Los indivisibles de Cavalieri: una perspectiva plausible para el aprendizaje del cálculo de volúmenes

Resumen

En la enseñanza escolarizada los sólidos aparecen en el nivel básico, incluso las fórmulas correspondientes para calcular el volumen y la superficie, en particular, de algunos prismas, de algunas pirámides, del cilindro, del cono y de la esfera. Después de este primer acercamiento, es hasta el curso de Cálculo Integral, en el bachillerato, que los sólidos vuelven aparecer, para calcular sus volúmenes, con la nueva herramienta que proporciona este curso, que de paso sirve para justificar aquellas fórmulas que ocurrían en la primaria. El propósito de este escrito es presentar un acercamiento intermedio entre los dos mencionados, que corresponde a una etapa anterior a la invención del Cálculo por Newton y Leibniz, así como en la evolución del concepto de integral, ya que este último concepto es el utilizado en el bachillerato. Por lo tanto, a partir de la concepción de indivisible de Cavalieri y su plausibilidad a través de una pila de tarjetas, se genera un acercamiento que permite aceptar el *Principio de Cavalieri*, con el cual se encontrarán dichos volúmenes. Finalmente, esta propuesta se ubica en el bachillerato

Abstract During the educational period, solids appear at basic level and so do formulae for calculating volumes and surfaces, particulary from some prismads, pyramids, from the cylinder, the cone and the sphere. After this first aproximation, the solids don't appear again until the Integral Calculus subject at high school, which by the way help to justify those formulae that came about during elementary school. The aim of the present article is to confer an intermediate approach between the two mentioned before that match with the previous stage to the Newton and Leibniz's Calculus invention, as well as the evolution of the integral concept aprofitated while in high school. Therefore, beginning with Cavalieri's indivisible conception and its plausibily through a bunch of cards, it might be possible to generate an approach which allows us to accept *Cavalieri's Principle*, where these volumes may be found. Finally, the present proposal might be useful during high school.

Gonzalo Zubieta B.
CINVESTAV,
México, D.F.

Introducción

De todas las obras conocidas de Arquímedes, la singular es *El método*, puesto que en ella nos ilustra la manera en que él obtenía resultados, desconocidos en su época. Citemos un fragmento del prefacio, donde Arquímedes le comunica a Eratóstenes lo siguiente: "...la peculiaridad de un cierto método, por el cual es posible que usted investigue algunos de los problemas en matemáticas por medio de la mecánica. Este procedimiento es, yo estoy persuadido, no menos útil aún para la prueba de los teoremas mismos; puesto que ciertas cosas son más claras para mí por un método mecánico, aunque ellas debieran ser demostradas por la geometría posteriormente, ya que su investigación por el método dicho no proporciona una demostración. Pero es desde luego más fácil, cuando previamente hemos adquirido por el método algún conocimiento del asunto, para suministrar la prueba, que hallarla sin ningún conocimiento previo." [Great books of the western world, Vol. 11; 1978; págs. 569-570].

Es decir, Arquímedes reconocía como valioso, contar con algún procedimiento heurístico que le permitiera hallar resultados, para posteriormente suministrar la demostración, esto es, validar el resultado, acorde con los criterios y reglas de la matemática de su época. Esta posición de Arquímedes acerca de la producción de conocimiento y su validación, ceñida a los criterios y reglas de la matemática en un momento determinado es, en relación a la tarea de la epistemología de las ciencias, revisitada por el *Empirismo lógico,* a principios de este siglo, donde denomina a la "producción de conocimiento" *contexto de descubrimiento* y a la "validación" de dicho conocimiento, *contexto de justificación*. Sin embargo, esto contraría uno de los postulados epistemológicos de Piaget, que parafraseándolo dice: *los criterios de justificación no pueden ser independientes de la naturaleza de los "objetos" de los que se habla en una teoría.* [Piaget y García; 1989; pág. 9].

Para el aprendizaje, que es nuestro interés, los acercamientos que podamos realizar, esto es, en el proceso de construcción del conocimiento existe validación, aunque no con todas las exigencias de los criterios y reglas de la matemática actual, pero tampoco tan ajena a esta última, ya que en el caso que presentaremos, fue una etapa en su desarrollo.

Antecedentes

Todos hemos tenido en nuestras manos una pila de tarjetas rectangulares (por ejemplo, una baraja), si las ponemos sobre una mesa, de manera que estén una sobre otra coincidiendo, dan el aspecto de formar un prisma rectangular recto. Ahora, si movemos esta pila y a la vez giramos las tarjetas, cambiamos el aspecto del sólido anterior, formando uno nuevo. Intuitivamente nos convencemos de que los volúmenes de ambos sólidos son iguales por estar formados por las mismas tarjetas; en esta transformación no hemos alterado los componentes individuales que forman a ambos sólidos (Fig. 1):

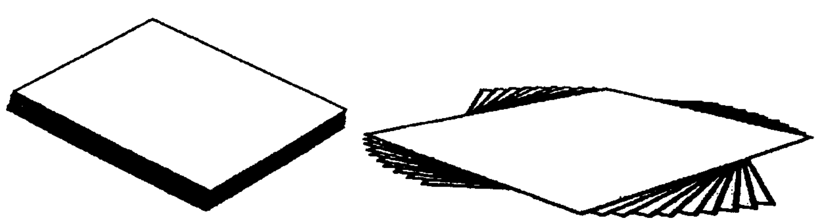

Figura 1

La palabra *indivisible* proviene de Demócrito y desde entonces muchos matemáticos la han utilizado, entre ellos Arquímedes y Bonaventura Cavalieri (1598-1647). El libro que hizo famoso a Cavalieri entre los matemáticos fue *Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, que en lo que sigue lo referiremos como *Geometría.* Citemos una fuente secundaria [Andersen,1985, págs. 300-301]:

III.I. La primera definición en el libro II de *Geometría* introduce el concepto de "todas las líneas" (omnes lineae):

> Si a través de tangentes opuestas a una figura plana dada, dos planos paralelos e indefinidamente se producen planos, ya sea perpendiculares o inclinados al plano de la figura dada, y si uno de los planos paralelos es movido hacia el otro, permaneciendo aún paralelo a él, hasta que coincida con él, entonces las líneas únicas las cuales durante el movimiento forman las intersecciones entre el plano móvil y la figura dada, juntas todas, son llamadas todas las líneas de la figura, tomada una de ellas como *regula*; esto cuando los planos son perpendiculares a la figura dada. Cuando, sin embargo, los planos son inclinados a la figura las líneas son llamadas todas las líneas de la misma figura dada con respecto a un tránsito oblícuo (*obliqui transitus*), la *regula* siendo igualmente una de ellas.

Cavalieri agrega que cuando el plano móvil es perpendicular a la figura dada "todas las líneas" pueden ser caracterizadas como *recti transitus.*

El concepto importante en la teoría de Cavalieri acerca de figuras planas es exactamente el de "todas las líneas" *recti transitus*, las cuales el también llama los indivisibles de una figura dada (*Geometría*, p. 114: "*indivisibilia. s. omnes lineas figurae*").

Vamos a considerar una figura plana como $F = ABC$ en la figura III.1 y sea la línea BC la *regula* determinando una dirección en el plano de F. "Todas las líneas"pertenecientes a F, tomando BC como *regula*, constituyen el conjunto de cuerdas en F paralelas a BC. Es útil tener una notación para este conjunto y yo elijo el símbolo $O_F(l)_{BC}$ (O de omnes). Si no hay duda acerca de la *regula*, el símbolo $O_F(l)$ será usado. Además, yo encuentro conveniente emplear el término colección de líneas de F en lugar de "todas las líneas".

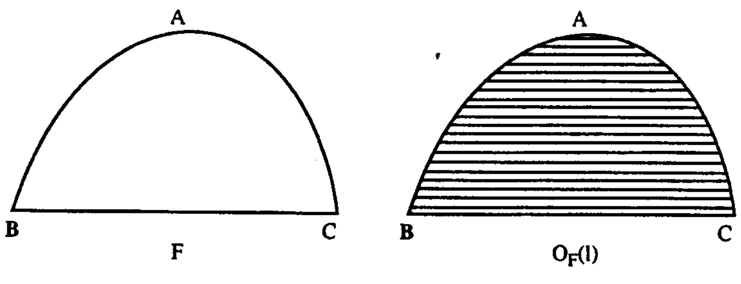

Figura III.1

En forma análoga a la cita anterior, si en lugar de una figura plana tenemos un sólido, podemos considerar un plano, como *regula*, que a partir de la base del sólido se desplaza, manteniéndose siempre paralelo a la base e intersecta al sólido dado en una infinidad de figuras planas paralelas.

Es decir, una figura plana la estamos considerando como formada por una infinidad de segmentos de recta paralelos; análogamente, un sólido lo consideraremos como formado por una infinidad de figuras planas paralelas.

A continuación enunciamos el *Principio de Cavalieri* para sólidos, que es lo que utilizaremos para todo lo que sigue:

Principio de Cavalieri

Si dos sólidos tienen la misma altura, estando sus bases sobre un mismo plano y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas, están siempre en la ***misma razón****, entonces los volúmenes de los dos sólidos están en esa* ***misma razón****.*

Debido a la discusión anterior, que antecede a la formulación del *Principio de Cavalieri*, aceptaremos como válido dicho principio, sin proporcionar ninguna demostración acorde a los criterios y reglas de la matemática actual, puesto que nuestro interés es mostrar que con una noción intuitiva con ***significado*** para el estudiante es posible que acepte el principio enunciado, como algo más natural, que fundamentarlo por medio de criterios y reglas que poco le dicen al estudiante de bachillerato.

Prismas

Suponemos que el estudiante sabe como calcular el volumen del prisma rectangular recto, esto es, área de la base por altura. Si no lo supiera, se le auxilia para que obtenga dicha fórmula.

A continuación, se ilustra como obtener el volumen de un cilindro oblícuo, de base circular y altura dada. Para ello, se construirá un prisma rectangular recto, que tenga su base en el mismo plano en la que está la base del cilindro y además, que su altura sea la del cilindro, porque es otra de las condiciones mencionadas en el principio de Cavalieri (Fig. 2):

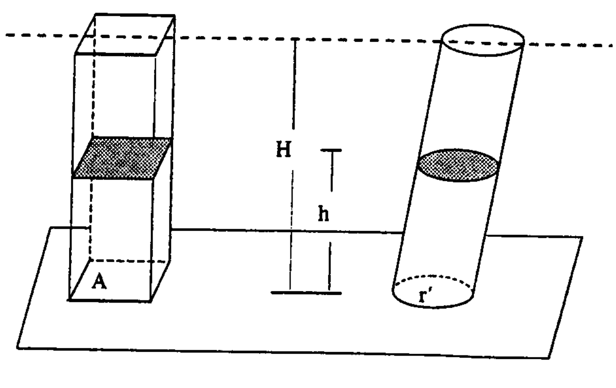

Figura 2

Los datos son:

PRISMA RECTANGULAR RECTO: área de la base $= A$, altura $= H$

CILINDRO CIRCULAR OBLÍCUO: área de la base $= r^2$, altura $= H$

VOLUMEN DEL PRISMA $= AH$

Ahora, consideramos un plano paralelo al de las bases a una distancia h (obsérvese en la Fig. 2, en particular en el prisma rectangular, que la figura sombreada es congruente con la figura que es la base del prisma. Análogamente, para el cilindro, la figura sombreada que aparece es congruente a la figura que es la base del cilindro) intersectando a ambos sólidos en las figuras sombreadas correspondientes, teniéndose:

$$\text{Área sombreada en el prisma} = A$$
$$\text{Área sombreada en el cilindro} = r^2$$

Como $A/\pi r^2$ = constante, utilizando el Principio de Cavalieri se tiene:

$$\frac{\text{Volumen del prisma}}{\text{volumen del cilindro}} = \frac{AH}{\text{volumen del cilindro}} = \frac{A}{\pi r^2}$$

$$\text{de donde, Volumen del cilindro} = \pi r^2 \text{H}$$

En forma análoga se calcula el volumen de cualquier otro prisma.

Pirámides

Mientras que para el prisma cada vez que lo intersectamos por un plano paralelo a la base, la intersección es una figura plana ***congruente*** a la figura representada por la base, para el caso de las pirámides, cuando el plano que la intersecta es paralelo a la base, dicha intersección es una figura plana ***semejante*** a la figura que representa la base de la pirámide. Por lo tanto, un primer resultado que debemos tener presente en esta sección es el siguiente:

Dada una pirámide de base triangular, si la intersectamos por un plano paralelo a la base, la figura resultante es semejante a la base. Aquí el profesor debe ayudar a sus estudiantes para verificar la semejanza, puesto que los triángulos considerados no están en el mismo plano sino que están en planos paralelos, lo que les ocasiona una dificultad adicional. Habiendo resuelto este caso, se pasaría a una pirámide de base poligonal, la cual puede reducirse al caso anterior, previa triangulación del polígono representado por la base.

El otro resultado importante para lo que sigue es: si dos polígonos son semejantes, *el cociente de sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.* Es decir, el profesor deberá cerciorarse de que sus estudiantes conocen este resultado, si no es así, tendría que trabajar con ellos para que lo comprendieran. Una dificultad que aparece es la semejanza de polígonos, ya que para los triángulos la semejanza se sigue de la congruencia de ángulos correspondientes en ambos triángulos, mientras que para polígonos no es así, por ejemplo, un cuadrado y un rectángulo (largo y ancho distintos) tienen ángulos congruentes, sin embargo, *no son semejantes.*

Finalmente, veamos que el volumen de una pirámide triangular es un tercio del área de la base por la altura. Para ello, consideremos la Fig. 3:

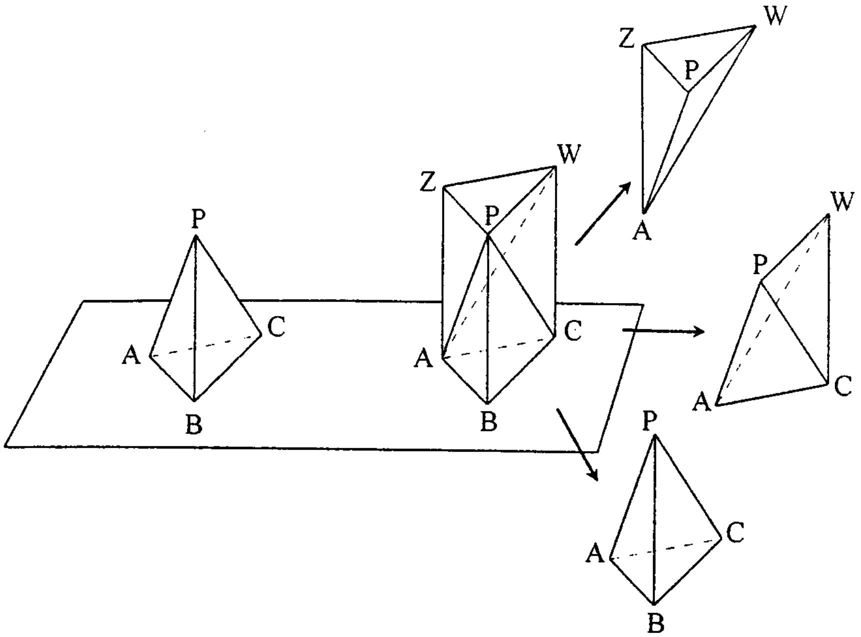

Figura 3

A la izquierda, la pirámide dada P-ABC; a su derecha el prisma triangular ABCZPW, que comparte tres caras de la pirámide dada, en particular, una de ellas la base ABC. Veamos cómo se construye este prisma a partir de la pirámide dada:

En el plano determinado por la cara PBC se traza por P una paralela a BC y por C, una paralela a BP, intersectándose estas rectas en W, es decir, BCWP es un paralelogramo que está en el plano BCP. En forma análoga, si consideramos el plano determinado por la cara PBA, en el, completamos el paralelogramo PBAZ, al trazar por P y A, paralelas a las aristas BA y BP, respectivamente. Uniendo los puntos Z y W, por medio de un segmento, completamos el prisma ABCZPW.

Ahora, en el extremo derecho de la Fig. 3, aparecen las tres pirámides triangulares en que se secciona el prisma ABCZPW. Nuestro propósito en lo que sigue es argumentar a favor de que estas tres pirámides tienen el mismo volumen y por lo tanto, el volumen del prisma es tres veces el volumen de una cualesquiera de estas tres pirámides, veámoslo:

Las pirámides P-AWZ y P-ACW tienen sus bases congruentes, ya que AW es una diagonal del paralelogramo ACWZ y por lo tanto, los dos triángulos que determina dicha diagonal sabemos que son congruentes; además ambas pirámides tienen la misma altura, ya que es la distancia de P al plano determinado por el paralelogramo ACWZ.

También las pirámides A-PWZ y P-ABC tienen sus bases congruentes, debido a que PWZ y ABC son caras opuestas del prisma; además, su altura es la misma porque es la altura del prisma, es decir, la distancia entre caras situadas en planos paralelos.

Ahora, en una pirámide triangular de altura H, si se traza un plano paralelo a la base a una distancia h (h menor que H) intersectando a la pirámide en un triángulo T, semejante al triángulo que representa a la base, resulta (por el segundo comentario, al inicio de esta sección) que:

$$(\text{área del triángulo } T)/(\text{área de la base}) = [(H - h)/H]^2$$

lo que nos permite afirmar:

Si dos pirámides triangulares, colocadas en un mismo plano, tienen bases congruentes y la misma altura, al intersectarlas con un plano paralelo a las bases (menor que su altura), resultan los triángulos T y Q, respectivamente, que cumplen:

$$\text{área del triángulo } T = \text{área del triángulo } Q$$

es decir, si aplicamos el principio de Cavalieri a estas dos pirámides, obtenemos:

$$\frac{\text{Volumen de una pirámide}}{\text{Volumen de la otra pirámide}} = \frac{\text{área del triángulo } T}{\text{área del triángulo } Q} = 1$$

lo que nos muestra que ambas pirámides tienen el mismo volumen.

Habiamos encontrado que el prisma construido ABCZPW quedaba seccionado por las pirámides: P-ABC, A-PWZ y P-ACW. Las dos primeras y las dos últimas tienen bases congruentes y la misma altura, respectivamente, por lo cual, al considerar el resultado anterior, podemos decir que tienen el mismo volumen, de donde obtenemos lo anunciado:

$$3(\text{Volumen de P-ABC}) = \text{Volumen del prisma}$$

$$\text{Volumen de P - ABC} = \frac{1}{3}(\text{área del triángulo ABC})\ (\text{altura})$$

Una aclaración es pertinente: en la conclusión del principio de Cavalieri se tiene el cociente de los volúmenes de dos sólidos igualado a una constante, por lo que, en nuestro caso de pirámides, era necesario conocer el volumen de una pirámide particular, para poder calcular el volumen del otro sólido.

Habiendo establecido los resultados básicos de esta sección, ilustraremos cómo calcular el volumen de un cono circular, utilizando el principio de Cavalieri:
En este caso los datos son:

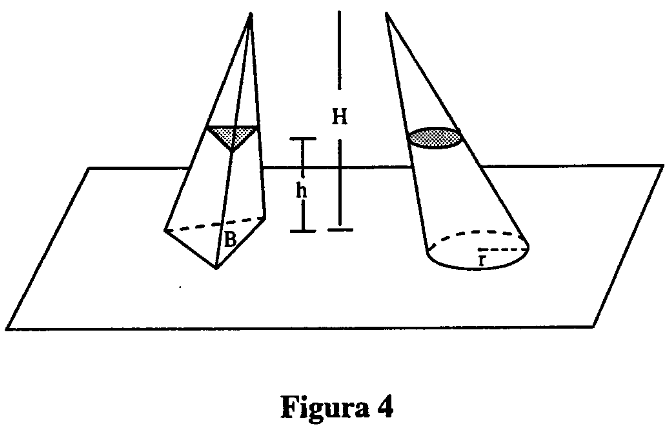

Figura 4

$$\text{PIRÁMIDE TRIANGULAR: área de la base} = B, \text{ altura} = H$$

$$\text{CONO CIRCULAR: área de la base} = \pi r^2 \text{ altura} = H$$

$$\text{VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE TRIANGULAR} = (1/3)\, BH$$

Ahora, al trazar un plano paralelo a las bases a una distancia h, obtenemos las intersecciones correspondientes a pirámide y cono, sombreadas en la Fig. 4. Al aplicar el primer enunciado de esta sección, a la pirámide y luego al cono, obtenemos:

$$(\text{Área sombreada en la pirámide})/B = [(H - h)/H)]^2$$

$$\text{Área sombreada en la pirámide} = B[(H - h)/H]^2$$

$$(\text{Área sombreada en el cono})/(\pi r^2) = [(H - h)/H]^2$$

$$\text{Área sombreada en el cono} = \pi r^2 [(H - h)/H]^2 \text{ y como}$$

$$(\text{área sombreada en la pirámide})/(\text{área sombreada en el cono}) = \text{const.}$$

siendo esta constante igual a: $B/\pi r^2$.

Finalmente, por el principio de Cavalieri, tenemos:

$$\frac{\text{Volumen de una pirámide}}{\text{Volumen del cono}} = \frac{1/3\, BH}{\text{Vol. del cono}} = \frac{B}{\pi r^2}.$$

es decir: Volumen del cono

Como puede apreciarse, la diferencia entre prismas y pirámides al utilizar el Principio de Cavalieri, radica en la comparación de los indivisibles, correspondientes a la intersección de un plano paralelo a las bases con los sólidos considerados, que en el primer caso, da lugar a emplear figuras congruentes, mientras que en el segundo, dá lugar a considerar figuras semejantes.

Por otro lado, el mencionado Principio se utiliza en situaciones más espectaculares, como es la que ilustramos a continuación:

Se trata de calcular el volumen de una esfera. Para ello, consideramos un hemisferio, esto es, la tapa superior del cilindro es el círculo máximo del hemisferio y además, el centro del círculo correspondiente a la tapa inferior del cilindro, también es un punto del hemisferio (Fig. 5, izquierda). Si trazamos un plano paralelo a las bases del cilindro, este plano intersecta al cilindro y al hemisferio en dos círculos concéntricos que determinan un anillo. Si el plano mencionado va de menor a mayor altura, el área del anillo cambia de mayor a menor. En los extremos, esto es, si la altura es cero, el área es la del círculo que corresponde a la base inferior del cilindro, mientras que si la altura es r, es decir, la altura del cilindro, el área del anillo es cero. Esto último sugiere, que el área del anillo se comporta como la sección transversal de un cono recto de base circular, congruente a la base del cilindro y altura, la misma que la del cilindro (Fig. 5, derecha).

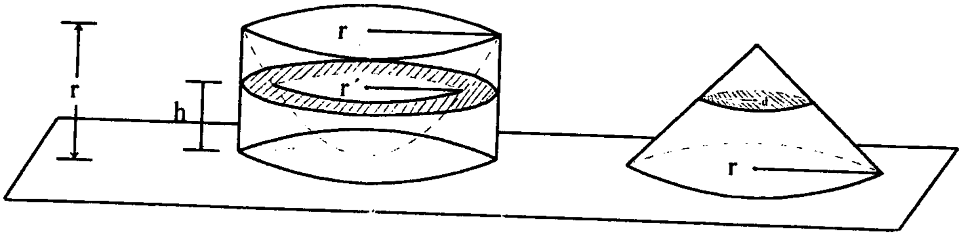

Figura 5

Trazamos un plano paralelo a las bases de cilindro y cono a una distancia h de las bases. Al cilindro lo intersecta en un círculo de radio r y al hemisferio en un círculo concéntrico al anterior, de radio r'; al cono lo intersecta en un círculo de radio d. Además, $(r')^2 = r^2 - (r - h)^2$ y $d = r - h$, por lo tanto

$$\text{Area sombreada del anillo} = \pi r^2 - \pi (r')^2 = \pi (r - h)^2$$

pero esta última expresión también representa al área sombreada en el cono, por lo tanto, el cociente de las áreas sombreadas es 1, de donde, por el Principio de Cavalieri, tenemos:

$$[(\text{Volumen del cilindro})\text{-}(\text{Volumen del hemisferio})]/\text{Vol. del cono} = 1$$

$$\text{Volumen del hemisferio} = \pi r^3 - (1 / 3)\, \pi r^3, \text{ por lo tanto}$$

$$\text{Volumen de la esfera} = (4/3)\, \pi r^3.$$

Coda

Quisieramos dejar claro que la sugerencia de este escrito es para Profesores que trabajan en el Bachillerato, en cursos anteriores al de Cálculo, sin embargo, podría utilizarse al inicio de este curso. Nuestro énfasis está puesto en la noción de indivisible, muy adecuadamente representado por una tarjeta de una pila de tarjetas, que es un objeto familiar para el estudiante. A partir de ello, el Principio de Cavalieri adquiere plausibilidad para que el estudiante lo acepte, llevándolo a un contexto de congruencia, para el caso de prismas y de semejanza cuando se trata de pirámides. Es decir, en este contexto de prismas y pirámides, aparece de modo natural la congruencia y la semejanza, y no como un tema más de un programa. Sería conveniente utilizar material didáctico concreto, por ejemplo, una cuerda suficientemente larga, para ilustrar la construcción del prisma triangular, esto es, sus aristas, si utilizamos la cuerda, a partir de una pirámide dada, asi como obtener las tres pirámides que conforman al prisma.

Por otro lado, la introducción es de importancia para el Profesor, ya que con frecuencia está más preocupado por los criterios y reglas de la matemática, actual, que por el aprendizaje de sus estudiantes, debido en gran parte a la influencia del Formalismo, que en este nivel de enseñanza poco sentido tiene para el estudiante. Esto es, consideramos más trascendente el mostrar la vinculación de la matemática con el entorno que rodea al estudiante, que presentar una matemática sistematizada para que el estudiante la aprecie, cuando no tiene los elementos para ello.

Finalmente, presentar una etapa en la evolución de un concepto, es no olvidar su componente humana, tan presente en todo su desarrollo. En el caso del indivisible que dio lugar al infinitesimal en una época posterior, en la persona Roverbal [González, P.M.; 1992; pág. 121].

Bibliografía

Andersen, Kirsti; (1985); "*Cavalieri's Method of indivisibles*"; Germany: Springer-Verlag; Archive for History of exact Sciences, Vol. 31, # 4.

Arquímedes; (1978); "*The method*"; U.S.A.: ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA, INC. Great Books of the Western World, Vol. 11.

González, Pedro Miguel; (1992); "*Las raíces del Cálculo infinitesimal en el siglo XVII*"; Madrid, España: Alianza Universidad.

Piaget, J. y García, R.; (1989); "*Psicogénesis e Historia de la Ciencia*"; México, D.F.: Siglo XXI Editores.