Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria

Resumen

Este reporte es acerca de mi trabajo sobre el desarrollo curricular en el nivel universitario. En este trabajo me he basado en las ideas de Piaget acerca de la forma como la enseñanza le podría ayudar a un niño a aprender, ya que el trabajo de Piaget sobre educación no se conoce tan bien como el resto de su obra, comenzaré con una breve introducción a sus ideas en esta área y trataré de mostrar de qué manera forman el fundamento teórico de mis actividades sobre el desarrollo curricular. Entonces me concentraré en reformular las ideas de Piaget sobre la educación para aplicarlas en el nivel universitario. En lo que resta describiré de manera más detallada este método pedagógico y las investigaciones en las que está basado. Comenzaré con algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes a una pregunta en una entrevista sobre el orden de los elementos de un grupo. Trataré de mostrar cómo esto motiva el desarrollo de una perspectiva teórica que puede usarse con el fin de dar sentido a esas respuestas. Después de una discusión general de las características de una teoría del aprendizaje, explicaré la perspectiva teórica, basada en mi interpretación de las ideas de Piaget, con la cual trabajo. Por último, daré algunos ejemplos de las tareas en computadora que pueden aparecer en estas actividades.

Abstract: This report describes my work on the curricular development in college level. It is based upon the Piaget ideas about the way the teaching can help a child to learn. As the Piaget's work concerning education is not as well known as the other areas of his work, I begin with a brief introduction to his ideas about that freld, and I will show how they form the foundation of my activities in curricular development. Then I concentrate myself in the reformulation of Piaget ideas on education for applying them in the college level. Next I will describe in detail this pedagogical method and the researches upon which it is based. I begin with some examples of the sudent's answers to a questions in an interview about the order of the elements in a group. I will demonstrate how that action motivates the development of a theoretical perspective usable to give sense to those answers. Following a general discussion of the characteristics of a learning theory, I explain the theoretical view based on my own interpretation of Piaget ideas used in my work. Finally, I give some examples of computer tasks which appear in these activities.

Ed Dubinsky
Georgia State University, EUA

Introducción

Piaget no escribió mucho acerca de cómo sus teorías se relacionan con la práctica pedagógica. Y no fue por falta de interés en el tema (de lo poco que escribió queda claro que tenía un gran interés en la educación). Más bien, su reticencia parecía provenir de cierta desconfianza en la pedagogía, al menos como se practica en las escuelas tradicionales. En un artículo ([23]), en el cual relaciona su trabajo con las ideas de Vygotsky (con el cual está mucho más de acuerdo que lo que en general se piensa), expresa el punto de vista de que las escuelas tienden a pasar por alto el uso que podría darse al desarrollo espontáneo del niño y que la educación suele inhibir ese desarrollo. Más aún, Piaget sentía que la práctica educativa existente podría ser dañina para el desarrollo intelectual.

"En algunos casos... los premios de la instrucción se presentan demasiado pronto o demasiado tarde, o de una manera que evita la asimilación porque no se ajusta a las construcciones espontáneas del niño. Por ello, el desarrollo del niño se ve obstruido, o más aún, desviado hacia la infecundidad (énfasis añadido)... » (op. cit., p. 246).

No obstante que Piaget rechazó mucho de la educación tradicional, tenía algunas cosas que decir acerca de la forma como la enseñanza le podría ayudar a un niño a aprender, y es sobre esas ideas que he basado mi trabajo sobre el desarrollo curricular en el nivel universitario y que es el tema de este reporte.

Ya que el trabajo de Piaget sobre educación no se conoce tan bien como el resto de su obra, comenzaré con una breve introducción a sus ideas en esta área y trataré de mostrar de qué manera forman el fundamento teórico de mis actividades sobre el desarrollo curricular. El desarrollo de esta teoría procede del análisis de datos de estudiantes que están tratando de entender conceptos matemáticos. Es una teoría constructivista y se centra en una pedagogía cuyo objetivo es conseguir que los estudiantes hagan ciertas construcciones mentales muy específicas. Explicaré la parte principal de esta estrategia pedagógica y daré ejemplos de cómo las actividades de computación se utilizan para lograr que los estudiantes hagan dichas construcciones.

En este artículo no reportaré los resultados de esta investigación y el desarrollo curricular; en lugar de ello citaré, donde sea apropiado, los artículos más importantes publicados.

1. Los escritos de Piaget sobre la educación

Comparado con el volumen total de su trabajo (cerca de 50 libros y más de 300 artículos), Piaget sólo escribió alrededor de 6 artículos y dos libros sobre educación. Sin embargo, su trabajo representa una contribución sustancial al pensamiento pedagógico y en este artículo, no puedo dar más que algunos ejemplos representativos de lo que Piaget ha dicho sobre la materia. Espero que en un futuro alguien produzca un estudio más completo del pensamiento de Piaget sobre la educación. Para ayudar en este esfuerzo, en las referencias al final de este artículo incluyo las publicaciones que, pienso, representan el trabajo de Piaget en educación.

1.1. Los límites de la pedagogía

Quizá una de las razones por la cual Piaget escribió tan poco sobre educación fue que se percató de las limitaciones de la pedagogía. Como se indicó antes, él sentía que el aprendizaje en la escuela tradicional podía ser incluso una influencia negativa en el desarrollo intelectual. Por ejemplo, puede ser que la manera en que se enseñan los procedimientos formales tiende a evitar que el niño construya su propia comprensión de los mismos. En particular, se oponía a la utilización de exámenes por considerarlos una «verdadera plaga de la educación» ([22], p. 73). De manera similar, estaba preocupado por la enseñanza por "transmisión oral», ya que sentía que sólo podía ser efectiva si era preparada mediante una actividad de parte del estudiante (*op. cit.*, pág. 129).

Piaget también se preocupaba por lo poco que sabemos sobre los efectos a largo plazo de la educación ([17], pp. 696-697). Él sentía que lo que los niños aprendían en la escuela no lo retenían por mucho tiempo y que su conocimiento podía aún retroceder con el tiempo ([22], p. 93). Es importante que la educación no trate de realizar lo que es imposible y que se centre en lo que puede hacer. Hay, según Piaget, un orden fijo del desarrollo de las estructuras mentales mayores ([21], p. 179) y estaba convencido de que la pedagogía no puede cambiar esto. Puede acelerar varios aspectos de este desarrollo, pero Piaget también sospechaba que había un ritmo óptimo de desarrollo ([19], p. 21) y que en lugar de sólo tratar de hacer que todo ocurra tan rápido como sea posible, los maestros deben de buscar, y hacer resonancia con el ritmo que sea más natural para sus estudiantes. Quizá Piaget se oponía sobre todo a lo que según se dice, él llamó el "problema americano", el cual consiste en un futil intento por aumentar y acelerar el desarrollo intelectual mediante entrenamiento directo en las tareas que Piaget utilizó para localizar dónde estaban los niños en el progreso de su desarrollo ([14], p. 173).

Por último, Piaget consideraba que el énfasis en la escuela tradicional sobre la enseñanza por asociación, en lugar de mediante asimilación ([16], p. 185) era una de las razones por las cuales no se utilizaban los desarrollos espontáneos de los niños ([23], pp. 244-346).

1.2. Desarrollo intelectual

Uno de los temas más importantes en el influyente trabajo de Piaget y García ([24]) es que la historia del desarrollo intelectual no trata sobre la adquisición de porciones específicas de conocimiento sino, más bien, tiene que ver con el surgimiento de mecanismos poderosos mediante los cuales un individuo aumenta su habilidad para entender situaciones complejas. Estos mecanismos incluyen la abstracción reflexiva, las dicotomías asimilación/acomodación y desequilibración/reequilibración y la tricotomía intra, inter y trans (*op. cit.*). De manera más específica, el entendimiento conceptual de un fenómeno matemático pasa a través de concepciones de acciones, procesos y objetos y estos entendimientos están coordinados en esquemas que se utilizan para tratar con estos fenómenos ([22], pp. 95, 103, [17], p. 704, [18], p. 81).

El desarrollo de estos mecanismos ocurre, hasta cierto punto, de manera espontánea como un resultado de la maduración, pero sólo en presencia de experiencias apropiadas y, como Piaget señalaba en muchas ocasiones, bajo la influencia de la interacción social ([22], pp. 98, 129, [23], p. 247, [16], p. 178).

1.3. ¿Qué puede hacer la pedagogía?

Cuál es entonces, según Piaget, el papel de la pedagogía en el desarrollo intelectual y el aprendizaje que se deriva de ella? En términos generales, es el de cooperar con los mecanismos de aprendizaje y el de ayudar al estudiante a desarrollar, darse cuenta de ellos e invocarlos de manera consciente. En efecto, aunque los mecanismos se puedan desarrollar en la mente de un estudiante particular, pude no tener conciencia de ellos y es posible que no los invoque en una situación dada ([17], p. 71, [18], p. 86.). Esta es un área en la cual la educación puede hacer una contribución.

Desde el punto de vista de Piaget, el maestro debe comenzar con las estructuras que el estudiante ya ha construido espontáneamente como resultado de los factores que hemos descrito y ayudar al niño a relacionarlas con las estructuras matemáticas tal como el maestro las entiende ([17], p. 72, [19], p. 19, [21], p. 179.). Existen, al menos, dos maneras mediante las cuales el profesor puede lograr estos objetivos. Una es hacer participar a los matemáticos. Piaget veía "... un gran futuro para la cooperación entre psicólogos y matemáticos trabajando sobre un método verdaderamente moderno para enseñar ... matemáticas". Otra es escuchar realmente a los niños y poner atención tanto a lo que dicen como al razonamiento que puede estar detrás de sus palabras ([20], p. 24).

Piaget ofreció un programa general para la educación desde preescolar hasta preparatoria.

"El entrenamiento en matemáticas se debe preparar, comenzando en el jardín de niños, mediante una serie de ejercicios relacionados con la lógica y los números, las longitudes y las superficies, etc., y este tipo de actividades concretas se debe desarrollar y enriquecer constantemente de una manera muy sistemática durante toda la escuela elemental, para cambiar poco a poco, al inicio de la educación media, hacia experimentos físicos de mecánica elemental. En estos términos, la educación matemática se fundamenta estrictamente en su ambiente natural de equivalencia de objetos y dará una visión completa a la inteligencia que pudo haber quedado puramente verbal o escrita". ([22], p. 194.).

La principal estrategia para lograr esto, según Piaget ([18], p. 85, [23], p. 246, [14], p. 174) consiste en que los maestros creen situaciones que faciliten el descubrimiento o invención por parte del niño de las ideas matemáticas y que presenten ejemplos desequilibrantes de tal manera que el niño desarrolle ideas nuevas con objeto de reequilibrar.

Por último, Piaget sugirió recomendaciones pedagógicas que quedaron insertadas en las recomendaciones de la Oficina Internacional de Educación y en la UNESCO ([17], p. 703).

- Guíe al estudiante a que forme sus (sic) propias ideas y descubra relaciones y propiedades matemáticas por sí mismo, en lugar de imponerle el pensamiento de adulto ya elaborado.
- Asegúrese que ha adquirido los procesos y las ideas operacionales antes de introducirlo al formalismo.
- No confíe al automatismo ninguna operación que no se haya asimilado.
- Asegúrese que el estudiante adquiera primero experiencia con las entidades y relaciones matemáticas para después iniciarlo en el razonamiento deductivo.
- Extienda la construcción deductiva de las matemáticas de manera progresiva.

- Enseñe al estudiante a plantear los problemas, establecer datos, explotarlos y sopesar los resultados.
- Dé preferencia a la investigación heurística de problemas en lugar de la exposición doctrinaria de teoremas.
- Estudie los errores que cometen los estudiantes y véalos como un medio para entender su pensamiento matemático.
- Entrene a los estudiantes en la práctica de la verificación personal y la auto-corrección.
- Infunda gradualmente en los estudiantes el sentido de aproximación.
- Dé prioridad a la reflexión y al razonamiento.

2. De Piaget a las situaciones del nivel universitario

En lugar de tratar de extender todo lo que dijo Piaget sobre el desarrollo de la inteligencia y la educación, mi forma de trabajo ha consistido en buscar entre las obras de Piaget aquellas ideas que mi experiencia y, subsecuentemente, mis investigaciones sugieren que son aplicables, posiblemente después de alguna revisión, a las situaciones del nivel universitario. En el caso del desarrollo intelectual, esencialmente he tratado de hacer esto en dos trabajos anteriores ([7, 8]). En este artículo, me concentro en reformular las ideas de Piaget sobre la educación para aplicarlas en el nivel universitario.

Una dificultad seria para hacer esta transición estriba en que en la teoría de Piaget el entendimiento conceptual tiene su fuente en la manipulación de los objetos físicos. Conforme el nivel matemático de los conceptos aumenta, es necesario, según Piaget, construir objetos nuevos, no más físicos sino mentales, y manipularlos con objeto de construir las ideas matemáticas (véase por ejemplo, Beth and Piaget [2] and Dubinsky [10]). Un problema importante en la educación matemática es hallar sustitutos apropiados para los objetos físicos. En mi trabajo, la computadora se ha utilizado con este propósito.

Otro obstáculo al acercamiento piagetiano en niveles superiores de las matemáticas es que una buena parte de sus ideas está relacionada con el desarrollo espontáneo. Nuevamente, conforme el nivel de sofisticación aumenta, hay menos y menos de esto. En consecuencia, el papel del maestro de crear situaciones que fomentarán los desarrollos que deben darse se vuelve aún más importante de lo que es en los niveles elementales sobre los cuales Piaget concentró su atención.

La siguiente es una lista de aquellas ideas de Piaget sobre educación, tomadas de la lista precedente, que he tratado de implementar en la investigación y desarrollo del trabajo que yo realizo.

- Concentrarse en los mecanismos mediante los cuales se lleva a cabo el desarrollo intelectual. Estos incluyen la abstracción reflexiva y la dicotomía desequilibración/reequilibración.
- Ayudar a los estudiantes a construir acciones, a interiorizarlas en procesos y a encapsularlos, en objetos.
- Ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de las estructuras que han construido, a conectarlas con los conceptos matemáticos y a hacer construcciones adicionales para tratar con situaciones nuevas.
- Cambiar el papel del maestro de diseminador de información a guía y asistente.

- Prestar atención a las voces de los estudiantes, a sus errores y a sus éxitos y tratar de entender su pensamiento.
- Crear situaciones que alienten a los estudiantes a hacer construcciones mentales para tratar con las situaciones de los problemas matemáticos.
- Permitir que los estudiantes construyan bases sobre la experiencia para los conceptos antes de enfrentar el formalismo que estructura los conceptos.
- Dar a los estudiantes una oportunidad de descubrir los conceptos matemáticos antes de que les sean explicados, ya sea por otros estudiantes o por el maestro.
- Establecer un ambiente en el cual los estudiantes tengan oportunidad de interacciones sociales ricas, tanto con otros estudiantes como con el maestro.

Mi método pedagógico tiene tres componentes principales que se utilizan con el fin de lograr estas metas: investigación en el aprendizaje, el ciclo de enseñanza ACE y el aprendizaje cooperativo.

Investigación en la enseñanza. Los estudios son principalmente cualitativos, incluyendo entrevistas a fondo con los estudiantes sobre cómo están pensando conforme se esfuerzan para dar sentido a una situación matemática.

Ciclo de enseñanza ACE. La estructura de los cursos es un ciclo con tres componentes: actividades con la computadora en un laboratorio, trabajo en clase sobre problemas relacionados con las actividades con la computadora y discusión de estos problemas y sus soluciones; y ejercicios con objeto de reforzar lo que se ha aprendido y señalar el trabajo futuro.

Las actividades de computadora consisten principalmente en la implementación de varios conceptos matemáticos en la computadora y de uso en la solución de problemas, estas actividades se presentan a los estudiantes en forma de tareas que conducen a la desequilibración y les dan una oportunidad de construir una base de experiencias para los conceptos matemáticos y para descubrir ideas matemáticas específicas. El éxito en estas tareas conduce a la desequilibración.

Estas actividades están diseñadas de tal manera que, como resultado de realizarlas, o aun de intentarlas, el estudiante haga abstracciones reflexivas mediante las cuales se efectúan las construcciones mentales de acciones, procesos y objetos apropiados.

El trabajo de solución de problemas en el salón de clases continúa a esta actividad y las discusiones ayudan a los estudiantes a reflexionar sobre las computadoras y las actividades del salón de clases de manera que puedan llegar a tener consciencia de las estructuras que están construyendo.

Aprendizaje cooperativo. Los estudiantes realizan todo este trabajo, incluyendo sus tareas y algunos de sus exámenes, en grupos cooperativos permanentes (a lo largo del curso) de trabajo. Esto proporciona un ambiente de interacción social que puede mejorar la maduración de su entendimiento (y hay una investigación que atestigua este efecto [27]).

En este sistema pedagógico, el papel del maestro comienza a moverse de ser la figura central de toda la actividad hacia ser una componente del ambiente total de aprendizaje. Él o ella tiene un papel de guía, facilitador, creador de situaciones y asesor, pero le toca al estudiante la responsabilidad básica de aprender y hacer las construcciones mentales requeridas.

En lo que resta de este artículo, describiremos de manera más detallada este método pedagógico y las investigaciones en las que está basado. Comenzaré con algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes a una pregunta en una entrevista sobre el orden de los elementos de un grupo. Trataré de mostrar cómo esto motiva el desarrollo de una perspectiva teórica que puede usarse con el fin de dar sentido a esas respuestas. Después de una discusión general de las características de una teoría del aprendizaje, explicaré la perspectiva teórica, basada en un interpretación de las ideas de Piaget, con la cual trabajo. Por último, consideraré el ciclo ACE de nuevo y daré algunos ejemplos de las tareas en computadora que pueden aparecer en estas actividades.

3. Las voces de los estudiantes

La pedagogía que se describe en este ensayo se usó en un curso de álgebra abstracta en una universidad pública grande en un estado en el centro de Estados Unidos. Los estudiantes no eran excepcionalmente buenos y aunque muchos de ellos se estaban preparando para ser maestros de matemáticas de secundaria, bastantes entre ellos parecían atemorizados por la materia y la mayoría tenía absoluta falta de confianza en su habilidad para hacer algo más que seguir de cerca los pasos de un algoritmo.

Se entrevistó a fondo a los estudiantes poco después del final del curso en una serie de preguntas que incluían la siguiente:

Suponga que G es un grupo conmutativo con un elemento de orden 2 y un elemento de orden 3. ¿G debe tener un elemento de orden 6? Pruebe esto o dé un contraejemplo. ¿Qué pasaría si se reemplazaran 2 y 3 por otros números?

Aunque la mayoría de la clase contestó bastante bien a esta pregunta, hubo gran diversidad en los logros y los siguientes cuatro extractos son representativos de las respuestas que se encontraron.

La primera, de Nathan, no fue muy exitosa. Escribió una colección de símbolos tales como a, bbb, a^2b sin ninguna coherencia aparente. El entrevistador le pidió que explicara qué estaba haciendo y él respondió lo siguiente.

Um. No estaba muy seguro. Bueno, usted sabe, si se tiene un elemento 2 por 3 es 6, bien, entonces tendrá... Verá cómo hice la conexión, ¿correcto? Cómo puedo hacer esta conexión 2 por 3 es 6, correcto. Así se tenía a por a y bbb. Y si se multiplica, se obtiene un elemento que está ahí, pero no necesariamente en orden. Bueno, no, de acuerdo. Sabemos que e por e es e, así que a por a por b por b por b debe ser e. Este es un elemento de orden 5, ¿no es así? y este no es el mismo elemento. Entonces... Nathan no progresó más en el problema.

El siguiente estudiante respondió de manera similar, pero empezó a organizar sus actividades escribiendo expresiones tales como a, $a^2 = e$, b, b^2, $b^3 = e$ y ab, a^2b^2, $ab^3 = a$, $a^2b = b$, ab^2, $a^2b^3 = e$.

Él reconoció que esto significa que existe un elemento cuya sexta potencia es la identidad.

Ted: *ab* por *ab* al cuadrado, porque es conmutativo, *a* al cuadrado, *b* al cubo que es *e* ... Porque *a* al cuadrado es *e* y *b* al cubo es *e*.

E: Bueno, te estoy siguiendo. Así que, la pregunta es, ¿debe haber un elemento de orden seis?

Ted: Bueno, ya sabemos los órdenes de éstos, *b* al cuadrado, *b* al cuadrado por *b* al cuadrado es *b* a la cuarta que es *b* ~~al~~ cubo veces, 2b al cubo por *b*, el que da *e* por *b* por *b* al cuadrado, así que multiplicamos esto por otro *b* al cuadrado ... y esto será *b* al cubo que es *e*. Así que el orden es tres.

Ted: Um, *ab* por *ab* es igual al cuadrado *b* cuadrado y sabemos que *a* cuadrado es *e* así que debe ser *b* cuadrado por *ab*... es por *ab* es *ab* al cubo que es lo mismo que *a*, multiplicado por *ab* es *a* al cuadrado *b* que es *b*.

E: ¿Entonces cuál es su conclusión?

Ted: Tiene que tener un elemento de orden seis.

Ted no demostró que 6 es la menor potencia de *ab* que da la identidad, así que tuvo éxito con la mitad del problema.

Ahora veamos un estudiante, Mitch, quien resolvió el problema para los órdenes 2, 3.

M: Obviamente esta será la razón por la cual funciona es , um, ... tendrá que ser *e*, irás hasta allá, supongo, como que ambos son iguales a *e* y no te sobra ni *a* ni *b*. Y esa es la razón por la que tiene que existir; es decir, sí, tiene que existir, porque de otra manera no tendrás *a* por *b*, um, y eso no será igual a la identidad, hasta que *a* um, sea igual a la identidad y *b* y ~~no~~ *a* mismo, pero, um, *a* por ella misma es igual a la identidad.

Aunque reconoce que la solución es el mínimo común múltiplo de 2, 3, ¡no es capaz de usar este hecho para resolver el problema para dos elementos de orden arbitrario!

Por último, tenemos una estudiante, Jocelyn, quien resolvió el problema para el caso general y dio la siguiente explicación que es una descripción bastante madura y completa de la situación matemática.

J: Bien, tenemos *a* con cierto orden, lo que significa el número de veces que debemos multiplicar el elemento por él mismo para obtener la identidad. Y *b* tiene otro cierto orden; es decir, el número de veces que se debe multiplicar para volver al otro. Así que si juntamos *ab* y tomamos potencias de *ab*... Es como tener un cierto, no, *a* tiene un cierto orden y *b* tiene un cierto orden, así que se toma *ab* veces el mismo. Por ello vas a llegar a un punto donde *a* regresa cíclicamente a la identidad y, tú sabes, *b* puede tener un orden más grande, por lo tanto, permanecerá con orden más grande hasta que regrese a la identidad, mientras hace esto *a* recorre su ciclo y... así va a llegarse a un punto en el que coincidan. Y ese será el mínimo común múltiplo.

4. El sentido que tienen las respuestas que tienen sentido

Estas respuestas generan dos preguntas relacionadas:

¿Cómo podemos explicar estas diferencias en el desempeño de los estudiantes?

¿Qué se puede hacer para eliminar las diferencias?

A la primera pregunta hay muchas respuestas posibles: Los estudiantes pueden tener diversas habilidades y por ello algunos tienen más éxito que otros. Se ha sugerido que los estudiantes fracasan o no tienen éxito debido a que las explicaciones en clase no fueron suficientemente buenas. Además, muchos han pensado que el hecho de que una pregunta esté fuera de contexto explica por qué algunos estudiantes tienen dificultades con ella.

Las respuestas a la primera pregunta implican que existen posibles soluciones: se debe preparar mejor a los estudiantes en los cursos previos al álgebra abstracta; se deben dar clases mejores y más motivantes y los problemas se deben formular a partir de situaciones reales.

No tenemos una cantidad suficientemente grande de datos de investigación acerca de estas explicaciones o de las soluciones correspondientes, pero estoy convencido, basado en más de 40 años de enseñar en la universidad, que este punto de vista es inadecuado y que es necesario buscar explicaciones y soluciones basadas en lo que podría estar sucediendo en la mente de los estudiantes. En mi opinión, la manera de hacerlo es a través del desarrollo de una teoría o de una perspectiva teórica.

5. Características de una teoría del aprendizaje

¿Qué características debe tener una buena teoría? Debe ser coherente y parsimoniosa, generalizable y predictiva, aplicable y efectiva.

Una teoría debe ser coherente en cuanto a que proporcione un lenguaje razonable para comprender los datos. Los conceptos importantes que la teoría usa deben tener definiciones que sean operacionales en el sentido de que sea posible que otras personas diferentes al investigador inicial apliquen estos términos. Nada que no sea esencial debe estar en la teoría, y cuando haya dos explicaciones competitivas se debe dar preferencia a la más sencilla.

Cuando una explicación teórica no es válida únicamente para un conjunto de estudiantes dados o un tópico en particular no es valioso. Una buena teoría debe proveer herramientas que puedan usarse en una amplia variedad de situaciones. Estas herramientas también deben predecir las dificultades que los estudiantes puedan tener. Dicha predictibilidad no es sólo una característica apreciable de la teoría, sino proporciona también una manera para estimar su valor.

Debe ser posible aplicar una teoría para diseñar tratamientos instruccionales y éstos deben ser efectivos para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

En las secciones siguientes presentaré y describiré una perspectiva teórica particular y algunos aspectos pedagógicos que se derivan de ella.

6. Una perspectiva teórica

Comenzaré la discusión teórica con una afirmación sobre la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo.

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y

A la primera pregunta hay muchas respuestas posibles: Los estudiantes pueden tener diversas habilidades y por ello algunos tienen más éxito que otros. Se ha sugerido que los estudiantes fracasan o no tienen éxito debido a que las explicaciones en clase no fueron suficientemente buenas. Además, muchos han pensado que el hecho de que una pregunta esté fuera de contexto explica por qué algunos estudiantes tienen dificultades con ella.

Las respuestas a la primera pregunta implican que existen posibles soluciones: se debe preparar mejor a los estudiantes en los cursos previos al álgebra abstracta; se deben dar clases mejores y más motivantes y los problemas se deben formular a partir de situaciones reales.

No tenemos una cantidad suficientemente grande de datos de investigación acerca de estas explicaciones o de las soluciones correspondientes, pero estoy convencido, basado en más de 40 años de enseñar en la universidad, que este punto de vista es inadecuado y que es necesario buscar explicaciones y soluciones basadas en lo que podría estar sucediendo en la mente de los estudiantes. En mi opinión, la manera de hacerlo es a través del desarrollo de una teoría o de una perspectiva teórica.

5. Características de una teoría del aprendizaje

¿Qué características debe tener una buena teoría? Debe ser coherente y parsimoniosa, generalizable y predictiva, aplicable y efectiva.

Una teoría debe ser coherente en cuanto a que proporcione un lenguaje razonable para comprender los datos. Los conceptos importantes que la teoría usa deben tener definiciones que sean operacionales en el sentido de que sea posible que otras personas diferentes al investigador inicial apliquen estos términos. Nada que no sea esencial debe estar en la teoría, y cuando haya dos explicaciones competitivas se debe dar preferencia a la más sencilla.

Cuando una explicación teórica no es válida únicamente para un conjunto de estudiantes dados o un tópico en particular no es valioso. Una buena teoría debe proveer herramientas que puedan usarse en una amplia variedad de situaciones. Estas herramientas también deben predecir las dificultades que los estudiantes puedan tener. Dicha predictibilidad no es sólo una característica apreciable de la teoría, sino proporciona también una manera para estimar su valor.

Debe ser posible aplicar una teoría para diseñar tratamientos instruccionales y éstos deben ser efectivos para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

En las secciones siguientes presentaré y describiré una perspectiva teórica particular y algunos aspectos pedagógicos que se derivan de ella.

6. Una perspectiva teórica

Comenzaré la discusión teórica con una afirmación sobre la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo.

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones.

Hay muchos elementos de la labor educativa que se tocan en esta afirmación. Por ejemplo, el término tendencia se refiere al hecho de que es muy frecuente que a un estudiante se le plantee una pregunta, digamos en un examen, o en clase, y es posible que parezca que no sabe la respuesta. Sin embargo, más adelante (sin que haya ninguna experiencia de aprendizaje detectable entre tanto), o aun en una fecha anterior, el estudiante puede dar una respuesta perfectamente razonable. ¿Cómo calificaríamos este desempeño? De acuerdo, no debe obtener "la calificación completa" porque esto se debe reservar para el caso en que se da una buena respuesta en cualquier momento. Pero el estudiante no debe obtener cero porque esto se debe reservar para el caso en que el estudiante nunca da una respuesta razonable. Algo intermedio, no hay duda, pero, ¿dónde? Y ¿qué implicaciones tiene esto para los exámenes? Si un estudiante tendrá un desempeño muy diferente en intentos sucesivos y el examen sólo permite un intento, ¿cómo refleja la calificación el hecho de que en un segundo intento el estudiante podría hacerlo mucho mejor-o mucho peor?

Otros puntos de esta afirmación son más fáciles de manejar. La idea completa de "situación problemática" se relaciona con la dicotomía desequilibración/reequilibración. El estudiante debe ver el problema en la situación y ser perturbado por éste cuando el aprendizaje se está llevando a cabo. El contexto social se refiere, al menos, al papel del aprendizaje cooperativo. Pero la componente más importante de esta afirmación, y la que la hace específica a las matemáticas, es la parte sobre las construcciones específicas y ahora regreso a ello.

7. Construcciones para el conocimiento matemático

Comentaré, con un poco de más detalle, la construcción de acciones, procesos y objetos que se mencionaron anteriormente. El esquema general de estas construcciones se ilustra en la Figura 1.

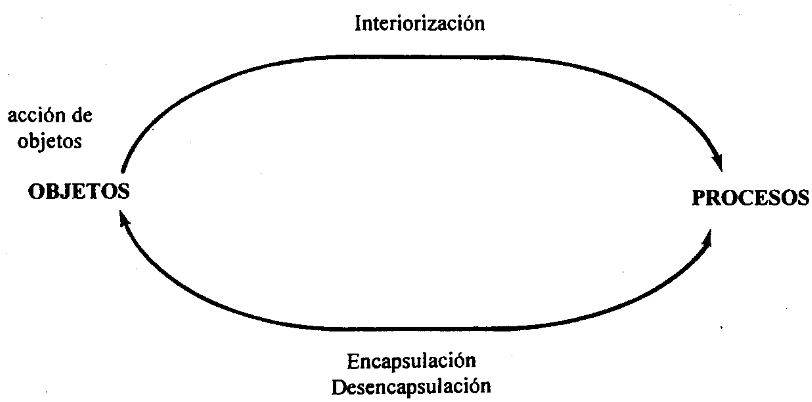

Figure 1. Construcción de acciones, procesos, objetos

Acción. Una acción es una transformación de objetos que el individuo percibe como algo que es hasta cierto punto externo. Es decir, un individuo cuyo entendimiento de una transformación está limitado a una concepción de acción puede realizar la transformación únicamente reaccionando a indicaciones externas que le proporcionan detalles precisos sobre qué pasos dar.

Por ejemplo, un estudiante que no es capaz de interpretar una situación como una función a menos que tenga una (única) fórmula para calcular valores está restringido a un concepto de acción de una función. En tal caso, el estudiante es incapaz de hacer gran cosa con esta función, excepto evaluarla en puntos específicos y manipular la fórmula. Las funciones con el dominio partido, las inversas de funciones, la composición de funciones, los conjuntos de funciones, la noción de que la derivada de una función es una función y la idea de que la solución de una ecuación diferencial es una función son todas fuentes de grandes dificultades para los estudiantes. Según nuestra perspectiva teórica, un motivo importante de la dificultad es que el aprendiz no puede ir más allá de una concepción de acción de una función, y todas estas nociones requieren de concepciones de proceso y/o objeto. (véase [3] para una elaboración de estas cuestiones.)

Otro ejemplo de una concepción de acción viene de la noción de clase lateral (izquierda o derecha) de un grupo en álgebra abstracta. Por ejemplo, considere el grupo modular $[Z - \{20\}, + -\{20\}]$ – es decir, los enteros $\{0, 1, 2, \ldots, 19\}$ con la operación de suma módulo 20 – y el subgrupo $H = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ de los múltiplos de 4. Como se ve en [13], no es muy difícil para los aprendices trabajar con clases laterales tales como $2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ porque están formadas, ya sea por una lista explícita de los elementos obtenidos al sumar 2 a cada elemento de H, o aplicando alguna regla, por ejemplo, "empezamos con 2 y le sumamos 4", o una condición explícita tal como, "el residuo de la división entre 4 es 2". La comprensión de una clase lateral, como el conjunto de operaciones que se realizan de hecho para obtener un conjunto definitivo es una concepción de acción. Se necesita algo más para trabajar con clases laterales en un grupo tal como *S_n*, el grupo de todas las permutaciones de *n* objetos, en el que no hay fórmulas sencillas disponibles. Aun en el caso de la situación más elemental de *Bbb _n*, los estudiantes que no tienen más que una concepción de acción tendrán dificultades cuando razonan sobre clases laterales (tales como contarlas, compararlas, etc.) En el contexto de nuestra perspectiva teórica, estas dificultades están relacionadas con la inhabilidad de los estudiantes para interiorizar estas acciones y en procesos, o encapsular los procesos en objetos.

Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, nuestro acercamiento pedagógico basado en una teoría de aprendizaje comienza con actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar en realidad dichos pasos. En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas.

En el caso de las funciones, una concepción de proceso permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe una o más entradas, o valores de las variables independientes, que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa las salidas, o los valores de las variables dependientes, como resultado. Por ejemplo, para entender una función tal como la dada por sen(x), se requiere una concepción proceso del concepto de función porque no se cuenta con instrucciones explícitas para obtener una salida para una entrada dada; con el fin de calcular la función, uno debe imaginar el proceso de asociar un número real con su seno.

Con una concepción de proceso de función, un individuo puede ligar dos o más procesos para construir una composición o invertir el proceso para obtener funciones inversas [3].

En álgebra abstracta, una comprensión proceso de las clases laterales incluye el pensar en la formación de un conjunto mediante la operación de un elemento fijo con todos los elementos de un subgrupo particular. Otra vez, no es necesario realizar las operaciones, sino sólo pensar en que se realizan. Así, con una concepción proceso, se pueden formar clases literales en situaciones en las que no se dispone de fórmulas. (Ver, por ejemplo, [13].)

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede para construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

En el curso de la realización de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo con el fin de usar sus propiedades al manipularlo.

Es fácil ver cómo la encapsulación de procesos en objetos y la encapsulación de objetos de regreso a procesos aparece cuando se piensa en la manipulación de funciones como encontrar la suma, el producto, o cuando se forman conjuntos de funciones. En el contexto del álgebra abstracta, dado un elemento x y un subgrupo H de un grupo G, si un individuo piensa en forma general sobre la clase lateral (izquierda) de x módulo H como un proceso en el que se opera 20 sobre cada elemento de H, este proceso se puede encapsular en un objeto xH. Así, se pueden nombrar las clases laterales, se pueden efectuar operaciones sobre ellas ([13]), y muchas otras acciones sobre las clases laterales de H, como contar su número, comparar su cardinalidad y verificar su intersección pueden tener sentido para el individuo. El pensar sobre el problema de investigar dichas propiedades requiere de la interpretación de las clases laterales como objetos, mientras que la búsqueda real requiere que estos objetos sean desencapsulados en la mente del individuo, de tal manera que sea posible usar las propiedades del proceso del que vinieron estos objetos (en este caso, ciertos tipos de formación de conjuntos).

En general, se considera que la encapsulación de procesos para obtener objetos es extremadamente difícil ([24], [25], [26]) y casi ninguna estrategia pedagógica ha sido efectiva para ayudar a los estudiantes en situaciones como las funciones o las clases laterales. Parte de la razón de esta ineficacia es que hay muy poco (o nada) en nuestra experiencia que corresponda a la realización de acciones sobre lo que se interpreta como procesos.

8. Características de esta teoría

Ahora estamos en una posición en la que podemos ver cómo esta perspectiva teórica se relaciona con características mencionadas anteriormente.

Coherente y parsimoniosa. Podemos ver cómo esta teoría se puede usar para explicar los datos presentados en nuestras selecciones de las entrevistas. La cuestión de la parsimonia tiene una connotación un poco negativa (hay algo que no necesita estar allí) y subjetiva, así que dejaremos al lector decidir sobre esta característica.

Para Nathan, la potencia de los elementos y el orden de los elementos estaban entendidos apenas en el nivel de acción. Podemos observar que él no estaba capacitado para razonar sobre ellos.

Ted definitivamente tiene una concepción de acción de estas nociones matemáticas y esto le permite llegar a una conclusión que resuelve la mitad del problema. Sin embargo, como él no ha desarrollado una concepción de proceso de estas manipulaciones de los elementos de un grupo, no puede revertirlas o pensar sobre la potencia para considerar la posibilidad de llegar antes a la identidad. Por ello, él no pudo resolver la otra mitad del problema que consiste en mostrar que 6 es la menor potencia positiva de ab que es igual a la identidad.

Parece claro que Mitch está efectuando los cálculos de las potencias en su mente y puede pensar en ambas, las reales y las potenciales. Esta es la forma en la que resuelve la otra mitad del problema ("Usted tendrá que llegar hasta allí"). Pero no puede regresar el proceso y razonar sobre él para ver cómo funciona para elementos a, b de orden arbitrario.

En el caso de Jocely, tenemos una descripción muy sofisticada del proceso y es razonable sospechar que ella es capaz de pensar en el proceso como un objeto, el cual puede ser "indexado" por los valores de los órdenes de a y b.

Generalizable y predictiva. He tratado de ilustrar la generalización de esta teoría, mostrando cómo se puede usar en varios contextos matemáticos diferentes, relacionados por ejemplo, con funciones y grupos. En nuestros estudios de investigación ([3, 4, 5, 12, 13]), generalmente, presentamos una descripción de la forma en la que se puede aprender un concepto basándose en esta teoría –y posteriormente, se revisa después de analizar las reacciones de los estudiantes y sus dificultades. Aunque los datos suelen conducir a hacer revisiones importantes de nuestras descripciones, encontramos que, a menudo, la teoría predice el proceso mental que parece estar en los datos.

Otra indicación de que la teoría es generalizable se tiene en que muchos otros investigadores han podido usar este lenguaje.

Aplicable y efectiva. En las dos secciones siguientes veremos cómo se aplica esta teoría al desarrollo de métodos pedagógicos. Para su efectividad remito al lector a los estudios reportados ([3, 4, 6, 11]).

9. Una estrategia pedagógica

Ya he descrito el ciclo de enseñanza ACE, que estructura la propuesta pedagógica derivada de nuestra teoría. La parte más importante de este sistema son las actividades con la computadora, las cuales están diseñadas para hacer que los estudiantes efectúen las construcciones específicas de acciones, procesos y objetos contenidos en la teoría, cuando ésta aplica a los conceptos particulares en cuestión. Daré algunos ejemplos de esto en la siguiente sección.

También se cumplen otras características de las teorías en nuestra pedagogía. Por ejemplo, el aprendizaje cooperativo proporciona un medio ambiente social que conduce al desarrollo conceptual y el trabajo en grupos tiende a ayudar a los estudiantes a considerar métodos alternativos y a hacer conciencia de las estructuras que están construyendo ([27]). El hecho de que sus actividades en la computadora requieran del manejo de problemas que no se han introducido todavía en el curso, da a los estudiantes la oportunidad de descubrir los conceptos matemáticos y construir su propia manera de entenderlos. Por último, nuestro sistema de evaluación permite exámenes en grupo y exámenes sin límite de tiempo con el fin de tomar en consideración el hecho de que los estudiantes pueden tener conocimientos y formas de comprensión que no se revelan en un examen tradicional.

10. Construcciones por computadora

En esta sección daré algunos ejemplos de las construcciones que se pide a los estudiantes que hagan en la computadora y describiré cómo estas construcciones se relacionan con las acciones, procesos y objetos. El trabajo en la computadora está hecho en un lenguaje de programación llamado ISETL. La sintaxis de este lenguaje es muy parecida a la notación matemática normal y el lector tendrá poca dificultad para interpretar esta sintaxis. Si desea mayor información sobre ISETL y su uso en educación vea [9].

Comenzamos nuestros ejemplos con algunas construcciones relacionadas con los conceptos elementales de grupo. Se da a los estudiantes sólo una descripción vaga de ciertas situaciones (tales como "el uso de una operación binaria te mantiene en el contexto") y se les pide que escriban un programa en la computadora que verifique si una operación binaria satisface la condición. La mayoría de los estudiantes termina con algo parecido a lo siguiente (aunque no precisamente con estos nombres):

```
is_closed := func(S, op);
          return forall a, b in S| a .op b in S;
     end;

is_assoc := func(S, op);
          return forall a, b, c in S|
             a .op (b .op c) = (a .op b) .op c;
     end;

id := func(S, op);
          return arb({ i:  i in S|
             forall x in S| i .op x = x and x .op i = x});
     end;

inv := func(S, op);
          return {[a,b] :  a,b in S| a .op b = id };
     end;
```

Los estudiantes aplican este programa a varios ejemplos que ilustran diversas posibilidades. Luego se les pide que usen las propiedades con el fin de distinguir algunos de los ejemplos y esto conduce al siguiente programa y a su aplicación a grupos modulares y grupos de simetrías.

```
is_group := func(S, op);
                return is_closed(S, op) and
                       is_assoc(S, op) and
                       is_defined(id(S,op)) and
                       forall x in S | exists x' in S | [x,x'] in inv;
            end;


Z5 := {0..4};
plus5 := func(a,b); return (a+b) mod 5; end;
is_group(Z5,plus5);

S5 := [a,b,c,d,e] :  a,b,c,d,e in 1,2,3,4,5 | #a,b,c,d,e=5;
comp := func(x,y,); return [x(y(i)) :  i in [1,2,3,4,5] ]; end;
is_group(S5, comp);
```

Los ejemplos anteriores están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir las acciones que correspondan a las propiedades de los grupos, a interesarlos en los procesos (mediante la escritura de funciones que las implementen) y a encapsular estos procesos en objetos, al incluirlos en una lista que verifica las propiedades que definen al grupo.

En el ejemplo siguiente mostramos las actividades en computadora diseñadas para ayudar a los estudiantes a comprender las clases laterales, primero como procesos formados al multiplicar un elemento fijo de un grupo con cada uno de los elementos de un subgrupo y después como objetos, en el sentido de que es posible aplicar una operación (producto) a dos clases laterales para obtener otra. Como resultado de tal actividad los estudiantes tienden a tener más éxito con el teorema de Lagrange y los grupos cociente [1]. Se les pide realizar la tarea siguiente:

Escriba una func PR en ISETL que acepte un conjunto y una operación binaria y que regrese una func que acepte dos entradas que puedan ser cualquier combinación de elementos de G y/o subconjuntos de G. Su func debe determinar en cuál de los cuatro casos quedan las entradas y luego regresar el "producto generalizado de grupo" de las dos entradas. Es decir, si las entradas son ambos elementos, entonces el producto es el producto usual de grupo. Si la primera entrada es un elemento g y la segunda es un subconjunto S, entonces el producto es el conjunto de todos los productos $g \cdot ix$, para x en S. De manera similar se obtienen los otros dos casos.

Este es un problema muy difícil para los estudiantes y luchan durante mucho tiempo para resolverlo. Al final, y en algunos casos con la ayuda del instructor, la mayoría de los estudiantes llega a algo como lo que se muestra enseguida. Es interesante observar cuán sencillo es el programa. Aunque no hay evidencia, estoy convencido de que las dificultades que los estudiantes tienen con esta tarea no están generadas por ningún obstáculo de programación, sino porque los estudiantes se encuentran en un proceso de construcción mental que no es trivial.

```
PR := func(G,o);
       return func(x,y);
               if x in G and y in G
                  then return x .o y;
               elseif x in G and y subset G
                  then return { x .o b :  b in y};
               elseif x subset G and y in G
                  then return { a .o y :  a in x};
               elseif x subset G and y subset G
                  then return { a .o b :  a in x, b in y};
               end;
              end;
      end;

oo := PR(S5, comp);
```

Por último, daremos un ejemplo relacionado con la inducción matemática. Aquí, la primera dificultad es que las proposiciones deben ser objetos para que puedan formar la imagen de una función. Después, una función se debe entender como un proceso que transforma cualquier clase de objetos, digamos un entero, en cualquier otra clase de objetos, digamos una proposición. Estas dos dificultades se trabajan en el contexto del problema siguiente al pedir a los estudiantes que escriban una función en la computadora que implemente el enunciado del siguiente problema.

Muestre que en un casino que tiene fichas que valen \$5 y \$9, se puede representar cualquier cantidad de dinero suficientemente grande.

Los estudiantes no tienen mucha dificultad en escribir el programa siguiente y aprenden a comenzar un problema de inducción construyendo en la computadora, o en su mente, una función que transforma enteros positivos en proposiciones.

```
P := func(n);
       return (exists x,y in {0..n} | 5*x+9*y=n);
     end;
```

Sucede que no todos los tipos de proposiciones se entienden como objetos al mismo tiempo o con el mismo grado de dificultad. Lo más difícil, claramente es la implicación. Se pide a los estudiantes que escriban una función en la computadora que convierta una función valuada en una proposición acerca de los enteros positivos en otra función del mismo tipo en la cual la proposición se ha cambiado a la implicación de n a $n+1$.

```
impl_fn := func(P);
               return func(n);
                    return P(n) impl P(n+1);
                  end;
           end;
```

Después de escribir este código y aplicarlo en situaciones de inducción, los estudiantes parecen dejar de tener problemas para darse cuenta de que en inducción no se trata de probar el enunciado original sino solamente que, si es verdadero para un entero, lo es para el entero siguiente. Una vez que esto se ha logrado, las ideas del dominó o de la escalera adquieren significado para los estudiantes.

11. Conclusiones

En este artículo he tratado de exponer brevemente las ideas de Piaget sobre educación matemática y explicar cómo se pueden aplicar a las matemáticas de nivel universitario. He indicado cómo es que este trabajo está basado en una perspectiva teórica muy influida por la teoría de Piaget y dirigida por las reacciones de los estudiantes ante situaciones matemáticas problemáticas. Por último, he mostrado cómo esta teoría se puede aplicar al desarrollo de estrategias pedagógicas cuyos resultados están reportados en la literatura.

Referencias

[1] **Asiala, M., E.** Dubinsky, D. Mathtews, S. Morics, A. Oktac, Cosets, Normality and Quotients, in preparation.

[2] **Beth, E. W. J.** Piaget, Mathematical Epistemology and Psychology (W. Mays, trans.), Dordrecht: Reidel, 1966.

[3] **Breidenbach, D.,** Dibinsky, E., Hawks, J., Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics, {23,} 247-285.

[4] **Brown, A.,** DeVries, D., Dubinsky, E. and Thomas, K., Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups, in preparation.

[5] **Dubinsky, E.** Teaching mathematical induction I, The Journal of Mathematical Behavior, 305-317, (1986).

[6] **Dubinsky, E.** Teaching mathematical induction II, The Journal of Mathematical Behavior, 285-304, (1989).

[7] **Dubinsky, E.** constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in L.P. Steffe (ed.), Epistemological foundations of mathematical experience, New York: Springer Verlag, (1991).

[8] **Dubinsky, E.** Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in Advanced Mathematical Thinking, D. Tall (De.), Kluwer (1991), 231-250.

[9] **Dubinsky, E.** ISETL: A programming language for learning mathematics, Communications in Pure and Applied Mathematics, in press.

[10] **Dubinsky, E.** *El aprendizaje de los Conceptos Abstractos de la Matemática Avanzada*, in Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa, Puerto Rico, 6-10 de agosto, 1996, 1-9.

[11] **Dubinsky, E.** On learning quantification, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, in press.

[12] **Dubinsky, E.F.** Elterman \& C. Gong, 1988, The student's construction of quantification, For the Learning of Mathematics, 8 (2), 44-51.

[13] **Dubinsky, E.,** Dautermann, J., Leron, U., \& Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. Educational Studies in Mathematics, 27, 267-305.

[14] **Duckworth, E.,** Piaget Rediscovered} Journal of Researchin Science Teaching, 2 (1964) pp. 172-175.

[15] **Gruber, H.E and Vineche, J.J.,** (1977) {\it The Essential Piaget, New York: Basic Books.}

[16] **Piaget, J.,** Development and learning,} Journal of Research in Science Teaching 2, 177-186 (1964).

[17] **Piaget, J.,** Science of Education and the Psychology of the Child, Orion Press: New York, (1970).

[18] **Piaget, J.,** Comments on Mathematical Education.} In A.J. Howson,

[19] **Piaget, J.,** A structural foundation for tomorrow's education, Prospects, 2, 1 (Spring, 1972) 12-27.

[20] **Piaget, J.,** Piaget takes a teacher's look, Learning, (October 1973) 22-27.

[21] **Piaget, J.,** Piaget's Theory. In P.B. Neubauer (Ed.), The Process of Child Development (pp. 164-212). New York: Jason Aronson, 1975.

[22] **Piaget, J.,** To Understand is to Invent, Penguin Books: New York, (1976).

[23] **Piaget, J.,** Comments on Vygotsky's Critical Remarks, Archives de psychologie, 47 (1979) 237-249.

[24] **Piaget, J.,** García, R. Psychogenese histoires des science, Paris: Flammarion, 1983.

[25] **Sfard, A.,** (1987). Two conceptions of mathematical notions, operational and structural. In A. Borbas (De.), proceedings of the 11th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 162-169). Montreal: University of Montreal.

[26] **Sfard, A.,** (1991). On the Dual nature of mathematical conceptions. Educational Studies in Mathematics,} 22, 1-36.

[27] **Vidakovic, D.,** (1993). Differences between group and individual processes of construction of the concept of inverse function. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana.