

La epistemología genética: una interpretación

Resumen

En este artículo nos proponemos introducir la epistemología genética (constructivista) desarrollada por la escuela piagetiana. Esta epistemología constituye una ruptura profunda con las epistemologías tradicionales, tanto empiristas como racionalistas, pues en ella se redefinen conceptos centrales como "conocimiento", "realidad" a partir de un nuevo enfoque sobre las interacciones del sujeto cognoscente y su objeto de conocimiento. Los métodos psicogenético e histórico-crítico están articulados de manera tal que constituyen la base empírica de la epistemología constructivista, otorgándole entonces, un nivel de científicidad del que carecen las demás teorías epistemológicas. De allí que sea pertinente tomarla como fundamento para construir las bases epistemológicas de la educación científica.

Abstract: We will introduce the genetic Epistemology developed by the Piagetian School, which embodies a radical departure from traditional epistemologies (empiricism and rationalism). A novel viewpoint is established regarding the interaction between a cognizing subject and its object of knowledge. Historico-critical analysis and psychogenesis constitute the empirical scaffolding for this constructivist epistemology, wherewith it obtains a scientificity status foreign to other theories. It follows that Genetic Epistemology is appropriate as an epistemological basis for Science Education.

Introducción

La epistemología genética se propone, como uno de sus objetivos, el análisis de la formación y el desarrollo del conocimiento, en particular, del conocimiento científico. Pero la formación y el desarrollo del conocimiento sólo es posible porque hay interacción entre un sujeto cognoscente y un objeto de conocimiento.

Luis E. Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV-IPN, México, D.F.

La historia de las epistemologías, empiristas y aprioristas, muestra que se las puede caracterizar mediante el “peso” que otorgan o bien al sujeto o bien al objeto de conocimiento, *a la hora de la interacción*. Sin entrar en mayores detalles, vale la pena detenernos un momento en la consideración de estas epistemologías. El empirismo supone que el sujeto es esencialmente pasivo en la relación sujeto-objeto y afirma en consecuencia, que el conocimiento tiene su origen en el dato perceptual, suministrado por el objeto. El conocimiento es un modelo-copia del objeto. Esta posición se hizo célebre desde Aristóteles, para quien nada había en el intelecto que no hubiese estado antes en los sentidos.

El apriorismo, por su parte, supone que todo el peso en la interacción lo lleva el sujeto. Mediante sus estructuras cognitivas constituidas de antemano, el sujeto “captura” al objeto para producir el conocimiento.

Pues bien, la historia de las epistemologías tradicionales consiste, en esencia, en una especie de competencia entre estas posiciones, empirista y apriorista, que desde luego no se mantuvieron intactas, sino que fueron desarrollándose como respuesta a las críticas y objeciones que les planteaban sus adversarios. Nuestro siglo ha presenciado el desenvolvimiento del *empirismo lógico*, sin duda el producto más desarrollado del pensamiento empirista. Del lado del apriorismo, quizá la posición más sólida provino del sistema kantiano. Habremos de regresar a ella.

En todos estos casos, el sujeto que conoce es un sujeto adulto, en pleno dominio de sus facultades intelectuales. Y el objeto de conocimiento es (casi siempre) un objeto inmodificable. De modo que la relación sujeto-objeto está concebida, en estas epistemologías, como una relación de un único nivel.

Piaget y la epistemología

La obra epistemológica de Piaget (1896-1980) vino a cambiar este estado de cosas. Naturalmente, no es un trabajo de generación espontánea que rompe con el pasado simplemente porque lo ignore. En la obra piagetiana volveremos a encontrar la preocupación por la estructura de la relación sujeto-objeto. Como ocurre con frecuencia en el trabajo renovador, no es el problema central el que cambia sino la forma de indagar sobre él, la forma de concebir preguntas nuevas sobre ese problema que ha estado ante nosotros. Para Piaget, el conocimiento no es resultado ni de la sola actividad del sujeto, ni tampoco de la sola presencia del objeto. El conocimiento (y en esto ya se aparta de las epistemologías tradicionales) surge de la interacción del sujeto y el objeto, en la cual cada uno influye sobre el otro. Ya no será posible concebirlos separados: sujeto-objeto es una unidad dialéctica indisoluble.

Conviene hacer notar que la forma de concebir la estructura sujeto-objeto en la epistemología piagetiana, guarda una cierta relación con la forma correspondiente en la epistemología kantiana. Presentemos primero algunas ideas centrales de la epistemología kantiana para después apreciar mejor las diferencias.

El sujeto cognoscente kantiano viene dotado (“de fábrica”) de una estructura intelectual que le permite *interpretar sus registros perceptuales*. En la introducción de su *Crítica de la Razón Pura* (Kant, 1972, p. 27), Kant nos dice:

“No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Pues ¿por dónde iba a despertarse la facultad de conocer... como no fuera por medio de objetos

que hieren los sentidos... y elaboran así con la materia bruta de las impresiones sensibles, un conocimiento de los objetos llamado experiencia?... mas si todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia no por ello se origina todo él en la experiencia. Bien podría ser que nuestro conocimiento fuera compuesto de lo que recibimos por medio de impresiones y de lo que nuestra facultad de conocer () proporciona por sí misma sin que distingamos este añadido de aquella materia fundamental...” (subrayado nuestro)

Tenemos entonces, de acuerdo con Kant, una facultad de conocer antes de la experiencia sensorial, que combinada con la percepción sensorial produce una forma de conocimiento en la que no es fácil ya distinguir, por separado, ni el aporte del sujeto ni el aporte del objeto. Toda la experiencia sensorial es pasada a través del tamiz constituido por las estructuras cognitivas (inherentes) del sujeto. De modo que nuestro conocimiento del mundo, no es una *representación* (en el sentido de un modelo-copia) de esa realidad externa *en* nuestro intelecto (a pesar de la seducción del término “representación” sobre el que tendremos que volver), sino una *interpretación*, una *reconstrucción* que hacemos tomando nuestros registros perceptuales como materia prima y someténdolos al influjo de esa “máquina de interpretar y organizar” constituida por nuestro intelecto. Hasta aquí las semejanzas. Semejanzas, no coincidencias, como tendremos oportunidad de mostrar a continuación. Vayamos pues a las diferencias.

Para Piaget, el conocimiento tampoco es una copia de la realidad exterior al sujeto. Pero, en la interacción entre el sujeto y el objeto, aquél se acerca al objeto con determinadas estructuras intelectuales que le permiten asimilarlo y, al mismo tiempo, el objeto ejerce su influencia sobre el sujeto obligándolo a modificar sus estructuras cognitivas. Por una parte pues, el conocimiento es resultado de la interacción y además (aquí hay ya una diferencia de fondo) *tanto el sujeto como el objeto se transforman como resultado de la interacción*. Así que, la próxima vez que el sujeto se acerque al objeto, ya será “otro” sujeto epistémico el que participa en la interacción y será “otro” objeto de conocimiento el asimilado a sus (nuevas) estructuras cognitivas. Los niveles de interacción van cambiando como consecuencia de la actividad cognitiva del sujeto. El conocimiento producido no es ni una copia de la realidad exterior al sujeto, ni tampoco es un estado: el conocimiento se halla en un permanente estado de re-elaboración. Es decir, las conquistas cognitivas del sujeto se van transformando continuamente dentro de aquella interacción. Piaget lo ha expresado así, (véase Piaget 1995, p. 324):

La actividad intelectual comienza por la confusión entre la experiencia y la conciencia de sí, por la indiferenciación entre la asimilación y la acomodación... el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas... la inteligencia no comienza así ni por el conocimiento del yo ni por las cosas en cuanto tales sino por su interacción y orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esa interacción, la inteligencia organiza al mundo organizándose a sí misma (subrayado nuestro).

Otra diferencia de fondo se halla en el origen de las estructuras cognitivas. Para Kant, ellas son inherentes al sujeto. Para Piaget, las estructuras cognitivas se construyen. Tal construcción empieza desde la más tierna edad; es un proceso complejo, cuya explicación ha requerido más de medio siglo de investigación psicológica y aún no termina. Fue necesario elaborar una disciplina, la *psicología genética*, para dar una respuesta a esta interrogante fundamental. En la próxima sección daremos algunas indicaciones a este respecto.

Asimilación y niveles de desarrollo

La naturaleza de los contenidos producidos en la relación sujeto-objeto, depende del grado de desarrollo cognitivo de este sujeto. La construcción de las estructuras cognitivas comienza, de acuerdo con la teoría piagetiana, desde el nacimiento mismo del sujeto. Hablamos de "sujeto", no del "niño", por razones de énfasis. Nos interesa resaltar las características del niño, del adolescente, del adulto en tanto sujetos epistémicos.

En el desarrollo cognitivo, la primera etapa es de *acción externa pura*. La adquisición clave de este periodo es el *esquema sensoriomotor*. Un esquema es aquello que es repetible y generalizable en una acción. Por ejemplo, succionar (el biberón primero, luego se transfiere al dedo u otro objeto material), jalar, agarrar etc. Los esquemas de acción son algo así como "conceptos prácticos" que sirven para incorporar objetos a las acciones. Con respecto a la inteligencia sensoriomotriz, Piaget nos dice (véase Piaget 1995, p. 7):

El estudio de la inteligencia sensoriomotriz o práctica durante los dos primeros años del desarrollo nos ha enseñado cómo el niño que asimila directamente el medio externo a su propia actividad desde un principio, construye después, para prolongar esa asimilación un número creciente de esquemas a la vez más móviles y aptos para coordinarse entre sí.

Una de las fuentes de confusión y dificultad cuando tratamos con una disciplina altamente organizada es que las palabras adquieren un significado más preciso, un matiz distinto al que tienen cuando se las emplea en el lenguaje cotidiano donde la libertad de interpretación deja márgenes amplios y al mismo tiempo difusos, al campo semántico de las palabras. Por ello, términos como *asimilación*, *equilibración*, *conocimiento*, *objetividad*, etc. tendrán que ser gradualmente redefinidos de acuerdo con la epistemología genética. Lo empezaremos a hacer como si se tratara de tejer una red con los significados de términos considerados como centrales dentro de la teoría.

Insistamos un poco más en la noción de esquema. Podemos describir un esquema como un *núcleo de acción transferible*. El esquema tiene tres componentes:

- i Un mecanismo de reconocimiento de situaciones
- ii Una actividad vinculada a esos reconocimientos
- iii Una expectativa sobre el resultado de la actividad (Glaserfeld, 1991, p. 121).

La *asimilación* de un objeto a un esquema de acción, consiste en identificarlo como "admisible" para desempeñar cierta función. Tal identificación es un acto de abstracción. Por ejemplo, si necesitamos un martillo, podemos sustituirlo por un objeto duro, más o menos pesado. Incorporamos así ese objeto al esquema. Eso significa que lo identificamos como viable para la acción de martillar. Si la expectativa sobre el resultado no es satisfecha, entonces debemos modificar el esquema: no se puede incluir cualquier objeto duro y pesado si además, por ejemplo, es frágil. Esta modificación del esquema, debido a la "presión" del objeto que se trata de asimilar, se conoce como *acomodación*. La pareja indisoluble asimilación-acomodación tiene un lugar central dentro de la teoría, por lo que estaremos volviendo sobre ella. Por ahora añadiremos que la asimilación es un acto de interpretación, de cómo el sujeto incorpora al objeto, mientras que la acomodación es una respuesta del esquema al objeto. Resulta del mecanismo de *equilibración del esquema*.

El periodo sensoriomotor es de acción pura. Los esquemas están orientados hacia el exterior: Un esquema de acción es como el equivalente práctico de un concepto. Mediante la actividad sensoriomotriz el sujeto logra la construcción de *la permanencia del objeto*. Esta adquisición es de suma importancia. Tratemos de imaginar la concepción que tendríamos del espacio si todos los cuerpos fueran gaseosos, fugaces... Cuando los objetos percibidos siguen existiendo fuera de nuestro campo visual, se ha dado entonces un gran paso en la construcción del espacio.

Piaget mismo nos dice (Piaget 1995, p. 11) a este respecto:

Un mundo sin objetos no podría presentar el carácter de homogeneidad espacial y de coherencia en los desplazamientos que define nuestro universo. Por otro lado, la ausencia de "grupos" en los cambios de posición... equivaldría a transformaciones sin retorno, es decir, a continuos cambios de estado, a la ausencia de objetos permanentes.

En esta cita, "grupos" se refiere a que para cada desplazamiento haya la posibilidad de efectuar el desplazamiento inverso. Como avanzar y retroceder por el mismo camino.

Para el sujeto adulto resulta inconcebible el darse cuenta que hubo un tiempo en que él no había construido la permanencia de los objetos. No somos conscientes de muchas de estas construcciones. Quizá esto explique, al menos parcialmente, por qué en el pasado, las epistemologías siempre supusieron un sujeto adulto, activo o pasivo, en la relación con el objeto de conocimiento. No fueron conscientes de que esa relación era cambiante y que dependía del desarrollo cognitivo del sujeto. En un plano más familiar: el experto no puede esperar que su discípulo tenga un conocimiento con el mismo grado de organización que el suyo. Eso exige un proceso largo y complejo que no se reduce a la lectura de textos, pues, entre otras cosas, no es cuestión de "acercarse" a un conocimiento que le está esperando allí afuera, sino de comprometerse en un proceso constructivo. Cuando Kant habla de las estructuras a priori del sujeto (es decir, de las estructuras instaladas ya de nacimiento), con las cuales organiza al mundo, es como si empezara a contarnos una historia que, desde la perspectiva genética, hace rato ya comenzó.

Después de la permanencia del objeto, otra adquisición central del sujeto la constituye la *capacidad de representación*. Aquí están incluidos el juego y la imitación, por ejemplo. De esta manera, el mundo de la acción queda enriquecido con la posibilidad de *representar las acciones*. A pesar de este progreso que mostrará todo su potencial un poco más adelante, en esta etapa el pensamiento del sujeto sigue "anclado" a la esfera del comportamiento motor. El sujeto *confía* en su experiencia perceptual; el progreso se empieza a manifestar en la posibilidad de *representación de situaciones pasadas*.

Posteriormente, las acciones interiorizadas se organizan de manera tal que adquieren la *reversibilidad*. Por ejemplo, ante la pregunta de si hay más plastilina en una bola o en la salchicha que se hace con la misma bola, el sujeto contesta que igual porque "basta deshacer la salchicha y convertirla de nuevo en la bola original". Este argumento tiene ya en él la necesidad lógica, que manifiesta la aparición del pensamiento lógico. Aunque ya se tiene la capacidad de representar operaciones (acciones simbolizadas mentalmente que son reversibles, como en el ejemplo anterior) y de razonar lógicamente, el pensamiento sigue anclado a lo concreto: las operaciones sólo se pueden aplicar a objetos materiales. La capacidad de construir seriaciones, clasificaciones (de objetos por su tamaño, por ejemplo), correspondencias entre colecciones, son características del periodo.

Más adelante el sujeto arriba al periodo de las "operaciones formales". En él, aparece la reversibilidad en el plano lógico; el pensamiento abstracto y sobretodo, el pensamiento hipotético-deductivo. Debe decirse que la transformación de las estructuras cognitivas del sujeto no es un proceso de maduración, en el que aquél "se sienta a esperar la llegada de las estructuras cognitivas". La construcción cognitiva implica un proceso activo. Eso no significa, por otra parte, como ya hemos tenido oportunidad de señalar, que las construcciones sean siempre conscientes.

Un error que no debe cometerse es suponer que estas etapas del desarrollo cognitivo están claramente separadas. No es así. Es más adecuado pensar las etapas como referencias generales, como registros de características centrales del desarrollo cognitivo. Cada una de las cuales quedará subsumida en la etapa siguiente. Es decir, (Piaget-García, 1983, p. 9):

...no sólo los estadios sucesivos de la construcción de las diferentes formas del saber son secuenciales —es decir, que cada uno es a la vez resultado de las posibilidades abiertas por el precedente y condición necesaria de la formación del siguiente— sino, además, cada nuevo estadio comienza por una reorganización a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los precedentes.

Asimilación y acomodación

La capacidad de simbolización y la interiorización de las acciones conducen eventualmente a la formación de operaciones y de esquemas conceptuales. A un objeto se le conoce cuando se le asimila a un esquema. La asimilación es un acto de interpretación mediante el cual un objeto es reconocido como "admisible" (recordemos el ejemplo del esquema "martillar"). Entonces, al ser asimilado a un esquema, un objeto queda inserto en una red de relaciones, mediante las cuales adquiere significado. Es decir, el objeto es conceptualizado. De esta forma, el sujeto va organizando sus experiencias y, mediante la coordinación de esquemas, va construyendo estructuras cognitivas cada vez con mayor nivel de organización. Consideremos los ejemplos siguientes: percibir "algo" como una montaña, es asimilar ese algo mediante cierta estructura cognitiva, estructura constituida por un sistema de esquemas que involucran espacio, sustancia y volumen. Otro ejemplo: cuando percibimos algo como una llave, ese reconocimiento del objeto no tiene que ver con el hecho de que sea metálico sino con su forma, que sugiere su función. Es decir, "llave" es un concepto *operativo*. El objeto de nuestra cognición no "llega" directo a nuestro sistema cognitivo. Lo que se produce es una *interpretación* del objeto material (o conceptual, ya veremos ejemplos) en términos de estructuras cognitivas anteriores. Si la interpretación permite la acción del sujeto sin mayores conflictos, diremos que se ha producido una asimilación conservadora. Este tipo de asimilaciones fijan el esquema en cuestión dentro de la estructura cognitiva. Puede ocurrir, empero, que la asimilación al esquema no genere el resultado esperado. En ese caso, ocurre una *desequilibración* del esquema cognitivo. El esquema (o la estructura cognitiva) "responde" entonces a la perturbación, acomodándose a su contenido.

Un objeto, tal como lo entendemos en determinado momento, es una conceptualización. La construcción del objeto, que continúa indefinidamente es, desde la perspectiva del sujeto, parte del proceso de interiorización de su entorno. Esa interiorización es un

proceso de conceptualización del entorno, y en ese sentido podemos afirmar que el entorno adquiere así, su dimensión histórica. Queda humanizado. La objetivación del conocimiento depende entonces del aumento de actividad cognitiva por parte del sujeto, dando como resultado estructuras más *equilibradas*.

En sus comienzos, la asimilación es esencialmente la utilización del medio externo por el sujeto con el fin de alimentar sus esquemas hereditarios o adquiridos. Es evidente que tales esquemas, visión, succión, prensión, tienen necesidad de acomodarse continuamente a las cosas.

A medida que los esquemas se multiplican... la asimilación deja pues de incorporar simplemente las cosas a la propia actividad para establecer una red de relaciones cada vez más estrecha de coordinaciones entre los esquemas que definen a ésta y, en consecuencia, entre las cosas a las que dichos esquemas se aplican.

(Véase Piaget 1995, p. 321). Un poco más adelante (p. 325) añade:

La asimilación y la acomodación constituyen así, desde el plano sensoriomotor, un proceso formador análogo al que representan en el plano de la inteligencia verbal y reflexiva, las relaciones del pensamiento individual y la socialización: del mismo modo que la acomodación al punto de vista de los otros permite al pensamiento individual situarse en un conjunto de perspectivas que asegura su objetividad y reduce su egocentrismo, igualmente, la coordinación de la asimilación y la acomodación sensoriomotrices, conduce al sujeto a salirse de sí mismo para () objetivar su universo.

En estas citas se encuentra ya la clave para explicar *la objetividad* desde un enfoque epistemológico constructivista. Es decir, desde un enfoque que no toma la objetividad como algo que pueda existir al margen del sujeto, al margen del observador.

Epistemología y Psicología

Es frecuente que una epistemología haga referencia a hechos psicológicos. Por ejemplo, el empirismo nos dice que "el sujeto es pasivo y se limita a registrar los datos que le suministra la experiencia". Sin embargo, el empirismo no ha dado, en ningún momento de su desarrollo, pruebas de que el sujeto se comporte, en efecto, como allí se dice. Si no hay una experimentación, como la que ha desarrollado la epistemología genética a través de la psicología genética, carecen de fundamento tal tipo de afirmaciones. Por su parte, Piaget logró sacar a la epistemología del terreno especulativo y convertirla en una investigación en donde las afirmaciones sobre el conocimiento, sobre el sujeto epistémico, estuvieran fundamentadas en un trabajo experimental y sistemático. Es decir, llevó a la epistemología al *status* de ciencia experimental.

La epistemología genética es el estudio de la constitución del conocimiento válido. Es decir, el estudio de las condiciones mediante las cuales se produce el conocimiento y además el de los métodos que validan ese conocimiento. La primera condición es de carácter fáctico y la segunda de carácter normativo. La epistemología genética trata de cuestiones que involucran cuándo una afirmación puede ser justificada y bajo qué criterios. Los criterios psicogenéticos han alcanzado tal notoriedad que a veces se confunde todo el edificio piagetiano con la psicología genética.

Hay otro terreno que también es fuente de fundamentación empírica para la epistemología: la historia de la ciencia.

Esto es particularmente importante a la hora del estudio epistemológico de las matemáticas. En relación con esta disciplina, podemos argumentar que los problemas de orden normativo son más o menos claros. Tienen que ver con los procesos deductivos, con la estructura de las demostraciones. Las cuestiones de orden fáctico se abordan (principalmente cuando vemos las matemáticas como un cuerpo de conocimientos constituido) desde la historia. Es pertinente responder la pregunta: ¿cómo se concibe a la historia en este programa de investigación? de inmediato podemos responder que no se concibe como un relato lineal, en el que cada cosa tiene un antecedente claramente diferenciado. Mas bien, la historia será concebida de acuerdo a la ya célebre expresión del historiador holandés Dijksterhuis, (véase Piaget-García, 1982, p. 60) como *un laboratorio epistemológico*. ¿Qué significa esta expresión? quiere decir que la historia, desde el punto de vista epistemológico, debe investigarse buscando en ella las condiciones que han hecho posible el conocimiento y los mecanismos de su validación. Será necesario entonces recuperar la dinámica del desarrollo histórico pues es en la dinámica donde aparecen los mecanismos de paso de una etapa a la siguiente. Como ya hemos hablado de dos procesos de transición de un nivel de conocimiento a otro mejor (en la historia y en la psicogénesis) resulta natural que parte de la experimentación en el dominio de la epistemología genética incluya una comparación entre estos estratos de desarrollo.

Podría pensarse que los estudios psicogenéticos y los estudios históricos son dos formas totalmente diferentes de abordar los problemas de construcción de los conocimientos. Sin embargo, la epistemología genética se encarga de argumentar con fuerza que los mecanismos de desarrollo del conocimiento a nivel histórico son los mismos que los correspondientes a nivel psicogenético. Esta es una tesis que no quisiéramos dejar de señalar, aunque requiere de un análisis más cuidadoso que el que podremos hacer en este momento (véase Piaget-García, 1982).

Regresemos al problema de los hechos y las normas. Tanto en la historia como en la psicogénesis, puede observarse que los hechos y las normas no permanecen desvinculados unos de las otras. La razón es que el sujeto y el objeto de conocimiento están indisolublemente vinculados. Entonces, aunque se trate de la validación dentro de un sistema lógico, de una cierta proposición, no podemos olvidar que hay un problema de hecho (en este caso psicogenético) involucrado, como lo es la construcción de la lógica por el sujeto. De allí que la significación epistémica de este instrumento de conocimiento —es decir, su empleo para la construcción de un conocimiento válido—, no es independiente de su modo de construcción (véase la Introducción en Piaget-García, 1982).

Aspectos figurativos y operativos del pensamiento

La *representación* nos remite a los aspectos operativos del pensamiento, mientras que la *percepción* nos remite a los figurativos. Veamos un ejemplo. Tenemos dos recipientes, uno delgado y alto y uno ancho y bajo. Vamos a trasvasar un líquido del recipiente delgado al ancho. Si le preguntamos a un niño pequeño (alrededor de los 7 años o menos) *antes de hacerlo*, si la cantidad de líquido permanecerá igual después de trasvasar el líquido, no sabe qué contestar. Cuando se efectúa el trasvasamiento, en su presencia, y

él verifica que el nivel del líquido en el recipiente ancho es inferior al que tenía en el recipiente delgado, entonces concluye que la cantidad de líquido ha cambiado: "ahora hay menos" es su respuesta. Es una respuesta típica de esta etapa el que los sujetos privilegien a una de las dimensiones (la altura) del vaso a la hora de la interpretación del dato perceptual. Este aspecto figurativo del pensamiento, será sustituido más adelante, cuando el sujeto ya esté en posesión de la reversibilidad aún cuando sea al nivel de las operaciones concretas. Es decir, realizadas sobre objetos materiales. Entonces, el sujeto podrá comprender que hay una compensación: el líquido "sube" menos porque ahora su superficie es mayor. Inclusive puede demostrar que la cantidad de líquido no ha variado, para lo que recurre a la posibilidad de revertir la acción del trasvasamiento. Bastaría que se restituyera el líquido al recipiente original para constatar que la cantidad es la misma. Esta forma de razonamiento es claramente operativa. El razonamiento se ha desligado de la percepción.

Dos formas de conocimiento

Distingamos dos formas de conocimiento:

- i) Conocimientos contruidos mediante la experiencia física *en todas sus formas*
- ii) Conocimientos lógico-matemáticos.

Hay que recalcar que los conocimientos contruidos mediante la experiencia física no son copias de objetos materiales o de eventos externos al sujeto. Siempre son (re)construcciones que el sujeto hace a partir de la asimilación del objeto o del evento a sus esquemas conceptuales. Cuando el sujeto percibe un objeto, éste adquiere la categoría de *observable* una vez que el sujeto lo interpreta desde su sistema conceptual. Un actor profesional puede darse cuenta, mientras asiste a una puesta en escena, que la actuación del protagonista es mala, aunque esto no sea claro para los espectadores debido a los "trucos" del protagonista, que disimula su falta de calidad histriónica. Es decir, para ellos, la mala actuación no es observable, aunque estén presenciando la puesta en escena. Una persona sin la preparación profesional necesaria, no distingue entre el virus del sida y la bacteria del cólera. Estos ejemplos y los diversos que el lector es capaz de imaginar, señalan algo importante: toda observación que hacemos pasa por el filtro de una interpretación. Como ha dicho Hanson (Hanson, N. R, 1977, p. 13):

toda observación está cargada de teoría

Los observables pues, son observaciones interpretadas. Por ello, en ausencia de un marco asimilador (piénsese en la situación del observador y el microscopio), el sujeto no atribuye una significación al dato perceptual que permanece entonces al nivel de registro sensorial sin mayores consecuencias cognitivas. Son pues los observables que se producen mediante la experiencia física del sujeto, lo primero que resulta de interés para la elaboración del conocimiento físico. Una vez que estos observables son susceptibles de incorporación a una teoría, entonces se transforman en *hechos* de esa teoría.

Un dato físico aislado, sin interpretación, es un buen ejemplo de situación caótica. Sólo la actividad cognitiva del sujeto lo torna inteligible, al transformarlo en un obser-

vable. Por aquí empieza *la construcción de la realidad*, entendida como resultado de la actividad cognitiva del sujeto, que progresivamente coordina sus puntos de vista, vinculados siempre, eso sí, al mundo de sus experiencias. A este respecto:

... En términos de inteligencia reflexiva, la deducción se organiza y aplica a una experiencia concebida como exterior. De ahí que el universo se constituya en un conjunto de objetos permanentes vinculados por relaciones causales... situados en un espacio y tiempo... la perspectiva del sujeto sobre el universo se transforma radicalmente: del egocentrismo integral a la objetividad, tal es la ley de su evolución.

(Piaget, 1995, p. 327)

Cuando hablamos de actividad lógico-matemática, no nos estamos refiriendo exclusivamente a la actividad dentro de las disciplinas altamente organizadas como el Álgebra o la lógica proposicional. Nos estamos refiriendo, de manera amplia, al razonamiento del sujeto cuando, por ejemplo, dice que la cantidad de líquido permanece igual –a pesar de las apariencias en contrario– al trasvasarlo de un recipiente de determinada forma a otro de una forma totalmente distinta. Lo que el sujeto pone en juego en tal situación es una estructura lógica, al margen del grado de formalización que podamos atribuirle. Análogamente, cuando el sujeto de cierta edad (cognitiva) dice que no hay el número más grande porque dado ese número él podría construir otro más grande sumándole un uno, está razonando matemáticamente. Las estructuras lógico-matemáticas son pues aquellas que el sujeto posee como resultado de la interiorización de sus acciones y de la coordinación de las mismas.

Se pasa de la lógica de la acción (dar un rodeo para evitar un obstáculo, a la edad de tres años, por ejemplo, es poner en marcha la lógica de la acción) a la lógica de las operaciones pues éstas son, al final de cuentas, resultado de la interiorización de las acciones. De allí que resulte delicado desvincular los problemas de hecho de los de validación formal. Sin embargo el nivel de las operaciones es solidario del nivel de las acciones, en el sentido que el de las acciones queda subsumido en el de las operaciones. Aquí aparece una de las características básicas de los procesos de estructuración: cada nivel queda subsumido en el siguiente donde se produce una “resemantización” del nivel anterior. Nos quedaremos aquí, a las orillas de un tema fascinante: las relaciones entre los niveles biológico y cognitivo. En cuanto al acuerdo entre las estructuras lógico-matemáticas y la experiencia, aparte de la actividad estructurante del sujeto que (re)define el mundo a partir de sus experiencias, habrá que tomar en cuenta que su pensamiento depende en cierto grado de los recursos del organismo –por ejemplo, de la estructura de sus sentidos que le suministran cierta “materia prima” y no otra. Una pregunta que se impone (véase la siguiente sección):

¿Qué significa la objetividad cuando hemos redefinido al objeto?

En la medida en que el sujeto actúe sobre un determinado objeto, aumentará el grado de objetividad de sus conocimientos sobre dicho objeto pues ese grado no puede “medirse”, sino de acuerdo con la forma endógena de conocimiento producido. La objetividad es la del conocimiento endógeno. Pensemos que es la actividad del sujeto la que organiza, estructura el conocimiento.

El universo lógico-matemático no sustituye al universo físico, sino que éste queda sumergido en aquél, y así puede ser mejor explicado.

Sobre el realismo y la realidad

Las epistemologías clásicas fundadas sobre el apriorismo o sobre el empirismo son realistas. Es decir, suponen la existencia de una realidad exterior al sujeto cognoscente que, de alguna manera, "atesora" el conocimiento al que el sujeto puede acceder a través de su interacción con ella. La epistemología genética nunca ha negado la existencia de un mundo exterior al sujeto epistémico; sólo que concibe al conocimiento como resultado de los procesos fundamentales de asimilación y acomodación. El resultado es, en cada caso, una estructura cognitiva. El mundo al que se enfrenta el sujeto es el mundo de sus experiencias. De allí que no se pueda decir que el incremento de organización interna de las estructuras cognitivas "acerque" al sujeto a la verdadera estructura del mundo exterior, sino que lo dota de un conocimiento cada vez más viable (es decir, más adecuado) que resulta de organizar el mundo de sus experiencias. Cuando un sujeto está involucrado en una actividad cognitiva, puede o no tener éxito en sus objetivos. Es entonces allí, en el terreno de *la reflexión sobre sus acciones*, en donde tiene sentido hablar de *verdadero* o *falso*. Nunca a partir de una supuesta correspondencia del conocimiento con el mundo exterior al sujeto epistémico. Así surge la noción de realidad y objetividad: son nociones que se van generando mediante la actividad del sujeto epistémico. En efecto (Ferreiro, E. y García, R. 1978, p. 17):

La objetividad no está garantizada en el punto de partida, no coincide con el registro perceptivo directo puesto que no hay registro pasivo de los hechos, y mal podría coincidir con un apartamiento del sujeto. En la concepción epistemológica sustentada por Piaget, un incremento de objetividad será dependiente de un incremento de actividad por parte del sujeto... en ningún nivel del conocimiento empírico hay una frontera delimitable entre las propiedades del objeto asimilado y las estructuras del sujeto asimilador. Para conocer, el sujeto debe poseer ciertas estructuras asimiladoras que funcionan como órganos del conocimiento... pero esas estructuras asimiladoras no preexisten a la acción, sino que se constituyen en virtud de los requerimientos de la acción.

En el lenguaje cotidiano se presenta una fuerte tendencia a la sustantivación. Por ejemplo, si una bailarina se mueve cadenciosamente, decimos que *sus movimientos* son cadenciosos. Es decir, posee movimientos acompasados. Si a una persona le duele la cabeza, diremos que *tiene un dolor de cabeza*. En lugar de "mover" usamos "movimientos"; en lugar de "doler" usamos "dolor". Esta tendencia a sustantivar, a crear cosas, seguramente es causa del realismo de las epistemologías clásicas. Quizá de aquí pueda surgir una estrategia para entender la epistemología genética. Se trataría de recuperar los verbos: en lugar de conocimiento objetivo, mejor hablemos de "objetivar"; en lugar de conocimiento, mejor hablemos de "conocer"; en lugar de realidad, mejor hablar de "realizar"; en lugar de "verdad", mejor hablemos de "verificar", etc., todos estos verbos son acciones (cognitivas) que realiza el sujeto cognoscente. Por eso decíamos que un incremento de actividad del sujeto comporta un incremento de objetividad: en este caso, la actividad del sujeto se confunde con objetivar.

Nota sobre la equilibración de las estructuras cognitivas

El desarrollo cognitivo consiste en una organización progresiva de las estructuras cognitivas. Un mayor grado de organización de una estructura cognitiva implica un mayor equilibrio de la misma. El equilibrio se refiere al estado en el cual las estructuras cognitivas de un sujeto han dado y continúan dando los resultados esperados, sin que salgan a la superficie ningún tipo de conflictos conceptuales. Por ejemplo, ante una perturbación causada por un objeto o un evento que trata de ser asimilado por un esquema, éste se acomoda generando una mejor discriminación de los objetos o eventos "admisibles" para el esquema o bien modificando drásticamente el esquema hasta el punto de producir uno nuevo. Diremos que la conquista de este nuevo nivel de equilibrio es un cambio cognitivo que identificamos con el *aprendizaje*. Al nivel sensoriomotor (todos tenemos un nivel de funcionamiento sensoriomotor!) los esquemas de acción son cruciales para alcanzar nuestras metas dentro del mundo de nuestras experiencias. A nivel reflexivo, los esquemas operatorios son centrales para el logro de una red conceptual coherente. Los esquemas tanto de acción como operatorios, que resultan *viabiles* (es decir que producen resultados adecuados de acuerdo con los propósitos del sujeto) se retienen a título de orientadores de la acción. Refraseando una de las citas ya presentadas, el sujeto se adapta al mundo de sus experiencias mediante la adaptación de sus esquemas cognitivos.

En el estudio del desarrollo cognitivo, es decir, en el incremento de organización interna, la noción de esquema es central. Si decidiéramos adoptar una metáfora computacional, diríamos que un esquema es como una sub-rutina o como un programa.

Sobre la abstracción

La abstracción se entiende comúnmente como un acto de extracción (o de separación) de una característica de un objeto. Por ejemplo, podemos abstraer de los cuerpos la noción de peso. La idea de color, de hecho, es resultado de una abstracción. La idea de *forma* de los cuerpos también es una abstracción. Así, la circunferencia, el triángulo, el cuadrado, son resultado de abstracciones. A esta forma de abstracción, en donde la noción abstraída se extrae directamente de los objetos (que siempre son objetos conceptuales), Piaget la denomina *abstracción empírica*.

El proceso mental de abstracción puede ser consciente o inconsciente. De hecho la mayoría de las veces es inconsciente. Por ejemplo, al ver un mango, de inmediato lo reconocemos. No importa si es de manila, ataúlfo o de cualquier otro tipo, *sabemos* que es un mango. ¿Qué es lo que reconocemos, más allá de las diferencias obvias en forma, color y tamaño? cuando se hace esta pregunta a una persona, normalmente se queda perpleja, pues sabe que lo que ve es un mango, pero no sabe por qué lo reconoce (y sin embargo le parece obvio que lo que ve es un mango). No es consciente del proceso de abstracción necesario para haber llegado a la noción de mango. Desde luego, esto mismo se puede decir de casi cualquier otra categoría; algunas incluso, las hemos formado a edad muy temprana.

Sobre la representación

Hemos insistido en las páginas anteriores, que el conocimiento no es una representación del objeto (de conocimiento). Es decir, no es una copia de un supuesto modelo, como la que haría un pintor cuando tiene delante de sí un paisaje que trata de llevar al lienzo. Entonces, la representación, como copia, no tiene cabida en la epistemología genética. Veamos ahora el término *re-presentación*. Cuando vamos al teatro, por ejemplo, vemos una re-presentación de una obra. Lo que hace una actriz o un actor es re-presentar un papel. Es fundamental entender que en una re-presentación hay un elemento de construcción del sujeto. Tal construcción está presente tanto en el agente de la re-presentación (la actriz, el actor) como en aquello que es re-presentado (que es algo construido por otro sujeto). En epistemología genética al término "representación" siempre debe dársele el significado de re-presentación.

La capacidad de representación tiene su fundamento en la existencia de la función semiótica o simbólica. En determinado momento del desarrollo cognitivo, el sujeto puede re-presentar sus acciones hechas sobre objetos materiales, mediante esquemas mentales. Estos esquemas mentales "actúan" o mejor, operan, sobre las representaciones mentales de los objetos materiales. Es decir, tanto los objetos como las acciones sobre ellos son susceptibles de ser representados mentalmente. Como sabemos, esto es fundamental para la construcción de los esquemas y estructuras cognitivos. Pero la capacidad semiótica del sujeto le permite otras formas de representación. Por ejemplo, cuando recuerdo un rostro, lo estoy representando (recuerde: en el sentido de re-presentar). Es como si recordar fuera equivalente a ejecutar un programa que tenemos almacenado. Pero también puedo dibujarlo. El dibujo es otra forma de representación. Es un registro gráfico.

Este es un tema muy importante; en particular en matemáticas. Puedo representar una circunferencia mediante un registro gráfico, un dibujo sobre el pizarrón, sobre una hoja. Puedo también representarlo mediante una ecuación (de la geometría analítica). Esta es una forma de representación simbólica.

Abstracción reflexiva

En contraste con la abstracción empírica, la *abstracción reflexiva* es el mecanismo que nos sirve para formar abstracciones a partir, no de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre tales objetos. Por ejemplo, si tenemos una colección de veinte objetos, sabemos que no importa la disposición geométrica que demos a esa colección, sobre una mesa, siempre habrá veinte objetos. Ese saber (ie: que no varía el número de objetos) es distinto a saber que un determinado objeto tiene forma rectangular. Es un saber extraído de la coordinación de nuestras acciones sobre esos veinte objetos. No es un conocimiento sobre los objetos mismos. De allí el nombre "reflexiva" que se da a esta forma de abstracción, pues resulta de *reflexionar* sobre nuestras acciones. Atención: el término "reflexiva" de esta forma de abstracción, tiene una connotación adicional. En nuestro ejemplo, se trata de que primero *reflejamos* (proyectamos) nuestra acción (contar) sobre el plano de las operaciones. Es allí, en el plano de la representación de las acciones, donde "descubrimos" que el número de objetos es independiente de la ubicación sobre la mesa. En promedio, un niño de ocho años ya sabe esto. Cuando le

preguntamos a un adolescente si el número de objetos cambia al modificar su disposición geométrica, hasta se sorprende de que le hagamos la pregunta. Para él ya resulta obvio, *necesario*, que sea así. No es conciente de que ha realizado, tiempo atrás, una abstracción reflexiva.

Es necesario detenernos un poco en el término "reflexión". Por una parte se refiere a un acto mental. Como meditar, considerar. Por otra, se refiere a la reflexión, por ejemplo de la luz, sobre una superficie. Ambas acepciones entran en la definición de abstracción reflexiva. Cuando decimos que una acción *se refleja* sobre el plano de las operaciones (como en el ejemplo sobre la invariancia del número de objetos), también podríamos decir, que la acción *se proyecta* sobre el plano de las operaciones.

Los individuos construyen conceptos y con ellos estructuras conceptuales; luego reestructuran éstas para formar esquemas más potentes. Tal es el proceso de organización creciente del sistema cognitivo. En él, la abstracción reflexiva juega un papel central.

Observaciones sobre la Educación Matemática¹

Las ideas que se van a presentar se han ido elaborando a partir del trabajo con profesores y estudiantes de niveles superiores, y del estudio de artículos que tienen propósitos similares al nuestro. La epistemología genética tiene como uno de sus pilares una teoría constructivista del conocimiento. De lo argumentado en la primera parte de este trabajo podemos extraer las siguientes afirmaciones:

- a) El sujeto construye su conocimiento
- b) Conocer es una función adaptativa

La adaptación se refiere tanto a las acciones sensoriomotoras como a las operaciones conceptuales que han probado ser viables (adecuadas, que producen los resultados deseados) dentro del mundo de experiencias del sujeto cognoscente. Las construcciones conceptuales se llevan a cabo para ampliar el mapa de los caminos viables en el mundo de las experiencias del sujeto. Nunca para obtener un conocimiento-copia del mundo óptico. La obra de la escuela piagetiana puede entenderse como un pronunciado esfuerzo para diseñar un modelo de construcción de conocimiento viable. (Glaserfeld, 1991).

Frente al desequilibrio, producido por una situación nueva que el sujeto no puede *asimilar* a sus estructuras cognitivas, él se ve forzado a modificar tales estructuras, para *acomodar* el nuevo contenido. El doble proceso de asimilación-acomodación de las estructuras cognitivas, está en el centro de la explicación de cómo el sujeto construye su mundo. La exploración del mundo que lo rodea es una fuente permanente de desequilibración de las estructuras cognitivas del sujeto. El constructivismo no estudia "la realidad" sino *la construcción de la realidad*. Desde luego, el sujeto cognoscente no es un Robinson Crusoe, aislado, organizando y clasificándolo todo. No, el sujeto cognoscente es un ser social y la fuente primordial de sus desequilibrios cognitivos (sobre-

¹ Esta sección está estrechamente relacionada con el trabajo "La enseñanza de la matemática: un enfoque epistemológico" (por aparecer).

todo, después de la infancia) es justamente su entorno social, cuando los medios y las estrategias del sujeto se tornan insuficientes al compararlos con los de los demás. De allí que la abstracción reflexiva puesta en marcha a partir de sus acciones, debe complementarse con la interpretación de la actividad de los demás. En su libro *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, (p. 228) Piaget y García (1983) lo expresan de modo por demás elocuente:

... la acción, excepto al comienzo mismo del periodo sensorio-motriz, no tiene lugar solamente en función de impulsos internos... bien pronto en la experiencia del niño, las situaciones con las cuales se enfrenta son generadas por su entorno social... no se asimilan objetos "puros". Se asimilan situaciones en las cuales los objetos desempeñan ciertos papeles y no otros. Cuando el sistema de comunicación del niño con su entorno social se hace más complejo y más rico, y particularmente cuando el lenguaje se convierte en el medio dominante, lo que podríamos llamar la experiencia directa de los objetos comienza a quedar subordinada al sistema de significaciones que le otorga el medio social. El problema que aquí surge para la epistemología genética es explicar cómo queda la asimilación, en dichos casos, condicionada por el sistema social de significaciones, y en qué medida la interpretación de cada experiencia depende de ellas.

Desconstrucción y reconstrucción

La institución escolar recoge como objetos de enseñanza, las *transposiciones* de objetos conceptuales creados en el dominio de la investigación matemática (Kang-Kilpatrick, 1992). Los objetos transpuestos ya no tienen la misma estructura ni la misma significación que los objetos originales: han sido sometidos a una reorganización para que puedan ser colocados dentro del discurso escolar. Esto nos enfrenta a lo que parecen dos formas diferentes de conocimiento: el que se construye dentro de la práctica de la investigación en el interior de la matemática, y el que se transforma en "conocimiento enseñable" como resultado de una transposición. Parece entonces, que el proceso de (re)-construcción del conocimiento por parte del estudiante; es decir, su proceso de aprendizaje, tiene como uno de sus propósitos "des-construir" el conocimiento transpuesto (el "enseñable") para re-construir un significado más profundo del conocimiento que se pierde a causa de la transposición. Esta situación es de importancia decisiva puesto que el profesor debe analizar las construcciones que hacen sus estudiantes de la realidad matemática a partir de sus experiencias. La lectura de un texto matemático típico puede servir para ilustrar esta situación: por ejemplo, al leer la definición formal del concepto de función, los textos de cierto nivel (libros de cálculo, por ejemplo) suelen enfrentarnos a algo análogo a esto:

"una función es una colección de pares ordenados de suerte que si dos pares tienen el mismo primer elemento, entonces tienen también el mismo segundo elemento".

¿Qué puede hacer un estudiante con esta definición? algo que siempre debe hacerse al leer un texto de enseñanza escrito en un lenguaje más o menos formal: buscar ejemplos, tratar de asociarla a una tabla de valores, a una gráfica y a otras formas de representación, que son las que se usan cuando se trabaja con este concepto; relacionarla con otras ideas. El fin es *construirle un significado*. En otros términos, uno busca "hacer suyo"

lo que fue presentado formalmente, mediante la reelaboración de un contexto en donde el tema bajo estudio sea familiar. La realidad construida por el estudiante debe ser *viable*, es decir, suficientemente adecuada para permitirle actuar de manera efectiva. La acción, desde luego, se refiere a "acción en el mundo de sus experiencias conceptuales". Es importante aquí volver a llamar la atención sobre el hecho que todo este proceso de construcción de una realidad matemática no se realiza aisladamente, sino que el estudiante despliega una actividad interactiva que consiste en *coordinar sus puntos de vista* con los de los demás estudiantes y profesores. La entrada a un dominio consensual, le da a su conocimiento una mayor y "mejor" objetividad. Reiteremos: la interacción social es una de las principales fuentes de desequilibrio cognitivo y por ende, de aprendizaje. Pues el aprendizaje aparecerá allí donde haya re-equilibración de las estructuras cognitivas.

Hay razones profundas que conducen a la formalización de las estructuras conceptuales de la matemática, pero no podemos olvidar la transposición que está involucrada. La educación, al reconocer estos dos niveles de conocimiento con los que tiene que tratar, estará en condiciones de enunciar que *la construcción del significado es parte esencial del aprendizaje de la matemática*. Aquí es importante evitar la tentación dualista de pensar que todo lo produce el sujeto o que todo lo produce el medio: el resultado lo es de la interacción dialéctica entre las estructuras del sujeto y su medio, que aquél tratará siempre de organizar, de estructurar, mediante uno de sus instrumentos básicos: la abstracción reflexiva, para poderlo comprender: *la búsqueda de razones* funciona como motor de la cognición.

Historia y cognición

El análisis histórico-crítico de las ideas matemáticas nos permite identificar en el proceso de elaboración de las ideas, ciertas "formas de concebir" que, eventualmente, se convierten en obstáculos para el desarrollo de tales ideas. Como la epistemología trata de las circunstancias que hacen posible el conocimiento, a tales obstáculos se les llama "obstáculos epistemológicos". Un obstáculo epistemológico es pues una forma de conocimiento que se torna inadecuada (ie: ya no es viable) para una cierta tarea cognitiva. Los obstáculos no desaparecen cuando trasladamos las ideas matemáticas al discurso escolarizado. Allí, toman otras formas, por ejemplo, aparecen como "errores" que el estudiante comete reiteradamente. Aquellos errores que aparecen cuando el estudiante no puede resolver un problema, cuando no entiende un enunciado (siempre este no poder, no entender, es desde la perspectiva del profesor) son manifestación de que una determinada estructura cognitiva no puede ya asimilar una nueva situación que se le presenta. Es necesario entonces que el profesor cuente con *un modelo de cómo funciona cognitivamente el estudiante*, para que encuentre, en consecuencia, las situaciones propicias a las que, a través de su mediación, se enfrente el estudiante en busca de una asimilación y acomodación posibles. Una vez más: estas situaciones incluyen la coordinación de puntos de vista con sus pares, con el profesor, sobre una temática que se define como pertinente, a partir de normas sociales: las de la institución escolar.

Consideremos ahora un ejemplo, tomado de un trabajo que se propone explorar las ideas que los estudiantes tienen sobre "límites". A estudiantes (que ya habían tomado un curso de cálculo) se les pidió que contestasen esta pregunta:

¿Es 0.9999... igual a o menor que 1?

Con notable frecuencia, se obtuvieron respuestas de los siguientes tipos:

“igual a uno porque la diferencia es infinitamente pequeña” ;

“igual, porque en el infinito, están tan cerca que pueden considerarse como iguales”;

“menor que uno, aunque la diferencia entre ellos es infinitamente pequeña”

“menor que uno, pero es lo más cercano que puede estarse de uno, sin que sea uno”.

Podemos concluir que en las respuestas de los estudiantes subyacen *elementos infinitesimales*, que son activados por la pregunta. Tomando en cuenta las tesis de la epistemología piagetiana en cuanto a la pertinencia de las comparaciones entre los desarrollos conceptuales del individuo y los desarrollos conceptuales histórico-colectivos, traigamos a escena el texto de 1696 sobre el cálculo diferencial, del Marqués de L'Hôpital. El texto tiene como uno de sus principios organizadores el siguiente:

Una cantidad que crece o decrece por una cantidad infinitamente pequeña puede seguir siendo considerada como igual. Es decir, si a una cantidad (finita) le añadimos o le restamos una cantidad infinitesimal, la nueva cantidad puede ser sustituida por la cantidad original.

Estamos obligados a modificar nuestra primera evaluación de las respuestas “incorrectas” de los estudiantes. En efecto, ellas reflejan la forma como operamos con una determinada noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande, en un contexto que podemos llamar “práctico” : desde tal perspectiva, no hay diferencia entre estos números. Como esta “forma de concebir” las cantidades infinitesimales funciona, entonces la adoptamos como la forma correcta. Cuando pasamos a otros contextos, incluso prácticos, ya no nos ofrece respuestas adecuadas. Aparecen disfuncionamientos en la estructura conceptual que hemos elaborado con aquella interpretación, la cual aparece ahora como un obstáculo para asimilar una nueva situación. Resulta plausible afirmar que los obstáculos en el proceso de aprendizaje son consustanciales a dicho proceso, ya que el aprendizaje es siempre contextual. Creemos que esto puede verse en la historia y también en el desarrollo individual.

La epistemología genética puede ofrecer una interpretación a estas cuestiones de los obstáculos a partir de la teoría de la equilibración de las estructuras cognitivas. Nos conduce además a reflexionar sobre un problema de mucha importancia: que las reglas de validación de una disciplina dependen del proceso de su formación histórica.

Lo anterior cobra mayor relevancia cuando lo ubicamos en el marco de las transposiciones, pues es allí donde es factible analizar la interacción de las formas consideradas de obstáculos. El problema de la validación tiene importancia no sólo como problema epistemológico sino, además, como problema didáctico, pues no es posible seguir sosteniendo que la evaluación del alumno se haga “contra el discurso del profesor”, sino que ha de tener en cuenta las estructuras conceptuales que el estudiante vaya desarrollando.

Dominios de inteligibilidad locales

La historia de la matemática nos enseña que durante la evolución de una disciplina, se van formando núcleos conceptuales alrededor de los cuales se adelanta la actividad matemática. A tales núcleos les llamaremos *dominios de inteligibilidad locales* (agradezco al profesor Gil Henriques esta denominación y una discusión esclarecedora sobre el contenido de esta sección). Veamos un ejemplo tomado del cálculo diferencial. Durante el siglo XVII, los problemas de máximos y mínimos se identificaron con problemas de trazado de tangentes en puntos especiales de una curva que venía dada mediante una expresión analítica. Este tipo de representación analítica permitió el ensanchamiento del universo de curvas a las que podía trazarse una tangente. Así, surge una organización local cuyos componentes son:

- 1) Una curva representada mediante una ecuación y,
- 2) Un campo operatorio que consiste esencialmente en “derivar” la ecuación y hacer igual a cero esta “derivada”.

La lectura de un texto de historia del cálculo, por ejemplo, Edwards (1979) muestra que este es el tipo de herramienta matemática que utilizaba P. de Fermat. Este dominio local de inteligibilidad está anclado al contexto que proporciona la geometría analítica; generaliza el problema del trazado de tangentes mediante una nueva representación del objeto geométrico que va a ser manipulado: la curva. La exploración de la derivada en este dominio local, no requiere, en principio, que se tenga una definición formal del concepto que se está explorando. Mas bien, es a partir del dominio local como se va gestando el concepto. En el caso que estamos considerando, cuando se trata de trazar tangentes a curvas convexas el campo operatorio es suficiente; pero surge un problema cuando se trata de trazar una tangente en un punto de inflexión. Allí, el campo operatorio indica que la tangente es una recta que atraviesa a la curva; pero la concepción de recta tangente —por generalización de tangente a curvas convexas— se “opone” a aceptarla como tal.

Esta tensión entre el campo operatorio y la concepción de tangente se ve reforzada por la eventual independencia que el campo operatorio adquiere de la concepción de tangente que le acompaña en un principio. Entonces estamos obligados a modificar la concepción para que acomode situaciones nuevas. De esta manera la concepción original va adquiriendo un más alto nivel de organización, se va haciendo más abstracta, se va independizando del contexto del que surge y aparece un mayor grado de compatibilidad con el campo operatorio. Eventualmente, surge de esta actividad, lo que denominamos el concepto de derivada.

Es importante observar, que si bien las concepciones son estructuras cognitivas, el concepto producido desde ellas es un objeto formal, que pertenece más bien al lenguaje matemático. Es una organización lógica, que captura mediante un proceso de interiorización: las acciones que se realizan sobre las concepciones.

Cuando se parte del concepto formal, el estudiante, como ya lo hemos dicho, se enfrenta a la tarea de desconstruir la estructura lógica, para recuperar los significados contextuales y situaciones que dieron lugar a la construcción del concepto y a su *intencionalidad*. En esta tarea pone en juego su capacidad de análisis y de asimilación. Sería iluso pensar que los estudiantes, hablando en general, puedan realizar todas estas

actividades por sí solos. Los procesos de aprendizaje y de enseñanza son distintos, pero de ninguna manera podemos pretender que estén desvinculados. Es importante y necesaria la intervención del profesor. Un comentario final sobre estas cosas: las ideas que los estudiantes pusieron en juego para contestar sobre la comparación entre 0.99999... y 1 forman parte de sus concepciones sobre lo infinitesimal. Sus respuestas fueron dadas desde una estructura cognitiva, de allí que no deberían ser evaluadas con criterios que sólo se adecuan a la estructura lógica, es decir, al concepto.

En esta discusión sobre dominios de inteligibilidad locales, concepciones y conceptos, hemos cruzado un puente que va de la historia a la enseñanza. La vinculación entre ellas es muy fuerte; ello queda reflejado en los mecanismos que permiten pasar de las concepciones a los conceptos tanto a nivel histórico como individual. De ninguna manera deberá esto interpretarse como una aseveración sobre la equivalencia entre el desarrollo del conocimiento del individuo y el desarrollo histórico del conocimiento en una comunidad. Lo que se dice, es que los mecanismos para pasar de un nivel de estructuración al siguiente son análogos.

Por ejemplo, tanto a nivel individual como colectivo, los mecanismos de generalización y abstracción están presentes para pasar de las concepciones al concepto. La epistemología genética sostiene que esto es así en todos los casos. Para un análisis detenido sobre estas cuestiones véase el texto "Psicogénesis e Historia de la Ciencia" (Piaget y García, 1983).

Afirmamos que, para la didáctica de la matemática, la historia sirve como un fundamento sobre el que podemos basar nuestros juicios acerca de la naturaleza de nuestro conocimiento.

Para terminar, una conclusión cuya pertinencia creemos haber construido a lo largo del escrito: *no es posible aspirar a una epistemología con un alto grado de cientificidad, al margen de la lógica y de la psicología.*

Referencias

- Edwards, C.H., (1979) *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York.
- Ferreiro, E. & García, R., (1978) *Presentación a la edición castellana de Piaget, J: Introducción a la Epistemología Genética*, Tomo I, Paidós, 2a edición, Buenos Aires.
- Glaserfeld, V. E., (1991). *Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching*, en Mathews, M. (ed) *History, Philosophy and Science Teaching*, Ontario Institute Studies in Education, Canada.
- Hanson, N.R., (1977). *Patrones de descubrimiento y Observación y Explicación*, Alianza Universidad, 177, España.
- Kant, M., (1972). *Crítica de la Razón Pura*, Editorial Porrúa, México.
- Kang, W. y Kilpatrick, J., (1992). *Didactic Transposition in Mathematics Textbooks*, en *For the Learning of Mathematics* 12, (1), pp. 2-7.
- Piaget, J., (1971), *Sabiduría e ilusiones de la filosofía*, neXos, Barcelona.
- Piaget, J & García, R., (1983) *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo XXI, México.
- Piaget, J., (1970). *Genetic Epistemology*, Columbia Univ. Press, N. York.
- Piaget, J., (1995). *La construcción de lo real en el niño*, editorial Grijalbo, México (original francés publicado en 1937).