Analisis de Algunas Tareas Entorno a la Noción de Tasa Media de Variación y Tasa Instantánea de Variación.

Arnaldo De La Barrera, arnaldo@inipamplona.edu.co

Universidad De Pamplona

Resumen. *En este trabajo presentamos el análisis de algunas tareas propuestas a estudiantes de grado 11 en torno a la noción de tasa media de variación y tasa instantánea de variación. La propuesta se diseño utilizando como metodología de investigación el aporte de la escuela francesa en torno a las situaciones didácticas de Brousseu y la ingeniería didáctica. Para el análisis de las tareas se utilizaron las unidades de análisis propuestas por Romero (1998) y Camargo (2001); estudio del contenido, estudio de la comprensión y análisis de la interacción didáctica.*

1. Presentación del problema y justificación

Diversos trabajos presentan propuestas encaminadas a construir la noción de derivada utilizando la tasa media e instantánea de variación, sobresalen los trabajos de: Dolores (1998); Wenzelburger (1993); Alanis y otros, (2000); Azcarate (1990); Azcarate y otros (1996); la idea central de éstas propuestas es recuperar el camino natural hacia la construcción del concepto de derivada; situaciones que contextualizadas que involucran tasa media de variación y preguntas encaminadas a la noción de tasa instantánea de variación.

En los trabajos anteriores se reporta entre las dificultades para acceder a la comprensión de la variación, el excesivo uso de la variable como incógnita, el privilegio del registro simbólico en la variación conjunta y la introducción de la noción de derivada utilizando situaciones descontextualizadas.

Los conceptos de tasa media de variación y tasa instantánea de variación aparecen de forma natural en diversas situaciones o contextos cotidianos, científicos y matemáticos; la velocidad que registra el velocímetro de un auto, la velocidad media de un auto en un trayecto, la variación promedio de la presión atmosférica en un intervalo de tiempo, los cambios en la temperatura de un paciente, etc. En cada una de las situaciones anteriores la tasa media de variación o la tasa instantánea de variación suministran información importante con relación al contexto en estudio.

Lo anterior muestra que resulta interesante y pertinente realizar una propuesta encaminada a la reconstrucción del discurso escolar entorno a la tasa media e instantánea de variación, utilizando problemas contextualizados con los cuales se pueda dar sentido y significado al objeto matemático en construcción, esto deberá permitir posteriormente al realizar las descontextualizaciones en el momento apropiado transitar con más facilidad hacia conocimientos matemáticos más elaborados como la noción de derivada y sus aplicaciones.

2. Marco conceptual

Para el desarrollo de la propuesta se consultaron básicamente siguientes trabajos: Dolores (1998); Wenzelburger (1993); Alanis y otros, (2000); Azcarate (1990); Azcarate y otros (1996), en torno a la idea de tasa media y tasa instantánea de variación. La idea central de éstas propuestas es recuperar el camino natural hacia la construcción del concepto de derivada, utilizando como eje las nociones anteriormente mencionadas, Freudenthal(1983) en torno al concepto de razón, en este se reporta el grado de complejidad que reviste la comprensión del concepto de razón heterogénea(comparar dos magnitudes de diferente especie: densidad, velocidad), Schwartz (1988) en torno a las cantidades adjetivadas (cantidades que tienen un referente) para mencionar las cantidades que surgen en los procesos de contar, medir, o hacer cálculos con cantidades contadas o medidas (4.0m, largo de una mesa; 60km/h, rapidez de un vehículo) las primeras reciben el nombre de cantidades extensivas, las segundas de cantidades intensivas. Schwartz reconoce la dificultad para el que se encuentra en situación aprendizaje la comprensión de las cantidades intensivas y que la enseñanza deba abordar dicha dificultad, Feynmman(1987) alrededor del concepto de velocidad. En lo relacionado con la didáctica se reviso el trabajo de Artigue (1995) en torno a la ingeniería didáctica. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se distinguen dos niveles: la micro – ingeniería (local) y el de la macro – ingeniería (global).

*Fases de la Metodología de la Ingeniería***.** La ingeniería se encuentra conformada por cuatro fases a saber: Análisis preliminar, Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, Experimentación, Análisis a posteriori y evaluación.

Análisis Preliminar. Este comprende los siguientes componentes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza (Epistemología).
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos (Estado de la enseñanza – plano

didáctico).

- Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución (cognitivo).
- El análisis del campo de restricciones.
- Objetivos de la investigación.

La Concepción y el Análisis A Priori. Esta fase se encuentra constituida por el diseño de la ingeniería así como la elección de las variables, se pueden distinguir dos tipos de variables:

- Las variables macro didácticas o globales
- Las variables micro – didácticas o locales (por ejemplo: determinación del tratamiento del contenido, incorporación de estrategias uso de tecnología, textos, organización de la clase etc.).

Experimentación, Análisis A posteriori. Estas fases comprenden la puesta en escena del instrumento, seguido por la fase final que es el análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación (observaciones, producción de los estudiantes, cuestionarios, entrevistas). En la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

Terminamos esta parte enunciando algunas definiciones extraídas de la revisión bibliográfica, las cuales se utilizaran en la fase de institucionalización de la ingeniería didáctica.

- *Estados:* los números se usan para expresar estados.

Ejemplo: La temperatura en Bogotá es de 12 ºC aproximadamente a las 10 A.M. En los ejemplos de estados siempre hay un sujeto (Bogotá), una magnitud (temperatura) y una unidad de medida (ºC). También está presente el tiempo.

La función de estado se nota $e(t)$, significa el estado en el instante *t*.

- *Variaciones:* llamaremos variación a la comparación absoluta de dos estados de una misma función de estado e, en dos momentos diferentes, se nota así:

$$\boxed{\Delta e = e(t_2) - e(t_1)}$$

Las variaciones necesariamente se refieren a una situación dinámica; es decir, transcurre el tiempo.

Formas de expresar una variación: La variación puede expresarse de dos formas, semánticamente equivalentes, estas son: cambio, diferencia

- *Variación tipo cambio:* Expresa aumento o disminución, puede ser: Cambio simple (se expresa directamente lo que aumenta). Ejemplo: En el transcurso del día la temperatura aumenta en $5^o C \quad \Delta t = 5^o C$.
- *Cambio aumento*: (se dice lo que aumenta). En el trascurso del día Pedro aumenta su fortuna en dos millones de pesos.

$$C = C_0 + \Delta C \qquad \Delta C = 2 \ \ Millones$$

- *Cambio disminución:* (Se dice lo que disminuye). En el trascurso del día la empresa disminuyó su capital en dos millones de pesos.

$$C = C_0 + \Delta C \qquad \Delta C = -2 \ \ Millones$$

Tasa de variación. Cuando comparamos el cambio de una función de estado, respecto al cambio en el tiempo tenemos una tasa de variación:

$$\boxed{Tv = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e\ \ t_2\ \ - e\ \ t_1}{t_2 - t_1}}$$ (Tasa de media de variación)

- *Velocidad media*: (idea intuitiva)

Ejemplo: V = 70 Km. /h, significa que si el auto continúa moviéndose a esa velocidad recorrerá 70 Km. en una hora.

- *Velocidad media*: (definición matemática)

$$\boxed{V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x\ \ t_2\ \ - x\ \ t_1}{t_2 - t_1}}$$

Si t_2 *se "*aproxima*"* lo más que se pueda a t_1 obtenemos la velocidad en un instante o instantánea.

$$\boxed{V_{ins} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x\ \ t_2\ \ - x\ \ t_1}{t_2 - t_1}}$$

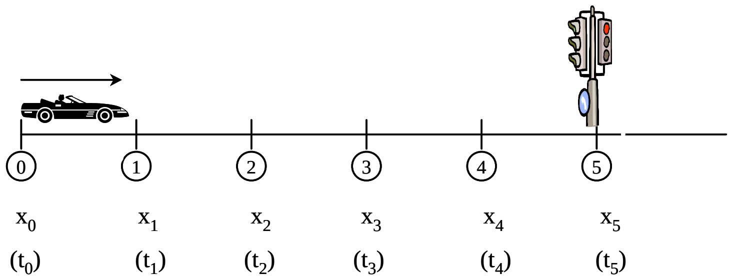
3. Metodología

Población en Estudio. La muestra total del estudio constó de 42 estudiantes (niños y niñas) del grado Once de Educación Media; con edades entre 15 y 18 años, la clase se organizó en grupos de 4 estudiantes y se entregaron los cuestionarios para el trabajo en clase (acciones, formulaciones y validación), se aplicó inicialmente una prueba de entrada para conocer el estado inicial(análisis a priori),al final se realizó la fase de institucionalización de los saberes que se movilizaban en cada actividad planteada.

Experimentación

El problema de la velocidad. La expresión que define la velocidad media de un cuerpo que se mueve en línea recta viene dada por:

$$\overline{v} = \frac{desplazamiento}{tiempo\ empleado}$$



a) Teniendo en cuenta la información dada, escriba una expresión para la velocidad media entre los puntos 1 y 5 del carro que se muestra en el dibujo.
b) Si quisiera hacerse una idea de la velocidad del auto en el punto (x_4), ¿entre cuáles puntos de los que aparecen en el dibujo calcularía esta velocidad? ¿Por qué?. Explique con la mayor cantidad de detalles posibles (Escriba la expresión)
c) Si ahora quisiera obtener la velocidad del auto exactamente en el punto (x_4), ¿Cómo

procedería? (Escriba la expresión)

d) ¿Qué información sería necesaria para calcular la velocidad del auto en el instante (t_4)?.

Tasa media de variación (Presión atmosférica).

Propósito.

a) Estudiar una tasa de variación en la representación gráfica.

b) Comparar tasas medias de variación en la representación gráfica.

c) Obtener en forma aproximada una tasa instantánea de variación.

Enunciado. *El conocimiento de la presión atmosférica media y de sus principales características y "*variaciones*", permite predecir:*

- *El estado del tiempo*
- *El movimiento del aire, vientos y tormentas, evaporación, etc.*
- *Los cambios en la radiación solar*

Una disminución en la presión atmosférica origina un aumento en la densidad del aire y por ende una disminución en la capacidad de la atmósfera para absorber la radiación solar.

Además la disminución de la presión atmosférica produce trastornos fisiológicos; entre estos podemos mencionar; el empobrecimiento del oxigeno en la sangre, esto se da cuando la presión fluctúa entre 640 y 650 hPa, donde hPa = 1mb[52] = 0.75 mmHg.

Cuando se hacen predicciones de buen o mal tiempo, lo que importa no son tan solo las variaciones bruscas de presión (presión en punto). En su lugar lo que interesa son los cambios en ésta. Una variación en la presión atmosférica, pongamos por caso –10mm no tiene ninguna consecuencia si se realiza a lo largo de 2 días, pero si que la tiene si se realiza en 5 horas. Se considera que:

a. Una caída de la presión atmosférica que dure más de 3 horas y que sea en medida superior a 1.3mm por hora, anuncia mal tiempo (si ya lo hay, lo sigue haciendo).

b. Un aumento de la presión atmosférica que dure más de tres horas y que sea en medida superior a 1.3mm por hora, anuncia buen tiempo (si ya lo hay lo sigue habiendo).

c. Una presión estable no implica cambio de tiempo.

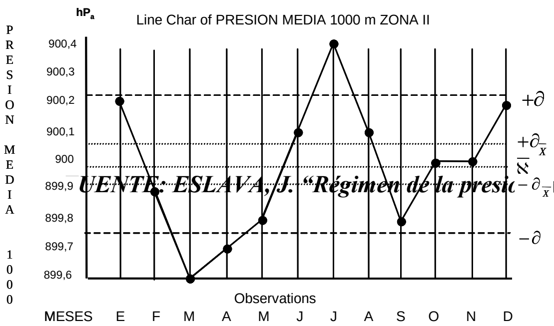
---

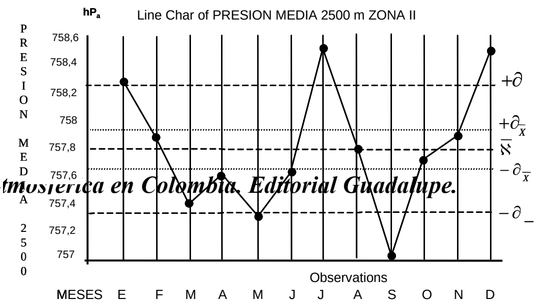
[52] mb recibe el nombre de milibar; 1 mb = 1.000 dinas/cm^2 (Unidad de presión).

Así pues, si la variación de –10mm tiene lugar a lo largo de 5 horas, la variación media por hora es de: -10mm / 5h = -2mm/h; es decir, que se puede predecir mal tiempo.

En cambio si la variación se ha producido en 2 días resulta una variación media por hora de: -10mm / 48h = -0.2mm / h (indica una presión estable).

"Lo que hemos calculado recibe el nombre de variación media por hora de la presión: recibe el nombre de tasa media de variación de la presión atmosférica y nos indica la rapidez con que cambia la presión." (Azcárate, 1990). Los gráficos que se muestran a continuación presentan el comportamiento de la presión Atmosférica en Colombia, a lo largo del año para diferentes altitudes.





UENTE: ESLAVA, J. "Régimen de la presi... tmosférica en Colombia. Editorial Guadalupe.

Preguntas.

a. ¿Entre qué meses del año se presentan los máximos cambios en la presión atmosférica para cada uno de los gráficos? ¿Qué utilidad tiene éste dato?.

b. ¿Cuál ha sido la variación de presión entre los meses de:

(Febrero – marzo), (junio – septiembre), (noviembre – diciembre). Representa esta variación en un gráfico.

c. ¿Cuál es la tasa media de variación más pequeña?¿Entre qué meses ocurre?. Represéntala en un gráfico.

d. ¿Entre qué meses es más probable que llueva? Argumente su respuesta.

e. ¿Es confiable tomar tasas medias de variación en tiempos largos? Argumente su respuesta.

f. ¿Qué significado tiene $\Delta P / \Delta t$ *?*

g. ¿Con qué rapidez está cambiando la presión en el mes de febrero?

Si suponemos que a cada tiempo t *(meses, días, horas) le corresponde una presión* P(t), *escribe la expresión de la tasa media de variación de la función* P *entre dos tiempos* t_1 *y* t_2. *¿Qué sucede con esta expresión cuando* t_1 *tiende a* t_2*? ¿Qué mide esta variación?.*

i. Realiza un gráfico que muestre los cambios de presión a lo largo del año.

ii.

Recolección de datos. *Los instrumentos utilizados para la recolección de los datos fueron cuestionarios, entrevistas, grabaciones.*

4. Análisis

Pregunta 1. La mayoría de estudiantes centran su respuesta en el uso de la fórmula $\left(V=\frac{d}{t}\right)$, esto se percibe en las respuestas de tipo "por hora aumenta 60 Km. y por minuto 1 Km". Según la categorización establecida por Azcarate (1998), estos estudiantes se encuentran en un perfil primitivo de la velocidad. Solo sobresalen 2 respuestas que contemplan la posibilidad de una velocidad variable, las respuestas son del estilo (Nicole) "Depende del tiempo en que permanezca a 60 Km /h".

Las respuestas a la pregunta **b)** son confusas, lo cual nos permite inferir que el concepto intuitivo de velocidad instantánea (velocidad en un velocímetro) no es manejado por los estudiantes, solo un grupo muy reducido percibe la noción al dar respuestas como "Al recorrido total del vehículo en Km. en ese instante".

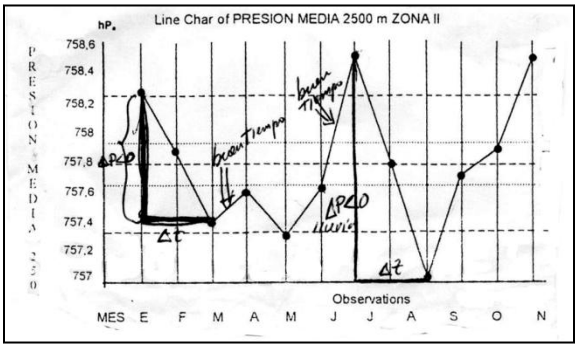
Las respuestas revelan que el perfil de velocidad que tienen los estudiantes es el primitivo en el sentido de la investigación de Azcarate (1996), ya que calculan todas las velocidades mediante la fórmula $\left(V=\frac{s}{t}\right)$, respuestas: "$\frac{x_1}{t_1}=\frac{x_2}{t_2}=\frac{x_3}{t_3}=\frac{x_4}{t_4}=\frac{x_5}{t_5}=V$, los estudiantes asumen movimiento uniforme en una situación en donde no se habla de éste, sino acerca de velocidad media.

Muy a pesar de lo anterior la pregunta b) los obliga a mirar intervalos y por tanto a trabajar con el concepto de velocidad media, a esta pregunta Silvia responde: "$\frac{x_4-x_3}{t_4-t_3}$ porque me piden la velocidad en x_4 y tomo la velocidad que traía desde el punto anterior". Esta respuesta nos muestra varias cosas:

- El proceso de aproximación se asume por la izquierda $\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ (diferencia hacia atrás).

- La notación es de puntos, no funcional, por tanto las tareas propuestas deben permitir pasar de $\frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3}$ a $\frac{x\ t_4 \ - x\ t_3}{t_4 - t_3}$.
- Si queremos que los estudiantes se movilicen hacia el perfil de aproximación en el sentido de Azcarate (1996) las tareas deben propiciar el mirar intervalos de variación.

Pregunta 2. Los estudiantes logran visualizar, interpretar, representar y calcular variaciones. Lo anterior se puede observar en la siguiente propuesta (Gráfico de Nicole):



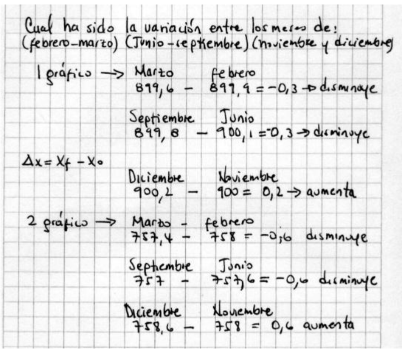
El concepto de tasa media de variación es trabajado desde lo numérico y es representado en el plano cartesiano, además se logra articular el enunciado de la situación con el gráfico, esto se evidencia en las respuestas de algunos grupos. Ante la pregunta “¿Entre qué meses del año es más probable que llueva?” “En la primera gráfica entre julio y septiembre porque estaba haciendo buen tiempo y hay una variación de presión negativa en la presión atmosférica” (Grupo de Alexis). Además se logra establecer la dependencia entre las variables que intervienen en la situación.

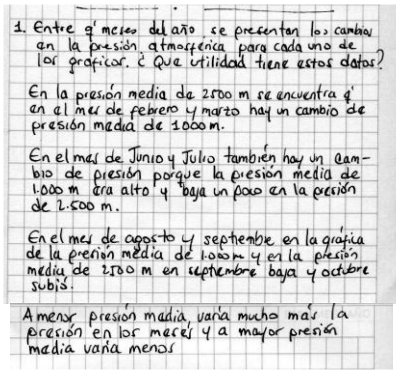
Luis: Tasa de variación = $\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ y cuando $t_1 \rightarrow t_2$, tenemos ‘casi’ ($0/0$) es como una rapidez instantánea, como una velocidad.

La respuesta anterior nos muestra que los estudiantes establecen analogías entre $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ y $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ para realizar la interpretación de la expresión abstracta $\left(\frac{\Delta P}{\Delta t}\right)$, esto es un buen indicio hacia la conceptualización de la noción de tasa media de variación. Los estudiantes incorporan de manera informal lenguaje propio del pensamiento variacional (cambio, variación, tasa de variación, proceso de aproximación), pero notamos que aún está ausente la notación funcional.

Las respuestas dadas por los estudiantes al taller las clasificamos en tres grupos:

- Descriptiva (Leen el gráfico): Grupo de Zulma.


Cual ha sido la variación entre los meses de:
(febrero–marzo) (Junio–septiembre) (noviembre y diciembre)
1 gráfico → Marzo febrero
899,6 − 899,9 = −0,3 → disminuye
Septiembre Junio
899,8 − 900,1 = −0,3 → disminuye
$\Delta x = x_f - x_0$
Diciembre Noviembre
900,2 − 900 = 0,2 → aumenta
2 gráfico → Marzo − febrero
757,4 − 758 = −0,6 disminuye
Septiembre Junio
757 − 757,6 = −0,6 disminuye
Diciembre Noviembre
758,6 − 758 = 0,6 aumenta


1. Entre q' meses del año se presentan los cambios en la presión atmosférica para cada uno de los graficos. ¿Que utilidad tiene estos datos?
En la presión media de 2500 m se encuentra q' en el mes de febrero y marzo hay un cambio de presión media de 1000 m.
En el mes de Junio y Julio también hay un cambio de presión porque la presión media de 1.000 m era alto y baja un poco en la presión de 2.500 m.
En el mes de agosto y septembre en la gráfica de la presion media de 1.000 m y en la presión media de 2500 m en septiembre baja y octubre subió.
A menor presión media, varia mucho más la presión en los meses y a mayor presión media varia menos

- Numéricas (Usan el gráfico como ábaco): grupo de Alejandro.

Y otras fueron gráficas.

|Una respuesta interesante a la pregunta "´ ¿Con qué rapidez está cambiando la presión en el mes de febrero", la obtiene el grupo de (Mauricio). "Para saber con qué rapidez está cambiando esta presión tomamos un valor muy próximo al mes de febrero, por ejemplo

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{1\ mes} = \frac{\Delta P}{30\ días}$$

y tomamos como referencia el mes de febrero". Los estudiantes intentan obtener una tasa instantánea de variación mediante un proceso de aproximación haciendo una mirada por día.

Análisis de la comprensión – Actividad 2.

Se tienen como criterios para el análisis de la comprensión los siguientes:

- Descripción de la relación entre variables relacionadas en donde se presentan fenómenos cambiantes.
- Descripción de un fenómeno en términos de función.
- Articular diferentes registros de representación para la variación conjunta.
- El uso de la notación operativa para cuantificar cambios a través de funciones y la utilización de esta notación funcional para expresar operativamente la medida del cambio de la variable dependiente en términos de la independiente.

Al iniciar la actividad algunos grupos tuvieron dificultad en la articulación del enunciado verbal con el gráfico, para agilizar la actividad se hizo necesario leer el texto, el grupo de Alejandro se ofreció para sintetizar algunas ideas en el tablero, escribieron:

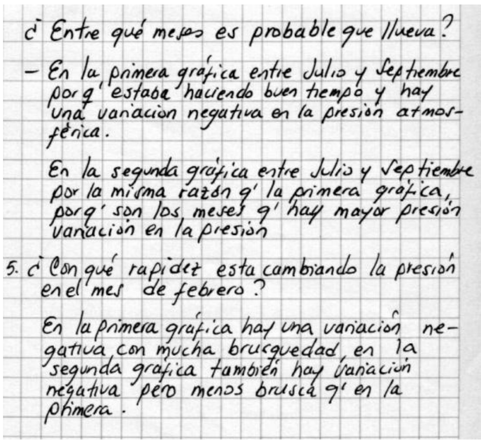
- $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ < - 1.3 mm/h (mal tiempo)
- $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ > 1.3 mm/h (buen tiempo)
- -1.3 mm/h < $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ < 1.3 mm/h (Presión estable).

La intervención oportuna permitió avanzar en el taller.

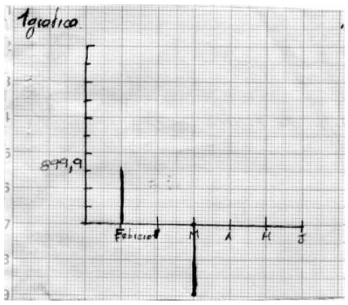
Respecto al concepto de tasa media de variación, el grupo de María preguntó si la tasa media de variación era lo mismo que la media aritmética. La pregunta anterior fue resuelta por el grupo de Luis, indicando que una tasa media de variación era una rapidez de cambio (velocidad por ejemplo) mientras que media aritmética se refería a una sola variable.

Conforme se mencionó en el análisis del contenido, las respuestas dadas al taller se clasificaron como: descriptivas, numéricas y graficas

Respuestas del grupo de María; tipo Descriptivo:


¿Entre qué meses es probable que llueva?
– En la primera gráfica entre Julio y Septiembre porq' estaba haciendo buen tiempo y hay una variacion negativa en la presión atmosférica.
En la segunda gráfica entre Julio y Septiembre por la misma razón q' la primera gráfica, porq' son los meses q' hay mayor presión variación en la presión
5. ¿Con qué rapidez esta cambiando la presión en el mes de febrero?
En la primera gráfica hay una variación negativa con mucha brusquedad, en la segunda grafica también hay variación negativa pero menos brusca q' en la primera.

El grupo logra hacer lectura del gráfico usando intervalos de variación, la respuesta "entre julio y septiembre,.... hay una variación negativa muestra un primer acercamiento a una mirada simultánea de los intervalos de variación $\Delta t \Rightarrow \Delta P$.



El grupo de Alexis propone: Intentan utilizar el gráfico de bastones para la representación de los cambios, pero aún tienen dificultad en la representación de los cambios negativos. La pregunta que revistió de gran dificultad y que permitió abrir diálogos y discusiones en el aula fue la relacionada con la tasa instantánea de variación.

"¿Con qué rapidez está cambiando la presión en el mes de febrero?

Mauricio: ¿Nosotros debemos tomar un solo punto?

Profesor: ¿Si calculas el cambio de presión en un punto que obtienes?.

Mauricio: el cambio de presión es cero.

Profesor: ¿Y qué pasa con el tiempo?

Alejandro: También cero.

Profesor: ¿También es cero qué?

Alejandro: la variación en el tiempo porque tengo un solo punto.

Mauricio: entonces es cero/cero.

Alexis: no; cero/1 mes.

Profesor: ¿Cuál es el cambio en el tiempo?.

Mauricio: el mes de febrero.

Alejandro: no podemos tomar un mes porque la pregunta es sobre los cambios y por tanto $\Delta T = febrero - febrero = 0$ y no es un mes.

Mauricio: entonces tomemos puntos cercanos a febrero.

La mediación permite que los estudiantes entren nuevamente al juego y construyan en forma intuitiva la noción de tasa instantánea de variación.

En el grupo de Jessica discuten sobre la pertinencia de las respuestas $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{1\ mes} = \frac{\Delta P}{30\ días}$ ó $\frac{P_{febrero}}{1\ mes}$. Se observa que logran establecer la relación entre los cambios $\Delta P, \Delta t$.

En el grupo de Erika, se escucha la siguiente conversación:

Erika: “Para saber la rapidez con que está cambiando la presión en el mes de febrero tomo el punto más cercano que está a este mes.

Jacqueline: el más cercano es enero.

La solución del grupo se ve limitada por los datos que se encuentran en el gráfico.

Respecto a la pregunta relacionada con escribir una expresión funcional para la tasa de variación, también se presentaron discusiones en los grupos.

Profesor: ¿Qué expresión obtuvieron para la tasa media de variación?

Jacqueline: $\frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}$.

Profesor: Observen que la pregunta se refiere a *P (t)*. ¿Qué significa *P (t)*?.

Patricia: presión por tiempo.

Jacqueline: no, significa que la presión depende de los meses.

Profesor: para $t = t_2$ ¿Cuál sería la expresión para la presión?

Ana: $P\ \ t_2$.

Profesor: Para $t = t_1$.

Jacqueline: $P \; t_1$.

Profesor: ¿Ahora cómo nos queda la expresión para la tasa media de variación?

Jacqueline: $Tv = \dfrac{P \; t_2 \; - P \; t_1}{t_2 - t_1}$.

Esta discusión permite al grupo escribir un modelo funcional, aún cundo se nota que los estudiantes no logran concebir una expresión funcional para un gráfico, esto lo corrobora Camargo (2001) en su investigación sobre la búsqueda de un modelo funcional para la pendiente.

Es curioso que siendo el tipo de representación que más se enfatiza en el discurso escolar, se encuentran respuestas como $P \; t$ "significa *P x t*".

Al finalizar la sesión se realiza la pregunta "¿Es confiable tomar tasas de variación en tiempos largos?, La mayoría de grupos coinciden en que no, porque los gráficos variaban demasiado durante el año.

Análisis de la Interacción Didáctica. Se tiene en cuenta en este análisis:

- Rol del profesor: gestión en el aula, Tratamiento del contenido matemático en juego
- Rol de los estudiantes: Acciones, Formulaciones, validación

Tratamiento del Contenido matemático. El tratamiento del contenido matemático estuvo iluminado por la propuesta de Godino (1996) respecto al papel del profesor en la construcción del conocimiento siguiendo el juego (conocimiento útil – conocimiento objeto). En ese sentido el haber tomado como punto de referencia la noción de velocidad (Actividad 1) y posteriormente ampliar el panorama al estudio de la tasa de variación (Actividad 2) permitieron un acercamiento significativo a la noción de tasa instantánea de variación. Por otra parte la pregunta clave « con qué rapidez está cambiando.... en el punto....», presente en la mayoría de los talleres fue definitiva para provocar un desequilibrio cognitivo en los estudiantes y enfrentarlos definitivamente al problema de la velocidad instantánea. Además la insistencia en buscar una expresión simbólica para la tasa media de variación con la pregunta «Si suponemos que a cada tiempo ***t***, le corresponde una... escribe la expresión de la tasa media de variación de la función... entre los tiempos t_1 y t_2.» ¿Qué sucede con esta expresión cuando t_1 tiende a t_2? ¿Qué mide esta variación?. Obligo a los estudiantes a pensar en forma funcional para cualquier representación, así como dotar de significado expresiones del tipo $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

5. Conclusiones

(Construcción del conocimiento en el aula). El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en forma oral y escrita así como los debates que se suscitaron alrededor de las diferentes actividades muestran indicios de que se logró construir conocimiento nuevo, así como reformular preconceptos inestables. Las intervenciones oportunas en los grupos así como el haber contado con estudiantes excelentes como Luis, María, Alejandro entre otros permitieron que otros estudiantes en la medida de sus posibilidades se motivaran para obtener un acercamiento significativo a la noción que se quería construir. Por otra parte, la mayoría de estudiantes lograron adquirir un perfil de aproximación respecto a la noción de velocidad, así como asociar la noción de tasa instantánea de variación con expresiones del tipo .

Bibliografía

De la Barrera, A. (2003). Una introducción a la noción de derivada mediante la variación, Trabajo de grado de maestría en docencia de la matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.

Azcarate, C (1990). Funciones y gráficas. Editorial Síntesis.

Dolores, C (1998).Una introducción a la noción de derivada

Wenzelburger, E (1993); Cálculo diferencial, una guía para maestros y alumnos. Grupo editorial iberoamericana.

Camargo, L; Guzmán, A. (2001). Comprensión de las relaciones entre pendiente y la razón de cambio. Trabajo de grado de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional.

Artigue, M (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial iberoamericana.

Feynman, R. (1987). Física volumen 1. Addison - Wesley

Freudenthal, H (1983). Fenomenológica didáctica de las estructuras matemáticas

Schwartz, J (1988). Intensive quantity and referente transformig operations. National Council of Teachers of Mathematics.