

Aplicación del asistente matemático DERIVE a la enseñanza-aprendizaje del teorema central del límite

Resumen

Los sistemas de cálculo simbólico, como el asistente matemático DERIVE, eliminan el trabajo monótono de realizar largos cálculos matemáticos. Estos programas permiten realizar cálculos numéricos y simbólicos. Éstos pueden ser visualizados con amplias capacidades gráficas. Aprovechando estas características, se presentan un conjunto de instrucciones que permite a los alumnos conjeturar el Teorema Central del Límite mediante la exploración del comportamiento de la suma de variables aleatorias.

Una de las aplicaciones más interesantes del Teorema Central del Límite es el método de simulación de Monte Carlo, se utiliza éste para simular el paso de neutrones a través de una placa, con lo que se despierta el interés del alumno por el método, al mostrar su capacidad para resolver problemas reales.

Abstract: The symbolic calculation systems, as the mathematical assistant DERIVE, eliminates the routine drudgery of performing long mathematical calculations. These programs can do both symbolic and numeric computations.

These can be visualized with extensive graphics capabilities. Taking advantage of these characteristics, a package of functions is presented in order to allow students surmising the Central Limit Theorem (CLT) through the behavioral exploration of the sum of random variables.

One of the most interesting applications of the CLT is the Monte-Carlo simulation. This method is used to simulate the crossing neutron through a seet. We intend to arouse the students' interest using this method, showing its capacity for solving real problems.

**Ricardo García Ródenas, Ma Luz López García
y Doroteo Verástegui Rayo**

Universidad de Castilla - La Mancha
España

1. Introducción

Entre los diversos programas capaces de incorporar capacidades de cálculo simbólico y representaciones gráficas (MATHEMATICA, MAPLE, REDUCE, etc.) consideramos que el más adecuado para el objetivo docente es el DERIVE, debido fundamentalmente a su facilidad de uso y sus escasos requerimientos de hardware.

Los sistemas de cálculo simbólico permiten realizar, de forma automática, multitud de rutinas manipulativas y de representación gráfica. Se han aprovechado estas prestaciones para elaborar un conjunto de instrucciones, para el asistente matemático DERIVE, que permite la exploración del comportamiento de la suma de variables aleatorias.

Estas instrucciones permitirán al alumno experimentar cómodamente con situaciones variadas, explorando regularidades y pautas de comportamiento que le permitirán analizar y conjeturar el Teorema Central del Límite.

Otro objetivo que se consigue con el uso de este tipo de programas es el acercamiento de las matemáticas al mundo de las aplicaciones reales, obteniendo una enseñanza más globalizadora y motivante.

Para este trabajo se ha considerado que una de las aplicaciones más interesantes del Teorema Central del Límite es el método de simulación de Monte Carlo. Un factor importante, que determina el interés del alumno por un método, es la capacidad que tenga éste para resolver problemas reales. Por tanto es aconsejable buscar ejemplos donde se modelicen situaciones concretas. En este sentido, hemos implementado con DERIVE 3.0 un modelo matemático de simulación del paso de neutrones a través de una placa.

2. Suma de variables aleatorias continuas

Villiers (1993) considera que las funciones didácticas de las demostraciones son:

- a) verificación/convicción
- b) medio de explicación
- c) medio de sistematización
- d) como medio de descubrimiento
- e) como medio de comunicación

Aunque el Teorema Central del Límite (TCL) no se demuestra en la mayoría de los currículos, a excepción del de Licenciado en Matemáticas, está presente en cualquier curso básico de estadística en Ingeniería, Ciencias Sociales, etc.

Persiguiendo el objetivo de ilustrar como se puede emplear un asistente matemático como recurso didáctico en el aula, que permite paliar ciertas deficiencias de la no inclusión de su demostración, en concreto la a) y b), se analizará el comportamiento de la suma de variables aleatorias desde un enfoque empírico inductivo.

Para ello, se van a calcular las funciones de densidad de probabilidad de la suma de diversos tipos de variables aleatorias (continuas y discretas), independientes e idénticamente distribuidas. Esta tarea, que puede considerarse en extremo tediosa, se convierte en rutinaria empleando un asistente matemático como es DERIVE.

Entre las prestaciones de este programa se encuentra la representación gráfica de funciones que permitirá dibujar la f.d.p. de la suma de variables aleatorias para comprobar los signos de «normalidad» que presenta.

La conjetura de un teorema se consigue comprobando numerosos casos concretos de su veracidad. En los ejemplos que presentamos a continuación se desarrollan aplicaciones concretas del Teorema Central del Límite cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema. Sea $X_1, \dots, X_n \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu_i$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots$. Sea $X = X_1 + \dots + X_n$; entonces, en ciertas condiciones generales

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

tiene aproximadamente una distribución $N(0,1)$.

2.1 Suma de variables aleatorias uniformes en el intervalo (0, 1)

El primer ejemplo que se va a analizar es la suma de variables aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo (0, 1). Para ello se utiliza el siguiente teorema.

Teorema. Supóngase que X y Y son v. a. continuas e independientes con f.d.p. g y h respectivamente. Sea $Z = X + Y$ y denotamos por s la f.d.p. de Z . Entonces,

$$s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w) h(z - w) dw$$

En ausencia de computadores, el alumno debería buscar una fórmula terminal para la f.d.p. de la suma. Sin embargo, el empleo de éstos amplía el conjunto de soluciones del problema, incorporando ciertos algoritmos como soluciones aceptables.

El teorema anterior se puede aplicar repetidamente a la suma de v.a. uniformes en el intervalo (0, 1), obteniendo una definición inductiva de la f.d.p. Sin embargo, la dificultad creciente hace que sea costosísimo abordar el problema manualmente.

Para apoyarse en la computadora, el alumno debería obtener una relación que le permita calcular la f.d.p. de probabilidad de la suma de $n+1$ v. a. uniformes en el intervalo (0, 1), que denotamos S_{n+1} , a partir de la f.d.p. de la suma de n variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo (0,1), que denotamos S_n . Dicha relación es la siguiente, que fácilmente se implementa con DERIVE.

$$\begin{cases} S_{n-1}(z) = \int_{z-1}^z S_n(t) dt \\ S_1(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{cases}$$

Instrucciones DERIVE

$$S_1(z) := \text{CHI}(0, z, 1)$$

$$S(u) := \text{INT}(u, z, z-1, z)$$

$$\text{ITERATE}(S(U), U, S_1(z), n)$$

La primera instrucción, $S_1(z)$, define la función de densidad de probabilidad de una uniforme en $(0, 1)$. La función DERIVE $S(u)$ actúa sobre el argumento u , que

es una función, y nos devuelve la función $\int_{z-1}^z u(t)dt$. Este operador nos permite obtener S_{n+1} a partir de S_n .

El comando *ITERATE* nos permite iterar n veces la función $S(u)$. Como primer valor para el argumento u se toma la función $S_1(z)$. Simplificando¹ esta función DERIVE obtenemos la f.d.p. de la suma de $n+1$ v.a. uniformemente distribuidas en $(0, 1)$.

Si el comando *ITERATE* lo sustituimos por *ITERATES*, al simplificar la expresión obtendríamos la función de densidad de probabilidad de la suma de $1, 2, \dots, n+1$ v. a. uniformes en $(0, 1)$. Otra posibilidad del programa es su capacidad para representar simultáneamente todas las funciones de densidad de probabilidad (ver Fig. 1). Estas representaciones conducen, de forma natural, a conjeturar que la distribución normal aproxima a la verdadera f.d.p. Solamente tras analizar gran variedad de ejemplos se puede observar que esta propiedad es independiente de la distribución de las v.a. que sumamos.

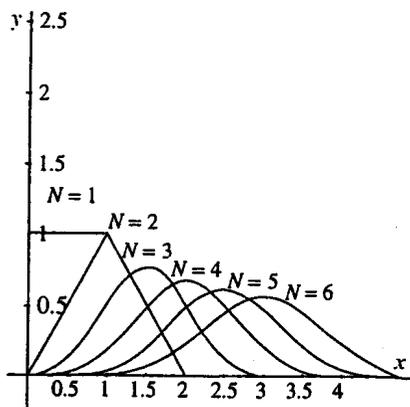


Figura 1

¹ Ejecutando el comando *Simplify* (pulsando una s) después de haber seleccionado con los cursores la expresión

2.2 Suma de variables aleatorias CHI cuadrado

La propiedad reproductiva de muchas distribuciones simplifican el cálculo de la f.d.p. de la suma de este tipo de variable. Un caso conocido es la suma de χ^2 .

Teorema. Sean $X_i \sim \chi^2_{n_i}$ $i = 1, \dots, k$. donde X_i son v.a. independientes. Sea $Z = X_1 + \dots + X_n$. Entonces Z , tiene una distribución χ^2_m , donde $m = n_1 + \dots + n_k$.

Este teorema conduce a que la f.d.p. de Z , $S_n(z)$, tenga la siguiente expresión:

$$S_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} z^{m/2-1} e^{-z/2} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como existe la capacidad de representar simultáneamente la f.d.p. de una normal con igual media y varianza que la v.a. de la suma de chi cuadrado, se puede comprobar la bondad de la aproximación.

Instrucciones DERIVE

“Definición de la fdp de una v.a. CHI CUADRADO

“ con m grados de libertad.

FDP_CHI (m, z): = IF ($z > 0, 1/(2^{m/2} \cdot \Gamma(m/2)) * z^{m/2 - 1} * \text{EXP}(-z/2), 0$)

“Definición de la fdp de la suma de n v.a. CHI CUADRADO

“con m grados de libertad.

SUMA_CHI (n, m): = FDP_CHI ($n * m, z$)

“Definición de la fdp de una v.a $N(\mu, \sigma)$

FDP_NORMAL (μ, σ): = $1/(\text{SQRT}(2 * \pi) * \sigma) * \text{EXP}(-1/2 * ((x-\mu)/\sigma)^2$

“EJEMPLO

“Suma de 20 v.a. CHI CUADRADO con 1 grado de libertad.

SUMA_CHI (1,20)

“Esa v.a. tiene media 1 y desviación típica $2\sqrt{2 * 20}$

FDP_NORMAL (20, $\sqrt{40}$)

Los resultados de simplificar y dibujar las dos funciones del ejemplo anterior se muestran en la Fig. 2

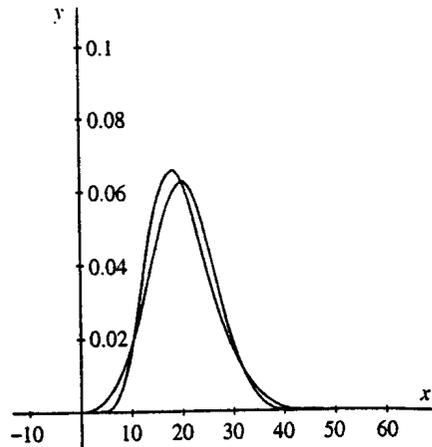


Figura 2

2.3 Suma de variables aleatorias exponenciales

Las variables aleatorias exponenciales son otro ejemplo fácil de analizar. La f.d.p. de una variable exponencial de parámetros α viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El siguiente teorema nos permite calcular fácilmente la suma de variables aleatorias con el mismo parámetro.

Teorema. Sea $Z = X_1 + \dots + X_n$, donde las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una de las cuales tienen una distribución exponencial con el mismo parámetro a . Se cumple que Z tiene una distribución gamma de parámetros a y n ; es decir su f.d.p. viene dada por

$$S_n(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(n)} (\alpha z)^{n-1} e^{-\alpha z} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Instrucciones DERIVE

“Definición de la fdp de la suma de n v.a. exponenciales

“de parámetro α .

SUMA_EXPONEN(n, α): = IF ($x \geq 0, \alpha/\Gamma(n) * (\alpha * x) ^ (n-1) * EXP(-\alpha * x), 0$)

“La siguiente instrucción genera un vector que contiene

“en cada componente la fdp de la suma de 1, 2, 3, 4 v.a.

“ exponenciales de parámetro 1.

VECTOR(SUMA_EXPONEN($n, 1$), $n, 1, 4$)

Simplificamos la anterior expresión y dibujando las funciones, obtenemos la Fig. 3. Se observa como al ir aumentando el número de variables el resultado se aproxima a un comportamiento “normal”.

El análisis visual también permite conjeturar sobre el número mínimo de variables que necesitamos sumar para obtener un comportamiento normal. Esto permite justificar la cifra $n > 30$ que toman la mayor parte de los libros de estadística. [Ross (1987), Meyer (1992)].

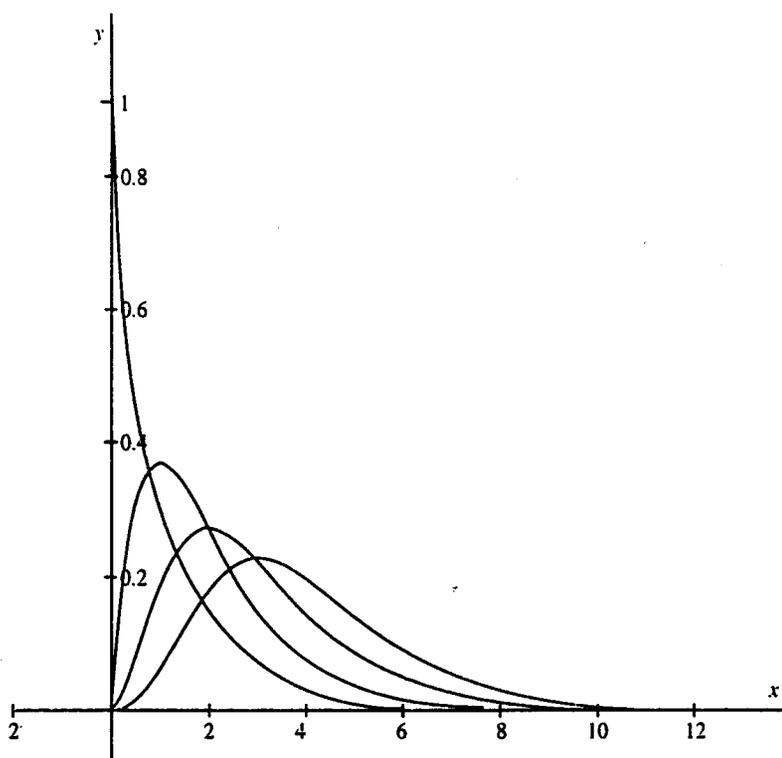


Figura 3

3. Suma de variables aleatorias discretas

Es posible analizar el caso de variables aleatorias discretas, para concluir que la normal también aproxima la suma de estas variables. Esto está íntimamente relacionado con la aproximación de una distribución discreta mediante una continua.

3.1 Suma de los lanzamientos de un dado

El siguiente teorema será de utilidad para analizar la suma de los puntos obtenidos en sucesivos lanzamientos de un dado.

Teorema. Sean X y Y dos v.a. independientes, cada una de las cuales puede tomar sólo valores enteros no negativos. Sea $p(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, \dots$ y $q(r) = P(Y = r)$, $r = 0, 1, \dots$. Sea $Z = X + Y$ sea $w(i) = P(Z = i)$. Entonces,

$$w(i) = \sum_{k=0}^i P_p(k) q(i-k) \quad i = 0, 1, \dots$$

El anterior teorema permite al alumno obtener recursivamente la función de probabilidad de la suma de $n+1$ lanzamientos de un dado. Sea w_n la función de probabilidad de la suma de las caras observadas en n lanzamientos de un dado equilibrado. El teorema anterior conduce a que w_{n+1} se obtiene:

$$w_{n+1}(j) = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \cdot w_n(j-k) = \frac{1}{6} \sum_{k=i-6}^{i-1} w_n(k) \quad i = n+1, \dots, 6(n+1)$$

$$w_1(i) = \frac{1}{6} \quad i = 1, \dots, 6$$

Instrucciones DERIVE

“Funciones auxiliares. Retorna el elemento k de un vector v

v : =

$W(v, k)$: = IF($1 <= k <= \text{DIMENSION}(v)$, ELEMENT(v, k), 0)

“Vector que contiene las probabilidades de cada cara del dado.

“Se ha supuesto que es un dado equilibrado.

$v0$: = [1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6]

$\text{SUMA_DISCRETA}(v0, n)$: = ITERATE(VECTOR (1/6 * SUM($W(v, k)$, $k, i-5, i$), $i, 1, 5 + \text{DIMENSION}(v)$), $v, v0, n-1$)

“Función auxiliar que construye una matriz de puntos para

“poder dibujar el histograma de la fp de la suma de las caras

“de n lanzamientos de un dado. El argumento v es el vector

“obtenido al simplificar la función DERIVE $\text{SUMA_DISCRETA}(v0, n)$.

$\text{HISTOGRAMA}(v, n)$: = VECTOR([[$n + i - 1$, ELEMENT(v, i)], [$n + i - 1$, 0]], $i, 1,$

$\text{DIMENSION}(v)$)

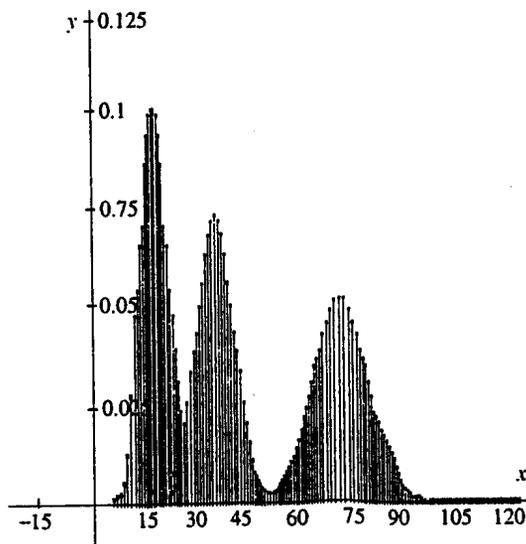


Figura 4

3.2 Suma de variables aleatorias Poisson

La propiedad reproductiva de ciertas v.a. discreta también facilitan el estudio de su suma como es el caso de las v.a. Poisson.

Teorema. Sean X_1, \dots, X_n v.a. independientes. Supóngase que X_i tiene una distribución de Poisson con parámetros $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ y sea $Z = X_1 + \dots + X_n$. Entonces Z tiene una distribución de Poisson de parámetro $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Instrucciones DERIVE

“Definición de la fp de una Poisson de parámetro β .

$$FP_POISSON(\beta, k) := EXP(-\beta) * \beta ^ k/k!$$

“Al simplificar la siguiente expresión genera una matriz de puntos. Al dibujarlos obtenemos el histograma de la suma de n variables Poisson de parámetros β alrededor de su media.

$$HISTOGRAMA_SUMA_POISSON(\beta, n) := VECTOR([i, FP_POISSON(n * \beta, i)], [i, 0], i, FLOOR(n * \beta) - 10, FLOOR(n * \beta) + 10)$$

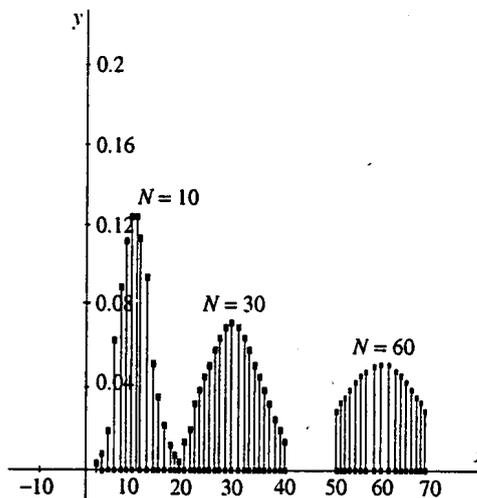


Figura 5

4. Método de simulación Monte Carlo

La introducción del computador en las ciencias es un fenómeno reciente. El tratamiento por computador permite abordar con nuevos planteamientos muchos problemas. Posibilita el estudio de fenómenos mucho más complejos que lo que podía considerarse anteriormente y está cambiando la dirección y el acento de muchos campos de la ciencia y, lo más importante, introduce una nueva manera de pensar en las ciencias: Las leyes científicas se contemplan con algoritmos. En palabras de Wolfram, S. (1984)

“Las computadoras ofrecen una nueva manera de describir e investigar los sistemas científicos y matemáticos. La simulación mediante computadora puede constituir el único sistema de predecir la evolución de un sistema complejo”

Esta tendencia que se produce en la investigación en ciencias se debe reproducir en la enseñanza de las mismas. Son varias las razones para incluir la simulación por computadora en los curriculums matemáticos, en particular del método de Monte Carlo:

- a) La computadora extiende el dominio de las ciencias experimentales: Permite experimentar en un universo hipotético.
- b) Se puede aplicar a estudiar propiedades de sistemas matemáticos abstractos: La experimentación matemática llevada a cabo mediante computadora puede sugerir, muchas veces, resultados que serán demostrados mediante técnicas convencionales.
- c) Los procesos matemáticos susceptibles de describirse mediante un programa no se circunscriben a las operaciones y funciones matemáticas convencionales. La computadora viabiliza la introducción de leyes científicas y matemáticas que son intrínsecamente algorítmicas en sí.

DERIVE tiene una sintaxis muy básica que permite generar números aleatorios y aplicar el método de simulación de Monte Carlo. Las ventajas del manejo de este programa son que no han de conocerse lenguajes de programación (específicos de simulación o de propósitos generales), que su inclusión no requiere un tiempo significativamente mayor y que es adecuado en todos los temas del azar.

4.1 Esquema general de aplicación del método de Monte Carlo

Supongamos que tenemos que calcular una magnitud μ . Ideamos una variable aleatoria X tal que $E(X) = \mu$. Sea además $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Consideremos n variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n con la misma distribución de X . Si n es suficientemente grande, $n > 30$, el Teorema Central del Límite nos permite plantear la relación

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.997$$

Esta es una relación de suma importancia para el método de Monte Carlo que ofrece un procedimiento para calcular y a la vez permite estimar el error.

4.2 Cálculo de una integral definida

Como ilustración aplicaremos el método de Monte Carlo a un problema de naturaleza

no probabilística, como es el de cálculo de $\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx$

Consideramos (x, y) una v.a. distribuida uniformemente en el rectángulo que tiene por base el segmento $[0, \pi/2]$ y altura el segmento $[0, 1]$. Definimos la v.a.

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si } y < g(x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E(Z) = P(y < g(x)) = \frac{\text{área por debajo de } g(x)}{\text{área del rectángulo}} = \frac{1}{\pi / 2}$$

Instrucciones DERIVE

“Definición de la función seno restringida al intervalo

“ $[0, \pi/2]$

$F(x) := \text{SIN}(x) * \text{CHI}(0, x, \pi/2)$

“Matriz de puntos. Al dibujarlos obtenemos el rectángulo

$[[0, 1], [\pi/2, 1], [\pi/2, 0]]$

«Esta instrucción nos permite generar aleatoriamente una

“ m.a. de la v.a (x, y) .

$\text{PUNTOS}(n) := \text{VECTOR}([\pi/2 * \text{RANDOM}(1), \text{RANDOM}(1)], k, 1, n)$

Las posibilidades gráficas del programa permiten explicar con mayor eficacia el método. Un ejemplo es la Fig. 6, que representa una muestra aleatoria de la v.a. (x, y) , uniformemente distribuida en el rectángulo. La variable aleatoria Z valdrá 1 si el punto queda por debajo de la gráfica y 0 en otro caso.

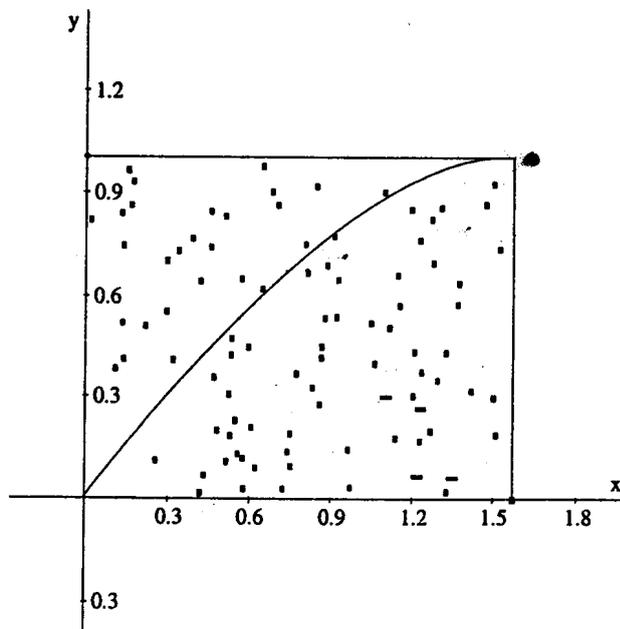


Figura 6

El programa permite efectuar gran cantidad de cálculos y variar el número de simulaciones. Generamos una muestra aleatoria de la v.a. Z. Y calculamos la media muestral mediante la instrucción DERIVE:

$$\text{SIMUL}(n): = \text{AVERAGE}(\text{VECTOR}(\text{IF}(F(\text{pi}/2 * \text{RANDOM}(1)) > \text{RANDOM}(1), 1, 0), k, 1, n))$$

A continuación, se presentan una serie de resultados que se pueden obtener por el procedimiento presentado:

número de simulaciones	$n = 100$	$n = 1\ 000$	$n = 10\ 000$
Estimación $I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx$	1.11	1.016	0.998
\bar{X}	0.71	0.647	0.6358
Estimulación de error	0.136	0.045	0.0144

4.3 Análisis del paso de neutrones a través de una placa [Sóbol (1983)]

Como hemos dicho, un factor importante, que determina el interés del alumno por un método, es la capacidad que tenga éste para resolver problemas reales. Esto aconseja buscar ejemplos donde se modelicen situaciones concretas.

Posiblemente sea en la física de partículas donde el método de Monte Carlo tenga sus más frecuentes aplicaciones, pues las leyes probabilísticas de la interacción entre una partícula elemental (neutrón, fotón, mesón, etc.) y la materia son conocidas.

Supongamos que una placa, homogénea e infinita, es bombardeada por un flujo de neutrones, siendo el ángulo de incidencia igual a 90° . Al chocar con los átomos de la placa, los neutrones pueden rebotar elásticamente o pueden ser absorbidos. Supongamos, para simplificar, que el neutrón conserva, al rebotar, su energía y que cualquier cambio de dirección del neutrón con el choque del átomo es igualmente probable (esto último sucede en materiales con átomos pesados).

Las distintas suertes que pueden correr el neutrón: (a) atraviesa la placa, (b) es absorbido y (c) el neutrón es rebotado.

La interacción de los neutrones con la materia se caracteriza en estos casos mediante las constantes δ_c y δ_s que se denominan “sección de absorción” y “sección de dispersión”. La suma de estas secciones lleva el nombre de “sección completa”.

$$\delta = \delta_c + \delta_s$$

Estas secciones tienen el siguiente significado físico: al chocar el neutrón con un átomo de la materia, la probabilidad de absorción es igual a δ_c/δ y la probabilidad de esparcimiento es $\delta_s + \delta$.

El "recorrido libre de un neutrón", λ (o sea el recorrido entre choque y choque) tiene una distribución exponencial de parámetro δ . La fórmula para generar v.a. de este tipo a partir de uniformes en (0,1), [Ross(1987)], es

$$\lambda = -\frac{1}{\delta} \ln x$$

Como existe un problema de simetría respecto del eje x esta dirección se determina generalmente con sólo indicar el ángulo entre la dirección de la velocidad del neutrón y el eje OX. La condición de que las direcciones sean igualmente probables es, en este caso, equivalente a que el coseno de éste ángulo esté uniformemente distribuido en (-1,1) que equivale a emplear la fórmula

$$\mu = \cos \varphi = 2x - 1$$

Esquema de cálculo

Supongamos que el neutrón ha experimentado el k -ésimo rebote en el punto de abscisas x_k , correspondiente al interior de la placa y ha comenzado a moverse en la dirección μ_k . Calculamos la abscisa del punto de colisión siguiente $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k$ y comprobamos la condición de que la placa ha sido atravesada $x_{k+1} > h$. Si esta condición se cumple, concluimos con el análisis de la trayectoria del neutrón; en caso contrario, comprobamos la condición de reflexión, $x_{k-1} < 0$, en caso de satisfacerse concluimos también el análisis. Si no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores, tenemos:

$$0 \leq x_{k+1} \leq h$$

Generamos un número aleatorio x uniforme en (0,1) y comprobamos la condición de absorción

$$x < \frac{\delta_c}{\delta}$$

Si se cumple concluimos el análisis, en caso contrario generamos la próxima dirección

$$\mu_{k+1} = 2x - 1$$

y volvemos a repetir el proceso.

El programa DERIVE admite funciones definidas recursivamente. Esta propiedad le da grandes posibilidades al programa. Por ejemplo, García et al. (1995) se basan en ella para programar el método simplex. Esta propiedad nos va a permitir ir generando sucesivos rebotes hasta que el neutrón alcance una de sus tres situaciones límites.

Obtención de una solución del problema

Nos planteamos calcular la probabilidad de que un neutrón atraviese una placa con las siguientes características $\delta = 5$, $\delta_c = 1$, $h = 1 \text{ cm}$

Definimos la v. a.

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si el neutrón atraviesa la placa} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Este procedimiento nos permite generar una muestra aleatoria de tamaño cualquiera, distribuida como la variable aleatoria Z . La esperanza matemática de la v.a. Z , que es el valor que queremos estimar, es la probabilidad que un neutrón atraviese la placa. Todo esto se implementa con DERIVE de la siguiente forma:

Instrucciones DERIVE

“Calcula la abcisa del siguiente punto de colisión suponiendo
“que la sección completa vale δ y se encontraba en la abcisa x

$$F(x, \delta): = x - 1/\delta * \text{LN}(\text{RANDOM}(1)) * (2 * \text{RANDOM}(1) - 1)$$

“Simula el recorrido a través de una placa de grosor h , de
“sección completa δ y de sección de absorción δc . La posición
“inicial es x .

$$\text{NEUTRON}(x, h, \delta, \delta c): = \text{IF}(0 < = x < = h, \text{IF}(\text{RANDOM}(1) < \delta c/\delta, 0, \text{NEUTRON}(F(x, \delta), h, \delta, \delta c)), \text{IF}(x > h, 1, -1))$$

$$x0(\delta): = -1/\delta * \text{LN}(\text{RANDOM}(1))$$

“Genera una m. a. de tamaño n de la suerte seguida por
“un neutrón al atravesar una placa de
“características $h, \delta, \delta c$.

$$\text{SIMULACION}(n, h, \delta, \delta c): = \text{VECTOR}(\text{NEUTRON}(x0(\delta), h, \delta, \delta c), k, 1, n)$$

“Función auxiliar que calcula el porcentaje de 1, 0 y -1 que “aparecen en el vector v

$$\text{CONTADOR}(v): = [[\text{“Prob.de reflexion = ”}, \text{DIMENSION}(\text{SELECT}(k = -1, k, v))/\text{DIMENSION}(v)], [\text{“Prob.absorción = ”}, \text{DIMENSION}(\text{SELECT}(k = 0, k, v))/\text{DIMENSION}(v)], [\text{“Prob.de atravesar = ”}, \text{DIMENSION}(\text{SELECT}(k = 1, k, v))/\text{DIMENSION}(v)]]$$

La v. a. Z tiene una distribución Bernoulli de parámetro p . La varianza de la media muestral para este tipo de v.a. es

$$\frac{p(1-p)}{n}$$

que viene dada en función del parámetro desconocido. Podemos acotarla al considerar que el valor de p está comprendido entre 0 y 1.

$$\text{Max}_{p \in [0, 1]} \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.5^2}{n}$$

El problema se plantea en calcular el número de simulaciones que nos permitan obtener un error inferior a 0.05.

$$\text{Cota de } e = 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < 3 \sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{n}} < 0.05$$

Resolviendo obtenemos $n = 900$.

Simplificando la expresión `CONTADOR(SIMULACION(900, 1, 5, 1))` obtenemos

“Probabilidad de reflexión” = 0.1844

“Probabilidad de absorción” = 0.6033

“Probabilidad de atravesar” = 0.2123

Bibliografía

- García, R. y Verástegui, D.** (1995). *Implementación del algoritmo del método simplex con DERIVE*. Epsilon, 33, 241-250.
- Meyer, P.** (1992) Probabilidad y aplicaciones estadísticas. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington.
- Rich, A. y otros** (1993). *DERIVE, User Manual*. Soft Warehouse. Hawai.
- Ross, S.** (1987) *Introduction to Probability and Statistic for Engineers and Scientistics*, John Wiley y Sons. Nueva York.
- Sóbol, I.M.** (1980) *Método de Monte Carlo*. Mir, Moscú.
- Villers, M.** *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. Epsilon, 26, 15-30.
- Wolfram, S.** (1984) *Programación en ciencias y en matemáticas*. Revista Investigación y Ciencia. 98, 124 - 138

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto de Colaboración entre el Departamento de Matemáticas de la Univ. de Castilla La Mancha y el Departamento de Matemáticas del Instituto de Educación Secundaria “Fernández de los Ríos”, proyecto financiado por Ministerio de Educación y Ciencia. Agradecemos la ayuda prestada al financiar la investigación.