyó la base matemática para el surgimiento del álgebra. Siglos de experiencia en elaborar y trabajar con ideas matemáticas por medio de los números (e.g. resolver problemas que implicaban la determinación de una incógnita específica; determinar métodos generales para resolver familias de problemas; estudiar relaciones funcionales entre cantidades) antecedieron el surgimiento del álgebra y constituyeron la base matemática para el desarrollo de esta nueva disciplina.

Una explicación plausible, para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, podría ser la falta de antecedentes en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que los lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Es muy frecuente que sus conocimientos se limiten al manejo de algunas nociones de aritmética y de geometría elemental. Carecen, por lo general, de experiencia en generalizar y expresar una generalización; en trabajar a nivel numérico con nociones que subyacen a la idea de función como, por ejemplo, la idea de variación. Si bien no considero que la enseñanza deba o pueda simular el desarrollo histórico del álgebra, creo que éste puede sugerirnos acercamientos que propicien y faciliten la construcción de ideas algebraicas. Históricamente resalta, por ejemplo, la existencia de un largo periodo en el cual problemas que fueron posteriormente tratados algebraicamente, se concebían y trataban numéricamente o usando una simbología que no puede aún ser considerada algebraica. Al empezar el estudio del álgebra los alumnos, por lo general, cuentan con muy pocas experiencias de este tipo. Es aún bastante común que el lenguaje algebraico se introduzca sin haber creado antes una razón y/o una necesidad para su uso.

Buscando alternativas

Este tipo de consideraciones están a la base de una investigación que estudió la factibilidad de llevar a los alumnos a trabajar con ideas algebraicas antes del estudio formal del álgebra (Ursini, 1994). En particular, se quería propiciar en los alumnos un primer acercamiento a distintos usos de la variable, a saber:

- como número general –la variable representa un número indeterminado involucrado en un método o regla general;
- en una relación funcional –las variables representan números cuyos valores se mueven dentro de ciertos rangos de manera inter-relacionada;
- como incógnita específica –la variable representa un valor desconocido, pero específico, que puede determinarse con precisión tomando en cuenta las restricciones del problema.

Considerando los resultados de numerosas investigaciones anteriores que señalaban Logo como un ambiente que propicia el acercamiento a ideas algebraicas y, en particular, a la idea de variable (e.g. Noss, 1986; Ursini, 1990b, 1991; Hillel, 1992; Sutherland, 1992), se decidió llevar a cabo este estudio en ambientes Logo.

Los sujetos del estudio fueron un grupo de 34 niños de 12-13 años de edad, que estaban empezando el primer año de secundaria en una escuela de la Ciudad de México, y que no habían recibido aún una enseñanza formal del álgebra y del concepto de variable. El estudio se desarrolló durante sus clases normales del taller de computación que se impartían en la escuela, siendo el investigador el maestro del taller.

Después de una breve introducción al manejo del lenguaje de programación Logo, los alumnos trabajaron en tres bloques de actividades especialmente diseñadas para ayudarlos a acercarse a los tres usos de la variable arriba mencionados. Todas las actividades se diseñaron de manera que la capacidad de los alumnos para trabajar a nivel numérico sirviera como soporte para concebir los distintos usos de las variables.

A continuación se presenta un ejemplo con el cual se quiere ilustrar cómo la experiencia numérica de los niños se usó para ayudarlos a construir la idea de número general, entendido éste como un número indeterminado involucrado en un método o regla general.

El caso del número general

El primer paso fue pedir a los alumnos que escogieran tres números, escribieran en Logo tres programas para calcular el doble de esos números, y los analizaran para identificar qué tenían en común y en qué diferían. La Figura 1 muestra los programas escritos por una pareja de alumnos y el análisis respectivo. El propósito de esta actividad era llevar a los alumnos a prestar atención al método que usaban para calcular el doble de un número en Logo, más que al resultado que obtenían al correr los programas.

ESCOGE OTROS NUMEROS Y PARA CADA UNO ESCRIBE UN PROGRAMA QUE CALCULE SU DOBLE

PROGRAMA 1	PROGRAMA 2	PROGRAMA 3
<p>TO ERNESUSL PRINT 25+25 END</p>	<p>To chancía Print 50000* 50000 End</p>	<p>To Pato Print 200000 End</p>

**ANALIZA LOS TRES PROGRAMAS.
¿QUE TIENEN EN COMUN?**

que los 3 tienen
print y los tres
tienen +

Que los 3 son
sumas
Que son programas.
Que los 3 tienen
y que al ultimo tienen
end:

¿EN QUE SON DIFERENTES?

que tienen números
diferentes

Figura 1 Análisis hecho por una pareja de niños.

Los resultados de esta primera actividad sirvieron de base para desarrollar una discusión grupal con el propósito de ayudar a los alumnos a concebir un método general para calcular el doble de un número en Logo. La discusión grupal llevó a la explicitación de dos métodos para resolver el problema propuesto y a la identificación de los elementos que variaban al pasar de uno a otro de los programas analizados. Los métodos encontrados se registraron en el pizarrón del siguiente modo:

```
TO <nombre>
PRINT <un número> * 2
END
```

```
TO <nombre>
PRINT <un número> * <un número>
END
```

Usando esta experiencia como soporte se introdujo a continuación la sintaxis correcta para escribir en Logo un programa general y expresar así los métodos generales encontrados (Figura 2).

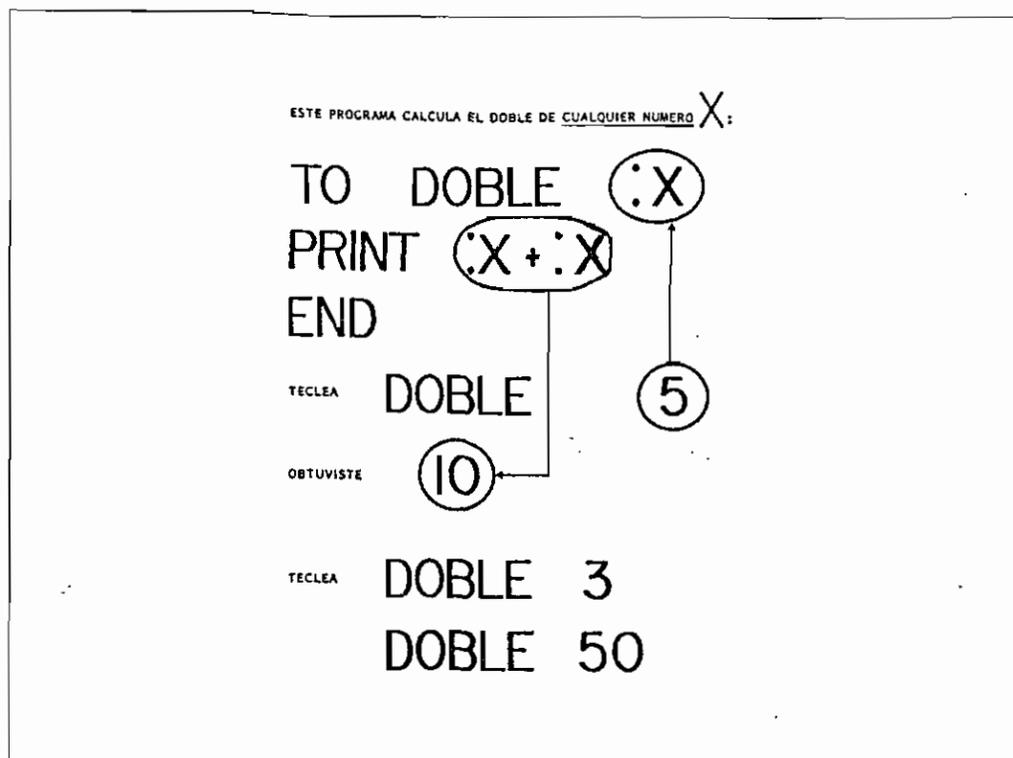


Figura 2 Hoja con la que se introdujo la sintaxis para escribir un programa general en Logo.

Se insistió también en señalar que, en Logo, para indicar el objeto general sobre el cual actúa el método deducido se usa una letra o una palabra o un símbolo cualesquiera. De este modo se introdujo la idea de *variable como número general*, esto es como objeto general de un método.

En seguida se pidió a los alumnos que escribieran sus propios programas generales para, por ejemplo, calcular la mitad de cualquier número; sumarle 10 a cualquier número; sumarle 5 a la suma de cualquier número más él mismo.

Se pudo observar que para escribir estos programas generales, los alumnos seguían inicialmente la estrategia que había sido propuesta por el investigador durante la actividad que sirvió de base para introducirlos a la idea de programa general. Esto es, primero verbalizaban algunos ejemplos, después escribían programas con números particulares, los analizaban y basados en el análisis escribían un programa general. De este modo los ejemplos numéricos verbales y los programas particulares se usaban como soporte para deducir y expresar en Logo un método general.

Sin embargo, se observó también que después de usar este acercamiento una o dos veces, los alumnos empezaban a cambiar de estrategia de manera espontánea. Primero empezaron por omitir la escritura de programas particulares. Basados solo en algunos ejemplos numéricos dados verbalmente, escribían sus programas generales. Parece ser que la función de los ejemplos verbales era la de ayudarles a identificar tanto la operación, como el objeto general del método. La omisión de la escritura de programas particulares

sugiere que existía cierta confianza en la capacidad de usar el lenguaje Logo para expresarse.

Una ulterior evolución en la estrategia se observó cuando los niños pasaron de la necesidad de dar varios ejemplos numéricos verbales, a la capacidad de deducir y expresar el método general basados en un solo ejemplo numérico verbal. Esta evolución tendría una explicación en las teorías que afirman que la capacidad de generalizar en matemáticas evoluciona gradualmente del análisis de muchos casos particulares para llegar a lo general, a la capacidad de generalizar a partir de un solo ejemplo particular (Krutetskii, 1976).

Finalmente ocurrió un cambio cualitativo y los niños empezaron a escribir los programas generales sin la necesidad de dar primero ejemplos verbales. Leían la frase (por ejemplo: "Escribe un programa general que le sume 5 a la suma de cualquier número más él mismo.", "Escribe un programa general que divida cualquier número entre 10 y le sume 100.") e inmediatamente escribían el programa. La ausencia de ejemplos numéricos verbales explícitos y la rapidez con la que escribían el programa, permite sugerir que los niños estaban trabajando directamente con el número general. Ya no necesitaban ejemplos numéricos específicos como soporte. Habían logrado aceptar la idea de número general, esto es, la idea de número indeterminado involucrado en un método o regla general, y podían operarlo sin la necesidad de conocer su valor (Figura 3).

ESCRIBE UN PROGRAMA GENERAL QUE DIVIDA CUALQUIER NUMERO
ENTRE 10 Y LE SUME 100 :

```
to dividir :X
  Print :X / 10 + 100
End.
Dividir 200
170
```

Figura 3 Programa escrito sin el apoyo de ejemplos numéricos verbales.

El hecho de alentar a los alumnos a usar lo numérico como soporte para deducir métodos generales, no sólo no los había anclado a lo numérico sino que los había llevado a alejarse gradual y espontáneamente de lo numérico y empezar a trabajar directamente con el número general.

Se observó además que esta capacidad no quedó circunscrita al ambiente numérico de Logo. Todos los alumnos fueron también capaces de trabajar con el número general en el ámbito gráfico de Logo. Escribieron, por ejemplo, programas generales para dibujar figuras de distinto tamaño, en los cuales era necesario operar el número general. Se observó que para escribir estos programas la mayoría usaba programas particulares como soporte, sin embargo hubo también casos en los cuales los alumnos fueron capaces de trabajar directamente con el número general. Esto quedó claramente manifiesto, por ejemplo, durante la entrevista individual que se le hizo a una de las alumnas, cuando se le pidió que escribiera un programa en Logo para dibujar la letra F de cualquier tamaño pero sin que se alteraran las proporciones dadas. La niña escribió su programa (Figura 4)

mientras verbalizaba: "Avanzo un número cualquiera, me regreso la mitad de ese número, giro a la derecha 90, avanzo la mitad de ese número (refiriéndose a la cuarta parte del número original) ...". Esta verbalización de la acción pone de manifiesto que esta alumna no estaba trabajando con números particulares; estaba trabajando directamente con el número general.

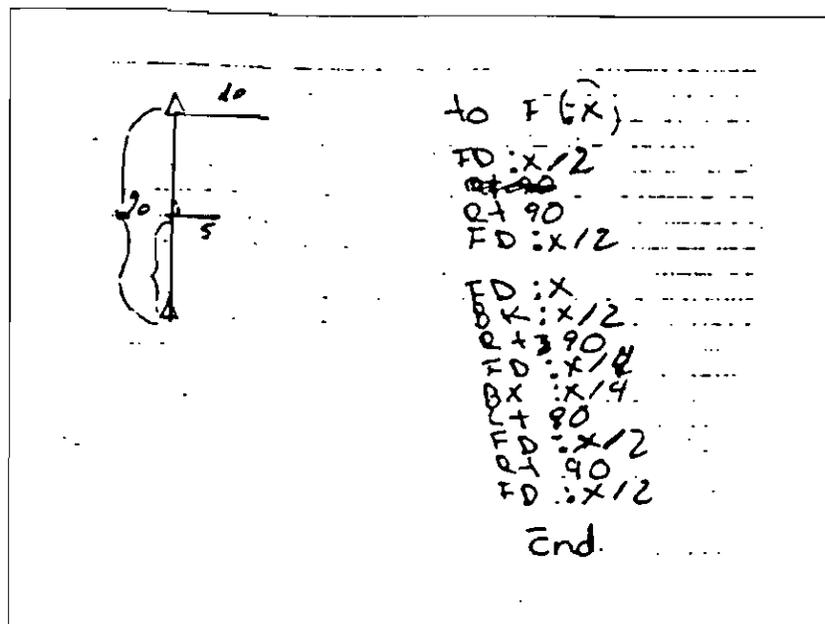


Figura 4 Programa escrito durante la entrevista.

Las actividades diseñadas para propiciar la comprensión de la variable como número general en los ambientes Logo, no tenían como propósito el de ayudar a los alumnos a transferir esta comprensión a un contexto algebraico de lápiz y papel. Sin embargo, se pudo constatar que la experiencia adquirida en Logo influyó favorablemente en su capacidad para interpretar y usar la variable como número general también en un contexto algebraico de lápiz y papel. Por ejemplo, al aplicar un cuestionario después de haber trabajado en Logo con los distintos usos de la variable, la gran mayoría de los alumnos consideraba que en las expresiones

$$X + 2 = 2 + X, \quad 4 + 5, \quad X = X$$

la X representaba cualquier valor. Ante la petición "Escribe una fórmula que quiera decir: 4 sumado a n + 5", la gran mayoría escribió correctamente $4 + n + 5$. La gran mayoría pudo también escribir la expresión $X + 25$ para contestar el siguiente problema "Una carretera que medía X kilómetros se prolongó construyendo 25 kilómetros más. ¿Cómo expresarías cuánto mide la carretera ahora?". Esto es, los alumnos no tenían dificultad para interpretar y operar el número general, ni para escribir expresiones abiertas. Al inicio del estudio la gran mayoría no había podido contestar estas mismas preguntas. Es importante señalar que mientras se desarrolló el estudio estos alumnos no tuvieron acercamiento alguno a expresiones de este tipo en su clase de matemáticas, lo que permite suponer que su capacidad para trabajar con el número general se desarrolló gracias a las actividades que se llevaron a cabo en los ambientes Logo.

Conclusiones

Para concluir quiero resaltar una vez más que el álgebra surge a consecuencia de varios siglos de experiencia a nivel numérico. No se puede esperar que los alumnos hagan sentido del álgebra si no se les ofrecen experiencias pre-algebraicas con el propósito de acercarlos a esta disciplina.

Uno de los resultados importantes de este estudio es el haber demostrado que es factible ofrecer a los alumnos experiencias que los lleven a acercarse a ideas algebraicas antes de emprender un estudio formal de esta disciplina. Experiencias de este tipo podrían constituir la base para un acercamiento menos problemático al aprendizaje del álgebra. En particular, se mostró que alumnos pre-algebraicos pueden desarrollar una comprensión de la variable como número general, esto es, como número indeterminado objeto de un método o regla general. Se encontró que propiciar el uso de ejemplos numéricos como soporte, no sólo no ancla a los alumnos a los casos particulares, sino que puede servir de base para ayudarlos a desarrollar la idea de número general.

La investigación que aquí se presentó se llevó a cabo en un ambiente computacional Logo y esto contribuyó notablemente a que los alumnos pudieran desarrollar la idea de número general y trabajar con él. Sin embargo, esto no excluye que resultados similares puedan obtenerse en ambientes no-computacionales.

Bibliografía

- BOOTH L. (1984). "Algebra: Children's Strategies and Errors", NFER-NELSON, Windsor.
- FILLOY E. and ROJANO T. (1985), Obstruction to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies, *Proceedings of the Ninth PME Conference*. The Netherlands, pp. 154-158.
- HILLEL J. (1992), The Notion of variable in the Context of the Turtle Graphics, en Hoyles C. and Noss R (Eds.), *Learning Mathematics and LOGO*, MIT Press, pp. 11-36.
- KIERAN C. (1980), The Interpretation of the Equal Sign: Symbol for an Equivalence Relation vs. an Operator Symbol, *Proceedings of the Fourth PME Conference*, Berkeley, California, pp. 163-169.
- KIERAN C. (1988), Two Different Approaches among Algebra Learners, en Coxford A.F. and Shulte A.P. (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, pp. 90-96.
- KRUTETSKII V.A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, The University of Chicago Press, Chicago and London.
- MASON J., GRAHAM A., PIMM D. and GOWAR N. (1985), *Routes to/Roots of Algebra*, The Open University Press, Great Britain.
- NOSS R. (1986), Constructing a Conceptual Framework for Elementary Algebra through LOGO Programming, en *Educational Studies in Mathematics*, No. 17, pp.335-357.
- SUTHERLAND R. (1992), What is Algebraic about Programming in LOGO?, en Hoyles C. and Noss R (Eds.), *Learning Mathematics and LOGO*, MIT Press, pp. 37-54.
- URSINI S. (1990a), Generalization Process in Elementary Algebra: Interpretation and Symbolization, *Proceedings of the Fourteenth PME Conference*, México, pp. 149-156.
- URSINI S. (1990b), El Lenguaje Aritmético-Algebraico en un Ambiente Computacional, en *Cuadernos de Investigación*, N. 15, IV, Julio, PNFAPM, México, pp. 53-105.
- URSINI S. (1991), First Steps in Generalization Processes in Algebra, *Proceedings of the Fifteenth PME Conference*, Assisi, Italia, pp. 316-323.
- URSINI S. (1994), Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in Logo, PhD Thesis, University of London Institute of Education.