El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial

Resumen

El proyecto de doctorado, en el que se basa este trabajo y que estaba en proceso cuando se escribió el mismo, es un estudio de las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático novel en su encuentro con la abstracción matemática. Para tal fin, 20 pregraduados de matemáticas de primer año an Oxford fueron examinados y se audiograbaron sus pláticas tutoriales semanarias; también fueron entrevistados dos veces en los primeros dos plazos del año académico 1993-1994. Los temas del plan de estudios en Oxford, a los que se refieren las labores tutoriales y las entrevistas, son: Álgebra Lineal, Continuidad y Diferenciabilidad, Topología, Sucesiones y Series, y Grupos, Anillos y Campos. El análisis de datos se dirige al surgimiento de la teoría fundamentada de datos. El contenido del presente trabajo se basa en las entrevistas a 6 de los 20 estudiantes que participan en el estudio. En las partes de las entrevistas que se consideran aquí, los entrevistados analizan los conceptos de las nociones algebraicas de **espacio generado** (*span*) y **conjuntos generadores** (*spanning set*).

Abstract The doctorate project, on which this paper is based and which was going on when this paper was written, is a study of the novice mathematician´s conceptual and reasoning difficulties in their encounter with mathematical abstraction. For this purpose 20 Oxford first year mathematics undergraduates were observed and audio-recorded in their weekly tutorial and interviewed twice in the first two terms of academic year 1993-1994. The Oxford syllabus topics, on which the tutorial and interview content draws on, are Linear Algebra, Continuity-and-Differentiability, Topology, Sequences-and-Series and Groups-Rings-and Fields. Data analysis aims at the emergence of data grounded theory. The material presented in this paper is based on the interviews with 6 of the 20 students participating in the study. In the parts of the interviews referred to here, the interviewees discuss their conceptions of the algebraic notions of ***span*** and ***spanning set***.

El proyecto de doctorado, en el cual se basa este documento, y que continuó durante la escritura del mismo, es un estudio de las dificultades conceptuales y de razonamiento del matemático principiante en su encuentro con la abstracción matemática. Para este propósito, se observaron y registraron en grabaciones de audio en sus tutorías semanales a 20 estudiantes del primer año de la carrera de Matemáticas en Oxford, además

Elena Nardi
Universidad de Oxford
Reino Unido

e ser entrevistados dos veces en los primeros dos periodos del año académico 1993-4. .os temas del programa de Oxford, en los cuales el contenido de entrevistas y tutorías e redactan, son Álgebra Lineal, Continuidad y Diferenciabilidad, Topología, Series ' Sucesiones y Grupos, Anillos y Campos. El análisis de datos se orienta hacia el surgimiento de la teoría con fundamento en los datos. El material presentado en este docunento se basa en las entrevistas con 6 de los 20 estudiantes participantes en el estudio. En partes de las entrevistas referidas aquí, los entrevistados presentan sus conceptos de las nociones algebraicas de ***espacio generado*** y ***conjuntos generadores***.

Introducción

Los orígenes teóricos del estudio, sobre los que se basa este documento, consisten en la comprensión de que una reforma educativa referente a la enseñanza de las matemá-ticas no puede tener lugar en ausencia de una noción de los procesos de pensamiento del alumno. Aunado a la complejidad epistemológica idiosincrásica, intrínseca de las matemáticas, aparece la dimensión cognoscitiva de la didáctica como particularmente significativa (Balacheff, 1990).

Con respecto al aprendizaje de las matemáticas avanzadas, este estudio parte de la suposición fundamentada en la literatura, relativa al tema, e.g. (Tall, 1991), de que un matemático principiante enfrenta una serie de dificultades cognoscitivas en su contacto con la abstracción matemática. Como se mencionó en presentaciones anteriores de partes del estudio (Nardi, 1994 a y b; 1995; 1996), se piensa en la abstracción tanto desde una perspectiva psicológica, por ejemplo, el conocimiento que el estudiante de matemáticas avanzadas tiene que formarse de manera axiomática y aprender cómo razonar deductivamente; y desde una perspectiva epistemológica, por ejemplo, que la naturaleza de los objetos del aprendizaje matemático avanzado pueden extenderse mas allá de lo físico o lo numérico.

En lo arriba expresado, el aprendizaje no es visto como aislado en un vacío cognoscitivo, sino dentro de un contexto sociocultural (Vygotsky, 1962). Por lo tanto, en una rama constructivista del pensamiento (Von Glasersfeld, 1987) la cognición del que aprende, mientras sea personal y de interés individual, es también vista enfáticamente como que tiene lugar en un ambiente de aprendizaje. En este caso, el contexto dentro del cual se lleva a cabo el aprendizaje, es el curso de matemáticas de la licenciatura de Oxford. Este estudio busca construir un perfil psicológico de las dificultades de los principiantes en su contacto con la abstracción matemática por medio del estudio de sus manifestaciones de aprendizaje. Se asume aquí que la cognición sólo puede volverse visible y accesible a través de las articulaciones orales y escritas del pensamiento matemático de los alumnos (en este estudio: orales). Como un proceso de pensamiento, la cognición es esotérica e inaccesible. En realidad, esto es un estudio fenomenológico de la cognición de la matemática avanzada (Curtis y Mays, 1978).

La experiencia de un Estudio Piloto para este estudio (Nardi, 1994) proporcionó evidencia de que las tutorías dadas a los estudiantes de matemáticas de primer año en Oxford pueden ser una fuente esencial de datos estimando las manifestaciones de cognición matemática de los principiantes. Una tutoría es una sesión semanal de 30 a 60 minutos, durante la cual, uno o dos estudiantes discuten el contenido de las clases y de una variedad de problemas con un tutor de matemáticas del Instituto de Matemáticas.

Por lo tanto, a diferencia de las clases tradicionales, donde el profesor se dirige a una gran audiencia, las tutorías son un foro en el cual los estudiantes pueden discutir sus preocupaciones matemáticas con un matemático profesional.

La observación, la grabación de tutorías y las entrevistas con los estudiantes observados se escogieron como las técnicas cualitativas a través de las cuales se llega a las expresiones de los estudiantes. La observación de las tutorías en *Álgebra Lineal, Continuidad y Diferenciabilidad, Topología, Series y Sucesiones y Grupos, Anillos y Campos* fueron relativamente no sistemáticas, pero orientadas por los propósitos cognitivos del estudio así como por la investigación en el campo del pensamiento matemático avanzado. La observación duró 14 semanas y aproximadamente 200 horas. Las entrevistas se llevaron a cabo dos veces y fueron básicamente estructuradas alrededor de temas de matemáticas que durante la observación surgieron como particularmente problemáticos para los estudiantes. La apertura de técnicas metodológicas selectas fue consecuencia natural de la decisión de fundamentar la teoría en los datos generados por este estudio (Glaser y Strauss, 1967).

Durante el análisis de los datos, los registros de las tutorías y las entrevistas fueron transcritos y tabulados en términos de su contenido matemático y didáctico. El Material de Tutoría fue repetidamente explorado y, vía un proceso gradualmente más selectivo, se extrajo un número de Episodios de aprendizaje crucial como material de su análisis. El resto, llamado material no Episódico se usa como material de soporte que enriquece y contextualiza los Episodios.

Se presenta un análisis adicional en forma de cinco secciones sobre los *Fundamentos de Análisis, Cálculo, Topología, Álgebra Lineal* y *Álgebra Abstracta.* Cada uno de los Episodios de aprendizaje mencionados arriba se presenta y analiza como un texto. El texto aquí es el conglomerado de la grabación, la transcripción, las notas tomadas durante la observación y los documentos contextuales (hojas de problemas, notas de clase, listas de lectura). El análisis del texto se apoya por el Material No Episódico y las Entrevistas. Las observaciones psicológicas en cada Episodio se reúnen y se presentan juntas al final de cada sección. La síntesis final de las referencias cruzadas de los temas de abstracciones teóricas del estudio se basan en la teoría intermedia, que tiene lugar durante las cinco secciones de los temas.

El Material de las Entrevistas consiste en grupos de presentaciones individuales abiertas con los estudiantes sobre seis temas particularmente problemáticos: *acumulación/puntos aislados/apertura/cerradura, límite, conjuntos generadores, compacidad, convergencia de series y sucesiones,* y el *Primer Teorema de Isomorfismo para Grupos/conceptos relevantes.* El Material de la Entrevista en cada uno de los seis temas anteriores constituye una Unidad Analítica. El Texto para cada Unidad consiste en Transcripciones de la Entrevista sobre el tema particular y los Manuscritos con la letra de los entrevistados; también he consultando mis notas personales fuera de registro tomadas inmediatamente después de las entrevistas.

La unidad analítica de la entrevista sobre los espacios generados y conjuntos generadores: Evidencia y Análisis

En este documento presento algunos hallazgos del Análisis de la Unidad Analítica de conjuntos generadores. Las entrevistas de las que se deriva este material se varon a cabo en la última semana del primer período de observación. En el análisis utilizaron aspectos de algunas teorías del aprendizaje comúnmente usadas en el discurso didáctico sobre el pensamiento matemático avanzado. Por lo tanto, antes de proceder con la presentación de algunos resultados, deseo señalar que se utilizó la noción imagen conceptual y la definición del concepto como fue acuñada por Vinner y all (1981). También se usó el término imaginativo en el sentido global del conjunto e imágenes mentales que usa un alumno. Esto puede incluir imágenes notacionales, erbales y pictóricas. A continuación se bosqueja el contexto y el fundamento de la Colección de Datos y el Análisis presentados en este documento.

Los extractos de entrevistas que aquí se presentan corresponden a la octava semana del periodo de "Michaelmas", primer período de la Universidad de Oxford que dura 8 semanas aproximadamente desde principios de Octubre hasta principios de Diciembre. Los seis entrevistados son estudiantes de bachillerato del primer año de matemáticas y desde el tiempo en que se realizaron las entrevistas, ellos han sido observados junto con otros catorce estudiantes del mismo nivel de matemáticas por seis semanas (de la tercera a la octava del periodo). La presentación acerca de vectores es la última parte de la entrevista. Antes de que a los estudiantes se les hayan solicitado la presentación de varios temas de Topología (puntos de acumulación y conjuntos abiertos) y Cálculo (límites). En la tercera parte de la entrevista, se dieron las palabras –o, como se llamará de aquí en adelante, la *Cadena de Términos.*

generar, ser generado por, conjunto generador, espacio generado.

y se les solicitó que pensaran en voz alta acerca de ellos. Se observa aquí que las preguntas de la entrevista fueron seleccionadas con base en la experiencia de la observación durante la cual algunos conceptos surgieron como particularmente problemáticos. En las semanas anteriores a las entrevistas, todos los participantes parecían muy preocupados con el concepto de conjunto generador y espacio generado. Cuando los tutores les preguntaron acerca de las definiciones de espacio generado y conjuntos generadores dados en las clases de esa semana, ninguno de los estudiantes pudo recordar.

Una averiguación en sus notas de clase nos llevó al descubrimiento de que la definición de espacio dado en las clases fue:

*Si **S** es un subconjunto de un espacio vectorial **V**, entonces el espacio generado de **S** es el subespacio más pequeño de **V** que contiene a **S**.*

Entonces el teorema nos llevaba a que dado un conjunto X, S es un conjunto generador de X si X está formada por todas las combinaciones lineales de los elementos de S. Un conjunto generador de un espacio vectorial se llama una base cuando es linealmente independiente. El número de elementos en la base se llama la dimensión del espacio vectorial. En la hoja de problemas de Álgebra Lineal de esa semana, a los estudiantes se les entregaron varios conjuntos y se les preguntó si eran espacios vectoriales o no, asimismo se les proporcionaron subconjuntos de algunos espacios vectoriales y se les preguntó si eran subespacios o no. También se les solicitó demostrar algunas propiedades teóricas de conjuntos de subespacios y espacios y usarlos en aplicaciones de la teoría de matrices. Se pudo trazar el mismo patrón en la hoja de problemas de Álgebra Lineal de la siguiente semana, considerando las bases y dimensiones encontradas.

De lo arriba expresado, es claro que la intención del programa, en este tema en particular, es el de ir construyendo con prudente formalismo los conceptos de espacio vectorial, subespacio y espacio. Posteriormente el concepto de base se trata como un tipo especial de conjunto generador que además tiene la propiedad de independencia lineal. Durante las tutorías, el ejemplo utilizado casi exclusivamente fue el del plano de dos dimensiones. El ordenamiento didáctico anterior de los conceptos es típico en el sentido de que encapsula los principios del formalismo que determinan el contenido y la estructura de la mayoría de los cursos de matemáticas de bachillerato. Se presentaron a continuación algunas evidencias que la cognición del alumno no parece seguir la misma lógica y estructura.

Las tres observaciones mayores, fundamentadas en el Material de las Entrevistas de esta Unidad, alrededor de las cuales giran la presentación de resultados en las secciones subsecuentes son las siguientes:

- *Observación 1 (Espacio en **R2**).* Los principiantes en su presentación de espacios generados y conjunto generador recurrieron al uso de un soporte de representación visual, principalmente en **R2**, resultando en una perplejidad cognitiva incrementada.
  Conjetura 1. En este tema en particular el uso de una representación visual 'obvia', como lo es el plano, nos lleva a generar un obstáculo para la comprensión.
  Consideración Didáctica 1. ¿Cómo hacer para que la visualización no cause el efecto anterior?
- *Observación 2 (Conjunto generador como una base).* Ya sea en forma explícita o implícita, la imagen conceptual dominante en los principiantes acerca de un conjunto generador es que representa una base.
  Conjetura 2. El desarrollo cognitivo del concepto de conjunto generador no sigue el mismo patrón que su desarrollo espistemológico.
  Consideración Didáctica 2. ¿Indica la conjetura 2 una dirección para un posible desarrollo didáctico del concepto de conjunto generador?
- *Observación 3 (Gram-Jam).* La mayoría de los principiantes en algunos puntos confundieron y utilizaron los términos de espacio generado y conjunto generador ya sea intercambiándolos o usando uno en lugar de otro. Esto no necesariamente condujo a una descripción menos exitosa de los conceptos en comparación con los principiantes que nos confundieron los términos.
  Conjetura 3. La perplejidad semántica es una característica pero no una componente definitiva de la cognición perpleja.
  Consideración Didáctica 3. ¿Implica la conjetura 3 una posible prescripción del grado de importancia que la didáctica de las matemáticas avanzadas debe atribuir a la semántica del formalismo matemático?

Se observa que en lo anterior, el término conjetura se usa en el sentido de una proposición hipotética que requiere someterse a una prueba posterior de tal manera que puede ser falsa, modificarse o confirmarse.

Como se mencionó al principio, a los entrevistados se les proporcionó la *Cadena de Términos* y luego se les solicitó que pensaran en voz alta acerca de ellos. Se les animó para que describieran los términos en sus propias palabras y, si lo deseaban, escribir y dibujar en un papel y usar ejemplos.

Subsecuentemente se les solicitó que dieran definiciones de los conceptos. Si el iempo lo permitía, la presentación se dirigía hacia las propiedades de los espacios ;enerados y conjuntos generadores, bases y dimensiones. Por lo tanto la mayoría de as presentaciones tenía la estructura:

primera reacción a la *Cadena de Términos*

intento de formalizar la *Cadena de Términos*

(opcional) presentación de propiedades de alguno de los términos de la *Cadena*
En adelante se presentan algunas evidencias características y un análisis con respecto a la Observación/Conjetura/Consideración Didáctica 2. Las evidencias aquí se toman de cada una de las tres partes de la presentación. En la parte A se presenta la Evidencia (extraída de los Datos de la Entrevista), posteriormente, (parte B) se discute la Evidencia para ilustrar cómo emerge la Observación 2. Subsecuentemente (Parte C) se comenta brevemente el fenómeno cognitivo descrito en la Observación 2 y (Parte D) se señala una implicación didáctica del análisis. Finalmente (Parte E) se tocan algunos puntos relacionados con la Observaciones 1 y 3 y se incluyen estos hallazgos para el análisis de esta Unidad en un marco de hallazgos del estudio.

A: Conjunto generador como una base: La evidencia

Aquí se recolectó la evidencia de la primera reacción de los estudiantes a las *Cadenas de Términos* en donde los estudiantes demostraron la tendencia de explicar los conjuntos generadores en términos de bases.

- Robert tomó algunos segundos observado la *Cadena*. Sus palabras después de estos momentos de pensamiento silencioso fueron:

  'Digamos se ha obtenido un espacio de vectores, digamos un espacio vectorial V, y me dan un conjunto X que pertenece a ese espacio, digamos R^2, entonces cualquier miembro de R^2 se puede representar como una combinación de esos dos, así ellos generan el espacio R^2. Y esto es equivalente a decir que ese R^2 es generado por esos dos vectores.'

Incluso proporcionó (1, 2), (4, 3) como dos vectores de ese tipo.

- La primera reacción de Helena fue proporcionar la definición formal de los términos de la *Cadena:*

  'Dado un espacio vectorial V y un conjunto S de elementos de V, <S> consiste de la combinación lineal de $a_1s_1 + ... + a_ns_n$, [dictando] donde a_i pertenece a un campo, ya sea en R o en C, y s_i son los elementos de S. Si <S> = V entonces V esta generado por S'.

Acerca de S *agregó:*

'... esto puede ser por ejemplo una base'.

- Andrew tomó unos momentos tratando de clarificar la pregunta del entrevistador: se admiró cuando se le solicitó que *'hablara específicamente ... espacios y cosas?'*. Después sus primeras palabras, mientras miraba a la *Cadena*, fueron:

  'Usted dijo que un espacio es generado por una base'

- De manera similar a la de Andrew, Chris se sorprendió cuando se le solicitó *'que solo hablara acerca'* de la *Cadena.* Entonces, sus palabras, observando la *Cadena,* fueron:

  'Si Usted tiene un conjunto, un espacio vectorial, permítame pensar en un ejemplo, digamos toda matriz cuadrada de $n \times n$*, em, o hagámoslo más simple toda matriz de 3 por 3, em, luego... el espacio generado por su base.. es un espacio generado por su base siendo ese espacio generado una combinación lineal de cualquiera de los elementos de la base ... así que algo es una base si el espacio generado es el ... si todo elemento en el espacio se puede construir como una combinación lineal de ciertos elementos en el espacio generado. Pero no tiene que ser una base, quiero decir si algo se genera ... si un conjunto genera otro, entonces todo elemento en el conjunto generador es la combinación lineal de los elementos en el conjunto.'*

- Jamie, después de una reacción espontánea negativa al mirar la *Cadena*, escribió:

$$T{:}V -> W$$

$$v \in V,$$

con lo que posteriormente se sonrojó, y sus palabras fueron:

Un espacio generado, está bien ... trataré de explicarlo... digamos... Empezaré con 'es generado por'... usted tiene una transformación T *y ésta envía* v *a* w*,... envía... no sé... envía* v *a* w*. Entonces la definición de conjunto generador es ... es aquella que debe contener el mínimo número de elementos, tal que... una combinación lineal de ellos... digamos solamente* V*...es el espacio vectorial... usted puede encontrar cualquier* v *que pertenece a una* V *grande de tal manera em,.. digamos que* V *es finita... entonces el... yo pienso que esto significa un conjunto generador. Un conjunto generador ya que habrá diferentes clases...em... una combinación lineal de ellos será igual... llamemos los elementos del conjunto generador de* a_1 *hasta* a_n *y poniendo diferentes alfas se puede obtener cualquier número en* V*... y por lo tanto el espacio generador, generar significa... para espaciar* V *se tiene que encontrar el... un conjunto de elementos o conjunto de, er,... matrices o lo que sea eso es...* V *consiste de... esto va a... es un espacio vectorial... y será n-dimensional y lo encontrará comúnmente en términos de vectores columna tal vez...'*

Les preguntamos si podían proporcionar definiciones formales de lo que habían dicho, algunos estudiantes reaccionaron como sigue:

- Robert dijo que él no podía proporcionar una definición formal de $<S>$. Se le recordó que el espacio de S, $<S>$, se define comúnmente como un conjunto de combinaciones lineales de los elementos de S. Respondió escribiendo:

$$<S> = \{\Sigma a_i v_i : a_i \in F, v_i \in V\}$$

oma la sumatoria desde 1 hasta **k** y sus palabras mientras escribía fueron:

'... *donde **F** es un campo, V es un espacio vectorial n...'.*

En los casos en que los estudiantes parecían renuentes a intentar formalizar en sus palabras, se les mostraba un dibujo de un plano con varios vectores distribuidos en toda la superficie (el *Dibujo*). Luego se repitió la solicitud de intentar proporcionar definiciones formales de los términos de la *Cadena.* Aquí están algunas de sus reacciones:

- Andrew reaccionó a los *Dibujos* con

  '... Como dije, el plano es generado por cualesquiera dos de ellos linealmente independientes. El espacio del este plano ... son cualesquiera dos vectores linealmente independientes.'

Así, el plano está generado por dos vectores, agregó el entrevistador,

'...puesto que el generador de ese plano son cualesquiera dos vectores linealmente independientes.'

continuó Andrew. Cuando se le preguntó sobre el contenido de <{(1,0), (0,1)}> respondió:

'cualquier combinación lineal de éste y éste.'

- La reacción de Margaret sobre el Dibujo fue:

  *'Básicamente sólo necesitas dos vectores si tienes un plano. Dos vectores que se encuentran en ese plano y cualquier otro vector en ese plano se puede expresar como una combinación lineal de los otros dos si em, ... si **r** y **s** se encuentran en el plano, llamado V, entonces cualquier vector que se encuentre en V se puede escribir como una combinación lineal de éstos. Por lo tanto, ese es el conjunto generador y V es el espacio generador de S.'*

- La reacción de Chris al Dibujo fue

  *'Así por ejemplo, el espacio generado por S es la combinación lineal de todos los elementos de S. Así, el espacio generado por S es mucho más grande que S. S puede tener, S puede ser sólo (0,1) y (1,0) y entonces el espacio generado por S será todo (**a,b**). Así, el espacio generado por S es R^2 ... así este espacio generado es éste. S es generado por esto. Eso es el espacio generado por S. Eso es el conjunto generador de eso.'*

- Jamie escribió una *x* y una *y* en el *Dibujo* y dijo:

  *'Er,... digamos que ... y decimos que ... digamos simplemente esa dirección es **y** y esta dirección es **x**, entonces una combinación lineal, ... para ser un conjunto generador, éste debe ser una combinación lineal de cualquier punto en el plano ...*

Así podemos tener (1,0)...este plano puede generarse por (1,0), (0,1) porque es linealmente independiente... y no puedo recordar si estos son $\boldsymbol{a_1}$ *(1,0) más* $\boldsymbol{a_2}$ *(0,1) y se puede obtener ... cualquier punto en el plano.'*

Mientras tanto ella había escrito

$$<(1\ 0)\ (0\ 1)>$$

$$a_1(0\ 1)\ +\ a_2\ (1\ 0)\ =$$

trazó unos ejes cartesianos y marcó los puntos (1, 0) y (0, 1) en ellos. Cuando se le exhortó para que utilizara las palabras de la *Cadena*, ella dijo:

'Em,... estos dos vectores aquí generan el plano. Ellos son un generador del plano.'

En la presentación de las propiedades por $<S>$, por primera vez Helena se refiere al plano y Chris se refiere a un paralelo entre el espacio generado y las operaciones sobre los renglones y la forma escalonada de las matrices. Los ejemplos de conjuntos generadores que utilizaron nuevamente resultaron en ser bases.

B. Conjunto generador como una base: un fenómeno cognitivo que emerge de las tendencias de los estudiantes

En la evidencia citada en la Parte A, una tendencia (de un conjunto generador como una base) aparece como dominante en la actitud de los estudiantes hacia el concepto de conjunto generador. Se observa aquí que los extractos presentados en la sección previa son substanciosos en muchas otras perspectivas también. Por ejemplo, estos pueden analizarse desde la perspectiva de las Observaciones 1 y 3. Aquí, sin embargo, el análisis se centra en el material, desde la perspectiva de la Observación 2. Revisando ahora la actitud de los estudiantes hacia el concepto de conjunto generador como se expresa en los extractos mencionados anteriormente se llega a que:

- Robert empieza hablando acerca de un espacio vectorial general, pero pronto cambia a un $\boldsymbol{R^2}$ y da dos vectores, (1 2) y (4 3), que *'generan el espacio* $\boldsymbol{R^2}$ '. Observo que esos dos vectores sí generan $\boldsymbol{R^2}$. Incluso, forman una base para $\boldsymbol{R^2}$. Cuando se le pregunta si puede proporcionar definiciones formales, dice que no, pero cuando el entrevistador proporciona una definición verbal del generado de S, él produce una impecable expresión teórica para $<S>$.
- La impecable presentación formal de Helena concluyó con una referencia a un conjunto generador S: 'éste puede ser por ejemplo una base'. Hacia el final de la entrevista, mientras se discutían algunas propiedades de $<S>$, ella proporcionó ejemplos de conjuntos generadores que sucede que todos eran bases.
- Las primeras palabras de Andrew acerca de la *Cadena* fueron: *'Un espacio es generado por una base'*. Cuando se le mostró posteriormente el *Dibujo*, reafirmó su postura con *'... como dije, el plano es generado por cualesquiera dos de aquellos que son linealmente independientes'* y *'el generador de ese plano es cualesquiera*

dos vectores linealmente independientes'. Sin embargo, cuando se le preguntó acerca del contenido de <{(1 0), (0 1)} respondió: *'cualquier combinación lineal de éste y éste'*.

- De manera similar que Andrew, Margaret reaccionó con el *Dibujo* como sigue: *'Básicamente se necesitan sólo dos vectores si se tiene un plano. Dos vectores que se encuentran en ese plano y cualquier otro vector en el plano se expresa como una combinación de los otros dos... Por lo tanto, ese es el conjunto generador y **V** es el generador de **S**'*.
- Chris se fue inmediatamente a los ejemplos. Primero matrices de **n** × **n** después simplemente matrices de **3** × **3**, las cuales sin embargo, nunca volvió a utilizar en su monólogo nuevamente. Para Chris un espacio vectorial es *'el generado por su base'* y un espacio generado es *'una combinación lineal de cualquiera de los elementos en la base'*. Concluyó después que *'... así, algo es una base si lo que genera es el ... si todo elemento en el espacio puede construirse como una combinación lineal de algunos elementos en el espacio generado'*. Sin embargo, mencionó que *'No tiene que ser una base ... si algo genera'*. (Se observa que el trabajo de Chris tiene mayor sentido si uno tiene en mente que Chris frecuentemente mezcla los términos espacio generado y conjunto generador.) Al reaccionar respecto a los *Dibujos*, Chris explicó que *'por ejemplo, el espacio generado por **S** es una combinación lineal de todos los elementos de **S**. Así, el espacio generado por **S** es mucho más grande que **S**. **S** puede tener, **S** puede ser sólo (0, 1) y (1, 0) y luego el espacio generado por **S** será todo (**a**, **b**). Así, el espacio generado por **S** es R^2 ...'*. Además, hacia el final de la presentación los ejemplos sobre matrices de Chris fueron todos de conjuntos generadores que sucede que son bases.
- Jamie, probablemente bajo la influencia de los estudiantes involucrados recientemente con mapeos lineales entre espacios vectoriales, tomó unos minutos tratando de incorporar mapeos lineales en su monólogo. Sin embargo, nunca regresó al mapeo ***T*** que definió al principio. De acuerdo con Jamie *'la definición de conjunto generador es ... que éste puede contener un número mínimo de elementos, tales que ... para cualquier combinación lineal de esos elementos puede encontrar cualquier número en ... espacio vectorial **V**... puede encontrar cualquier **v** que pertenece a una **V** grande'*. Posteriormente Jamie hizo hincapié en que ella estaba hablando acerca de uno entre varios conjuntos generadores que existen. En sus últimos enunciados dio la impresión de que estaba hablando teniendo en mente matrices. Reaccionando al *Dibujo* trazó 'las direcciones ***x*** y ***y***' y afirmó *'para ser un conjunto generador, éste debe ser una combinación lineal de cualquier punto en el plano'* y que *'ese plano puede ser generado por (1, 0), (0, 1) debido a que son linealmente independientes'*. Entonces *'que estos dos vectores generan el plano. Ellos son generadores del plano'*.

En los estudiantes mencionados arriba, consciente, semiconsciente o inconscientemente dieron la impresión de mantener una imagen conceptual de un conjunto generador que es al mismo tiempo linealmente independiente, es decir, que son base del espacio vectorial en cuestión. Ninguno de ellos ofreció ejemplos de un conjunto generador que generaba el espacio vectorial en cuestión pero que no fuera linealmente independiente. Además, la definición dada en las clases de <*S*> como el subespacio más pequeño de *V* que contiene a ***S*** pareció suprimirse por los estudiantes por un situación de olvido e inercia. En cambio, la definición de <*S*> como un conjunto de una combinación lineal de los elementos de S prevaleció y dio la impresión de cohabitar armoniosamente con los ejemplos de conjunto generador (bases) que los estudiantes utilizaron comúnmente. Mi impresión durante las entrevistas fue que los estudiantes no se dieron cuenta de la particularidad de los ejemplos que usaron ni de su imagen conceptual respecto a que un conjunto generador tiene inconscientemente mezclado el de una base. Puedo afirmar que esta impresión no tiene que ver con la concepción de los estudiantes de las definiciones de un conjunto generador y una base sino de sus imágenes conceptuales (esto es el conjunto de asociaciones al nombre de un concepto incluyendo representaciones visuales, experiencias e impresiones del concepto –como define Shlomo Vinner). Es interesante observar el conflicto cognitivo que se puede generar en el caso de que el estudiante confronte una yuxtaposición de conjuntos generadores que son bases y conjuntos generadores que no lo son.

C. Conjunto generador como una base: una interpretación del fenómeno

Conceptualmente la noción de conjunto generador es un concepto de soporte a la noción de una base. Utilicé el término de Bruner (1962) 'soporte' extendiendo su noción didáctica para incluir la construcción epistemológica del concepto de base como una particularización del concepto de conjunto generador. En sí mismos los conjuntos generadores no son particularmente interesantes como lo son las bases: buscar una base involucra buscar el mínimo número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial. Esto es claramente muy significativo en los casos en que una infinidad de vectores se pueden expresar en términos de un número finito de ellos. Así, por ejemplo, en el plano, puesto que dos vectores son suficientes para generar una expresión para todo vector, la noción general de conjunto generador es vista por el estudiante como redundante y, en lo que pudo ser visto, como una actitud de minimización sustituida por la más especifica noción de base. Así, si dos vectores pueden generar una expresión para cualquier vector en el plano, la posibilidad de hablar acerca de conjuntos generadores utilizando más de dos vectores se descarta por redundante. Uno se admira de cómo la opción de los estudiantes de dos elementos para el plano fue coincidentemente correcta (ésta no hubiera sido si Robert, por ejemplo, hubiera seleccionado (1 2) y (4 8) en lugar de (4 3) o hubiera existido un relación tácita de independencia lineal).

D. Conjunto generador como una base: una implicación didáctica

Una base es un conjunto generador que es también linealmente independiente. Sin embargo, la noción de base parece ser más inmediatamente entendible, comprensible, asimilada y puesta en uso por los principiantes. Un enfoque didáctico que respeta el orden preferido por los principiantes podría requerir el evitar la perplejidad cognitiva que la mayoría de los principiantes deben enfrentar en su primer encuentro con la noción de conjunto generador. Las respuestas al concepto de conjunto generador de los estudiantes que participaron en este estudio constituye alguna evidencia: su primer ıcuentro con los conjuntos generadores y espacios generados en las clases resultaron n un entendimiento complicado y perplejo. Unas pocas semanas más tarde, en las ntrevistas, se observó que una gran parte de las imágenes conceptuales de los estu-iantes sobre conjuntos generadores es ocupada por las bases. Un reordenamiento di-ıáctico de los conceptos puede facilitarlos evitando la perplejidad inicial como la ubsecuente potencial inconformidad de compartir una imagen conceptual no equiva-ente entre los conjuntos generadores y las bases.

E. Algunos hallazgos del material de las entrevistas del análisis de conjunto generador desde la perspectiva de las observaciones 1 y 3. Incluyendo aquellos dentro de todo el marco analítico del estudio

Como se mencionó anteriormente, en este artículo se presentaron algunos resultados del análisis del material de las entrevistas de este estudio sobre espacios generados y conjuntos generadores. El análisis de este material ha resultado en la construcción de tres principales Observaciones/Hipótesis/Implicaciones Didácticas, una de las cuales, la Observación/Hipótesis/Implicación Didáctica 2, se ha elaborado hasta aquí. La presentación motiva e ilustra el proceso teórico fundamentado en los datos que caracterizan a este estudio: esta es la razón por la que los hallazgos se han presentado gradualmente desde las palabras expresadas por los estudiantes como base de su explicación, hasta la articulación teórica del fenómeno observado en su comportamiento, una posible interpretación y una sugerencia didáctica. Este enfoque, resaltado por el propósito de cubrir un amplio rango de temas matemáticos y procesos cognitivos, refleja la estructura del estudio como un todo. Antes de terminar me referiré en forma general a algunos hallazgos de las Observaciones/Conjeturas/Implicaciones Didácticas 1 y 3 y de cómo los hallazgos del análisis del material de las entrevistas sobre generación de espacios y conjuntos generadores están inmersas en el Proceso de Análisis de Datos del estudio.

Una breve referencia a la Observación/Conjetura/Implicación Didáctica 1. Los principiantes recurrieron preferentemente a utilizar un $\boldsymbol{R}^2$ como contexto de su discurso sobre espacios generados y conjuntos generadores. Esto frecuentemente resultó en el uso del plano en donde los vectores se toman como objetos caracterizados por las propiedades de la Geometría Euclidiana. La imagen conceptual de un vector es una versión modificada en donde surgen la noción de un par ordenado de coordenadas $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ y la expresión $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ surge. Puntos y vectores del plano se convierten en conceptos cargados con ambigüedad, como se observa en el siguiente párrafo de las palabras de un estudiante en esas entrevistas. El estudiante está explicando qué es el espacio generado por los vectores (1 0) y (0 1):

> *'Ah. El espacio generado ... (1, 0), (0, 1) ... Pienso que son un espacio por sí mismos... porque son sólo dos puntos. Em, ... así no es necesario encontrar una combinación lineal de er, ... vectores que hagan estos puntos porque ... existe solo uno para cada uno.'*

Ocasionalmente se observó que el uso de imágenes era totalmente inapropiado, puesto que las características de un contexto en particular se mezclan y se adjuntan a un todo que sus partes son difícilmente distinguibles (Nardi, 1994b).

Más aún, existe algo de evidencia con respecto a la motivación de los estudiantes cuando usaron ejemplos para hablar en forma general acerca de espacios generados o conjuntos generadores: daba la impresión de que no emanaba de una genuina creencia en la vívida representatividad del ejemplo, como una reflexión de sus ideas abstractas sino como un mecanismo que se les obligaba a usar debido a que no eran capaces de formalizar o a que el ejemplo estaba aún fresco para recordar de las clases y no necesariamente correcto. En estas entrevistas hubo solo un alumno que contestó las preguntas con facilidad para ilustrar las ideas y un alto grado de formalismo. Esta estudiante no utilizó ningún ejemplo ni recurrió a la imaginación visual. La única ocasión en que lo hizo fue hacia el final de la entrevista debido a que no pudo reproducir con facilidad una prueba formal para una de las propiedades de $<S>$. Se suscitó entonces la pregunta, considerando el uso ocasional de la imaginación inapropiada citada anteriormente, siendo que esta estudiante había alcanzado un grado de abstracción considerable, ¿hizo esto a pesar o debido a que abandonó algunos usos específicos de la imaginación?

Una posible relación entre la Observación/Conjetura/Implicación Didáctica 1 y 2. Considerando la breve referencia a la Observación 1 y la siguiente a la Observación 2 en las Partes A-D, una posible relación comienza a emerger: ¿Los estudiantes se refieren exclusivamente a un R^2, como un contexto ejemplificador de su imagen persistente de los estudiantes del conjunto generador para R^2, como consistir de '*sólo dos vectores*', podría ser razonable inferir que esta imagen influye en su imagen de un conjunto generador con la de un espacio vectorial en general.

Una Breve Referencia a la Observación/Conjetura/Implicación Didáctica 3. En estas entrevistas se ha proporcionado cierta evidencia de que existe una confusión gramatical en los términos *espacio generado* y *conjunto generador.* Esto no necesariamente refleja una confusión conceptual profunda. En algunas ocasiones las descripciones de los conceptos dados por los estudiantes que confundieron los términos, no fueron menos exitosas comparadas con las de aquellos estudiantes que no confundieron los términos. Esto hace aparecer la cuestión de que en realidad la perplejidad semántica no siempre necesariamente refleja una profunda cognición perpleja. Un caso extremo de esto ocurrió en aquellas entrevistas cuando los estudiantes, quienes a lo largo de toda su presentación mantuvieron los términos a veces en su lugar correcto y a veces reemplazando uno por otro. Extrañamente, este estudiante no falló al proporcionar definiciones formales casi perfectamente aceptables de espacio generado y de conjunto generador sin importar que se refirió a espacios generados como conjunto generador o viceversa.

Incluyendo el análisis del material de las entrevistas de espacios generados y conjuntos generadores en el proceso del análisis de los datos del estudio. Cuando se escribió este artículo, tanto la Entrevista como el Material Tutorial estaban todavía en un proceso de transformación intensa y el objetivo del análisis se estaba también formando. Dado que, el Material de la Entrevista se enfoca más sobre las metas de los estudiantes que sobre la introducción de un número de conceptos nuevos (aspectos típicos de la cognición de los matemáticos principiantes), mientras que el Material Tutorial, y en mayor medida el Material Episódico, se centra en la evolución de la cognición de los principiantes en el periodo de observación (cruzamiento de los aspectos temáticos/psicológicos); el análisis de lo anterior ha cambiado los análisis de éste último. En este sentido, observaciones tales como las elaboradas en este artículo sobre el nuevo concepto introductorio de Espacio Generado y Conjunto Generador se han usado como las partes que constituyen un micro-discurso de la cognición del matemático principiante, el cual alimenta el macro-discurso de este estudio. Este macro-discurso describe la Construcción y Formalización de Imágenes Conceptuales como un fenómeno de dos características en el Encuentro de Principiantes con la Abstracción Matemática. Desde la perspectiva de este discurso, entonces, los Datos y el Análisis presentados en este artículo ofrecen el sabor de los puntos de arranque del análisis. Publicaciones futuras de partes de este estudio posiblemente se referirán a cómo evolucionó el estudio desde el punto en el que estaba al momento de escribir este artículo.

Bibliografía

BALCHEFF N (1990) Perspectivas futuras para la investigación en la psicología de la educación en matemáticas. En el Grupo Internacional Kilpatrick J., Nesher P., para la psicología de la educación en matemáticas. *Matemáticas y Cognición: una síntesis de investigación por el Grupo Internacional para la Psicología de la Educación en Matemáticas.* Capítulo 7: 135-148. Cambridge University Press, Reino Unido.

BRUNER J. (1979) En el aprendizaje de las matemáticas. *En el conocimiento.* Belknap Press of Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, USA. 97-111.

CURTIS B y MAYS W (1978) (eds) *Fenomenología y Educación,* Methuen, Londres.

GLASER B G & STRAUSS A L (1967). *El Descubrimiento de Teorías Cimentadas: estrategias para una Investigación Cualitativa.* Nueva York, Aldine de Gruyter.

GLASERSFELD VON E (1987) Aprendizaje como una Actividad Constructiva en JANVIER, C (ed) *Problemas en la Representación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

NARDI E (1994a) Casos Patológicos del Entendimiento de las Matemáticas. *Procedimientos de la 18 Conferencia Anual de Psicología en Educación Matemática.* Lisboa, Portugal.

---------(1994b) Visualización y Simbolización: Breves Pensamientos acerca de la Inapropiedad Ocasional de Imágenes. En el suplemento de los *Procedimientos citados arriba.*

---------(1995) Encuentro de Matemáticos Principiantes con la Abstracción Matemática: El Caso de Acumulación de Puntos. *Procedimientos de Conferencia Europea de Investigación en la Psicología de Educación en Matemáticas.* Osnabrück, Alemania.

---------(1996) Tensiones en la Inducción de Matemáticos Principiantes a la Abstracción Matemática. *Procedimientos de la 20 Conferencia Anual de Psicología en Educación en Matemáticas,* Valencia, España.

TALL D (1991) La Psicología del Pensamiento Matemático Avanzado. Capítulo I en TALL D (ed) *Pensamiento Matemático Avanzado,* Kluwer Academic Publishers.

---------y **VINNER S.** (1981) Imagen conceptual y definición conceptual en matemáticas con referencia particular a límites y continuidad. *Estudios Educaciones en Matemáticas* **12**: 151-169.

VYGOTSKY L S (1962) *Pensamiento y Lenguaje,* Cambridge MIT Press.

Reconocimientos:

Agradezco calurosamente a mi supervisor Dr. Bárbara Jaworski por la fructífera discusión de la primera versión de este artículo.