

La Actividad Demostrativa en Básica Secundaria Un Ejemplo De Análisis.

*Cristina Bolívar S., crisbol_2002@hotmail.com
Mayerly Andrea Martín B., mandram@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional*

1. Introducción

La comunicación que queremos socializar se deriva del avance de nuestro trabajo de grado sobre la actividad demostrativa en educación básica secundaria, mediada por el uso de un programa de geometría dinámica. El proyecto se centra en caracterizar la actividad matemática que llevan a cabo grupos de estudiantes de grado noveno, del Instituto Pedagógico Nacional, cuando se enfrentan a una tarea en la que tienen que formular una conjetura y demostrarla, haciendo uso de un conjunto de enunciados geométricos estudiados en clase. Pretendemos aportar elementos a la solución de la problemática del aprendizaje de la demostración, asunto que es objeto de discusión en la comunidad de investigadores en educación matemática (Mariotti, 1997; Healy y Hoyles, 1998; Sánchez, 2003; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006), entre otros y, que es preocupación constante en nuestra práctica como profesoras de matemáticas.

Para llevar a cabo el proyecto, diseñamos un conjunto de problemas encaminados a que los estudiantes identificaran propiedades comunes al rectángulo y al trapecio isósceles. Estos problemas fueron propuestos a dos grupos de tres estudiantes en cuatro sesiones de trabajo de dos horas cada una, que se realizaron en horario extra-clase. Los dos grupos disponían de un computador portátil con el software Cabri y de un listado de postulados, definiciones y teoremas que les fue entregado al comenzar la primera sesión. La dinámica seguida combinó: trabajo en grupo sin ayuda de la profesora, trabajo en grupo con intervención de la profesora, discusión entre los estudiantes con intervenciones ocasionales de la profesora y puesta en común dirigida por la profesora.

Cada sesión fue grabada y se dispone del video y del audio del trabajo del grupo y de las puestas en común. Al finalizar la implementación de la experiencia, se realizó la transcripción de los archivos de audio y video, para su posterior análisis. En esta comunicación queremos mostrar un avance de la manera en que hemos llevado a cabo el análisis de los fragmentos de interacción, centrando la atención en aspectos relevantes que hay que tener en cuenta cuando se usan como datos investigativos las conversaciones

espontáneas de los estudiantes en el curso de la realización de una tarea propuesta. Hemos dividido la comunicación en tres partes. Inicialmente presentamos algunos referentes teóricos básicos, después describimos el proceso de organización y reducción de la información que condujo desde la transcripción de las interacciones hasta la constitución de fragmentos para analizar y finalmente ilustramos con un ejemplo el tipo de análisis que hemos realizado.

2. Marco de referencia

El referente teórico principal de nuestro trabajo es la “actividad demostrativa” definida por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) como un constructo que abarca más que la elaboración de una demostración formal pues es una actividad que apunta al aprovechamiento de la justificación como recurso para la comprensión de ideas geométricas y a la adquisición de herramientas para la comunicación de éstas y para su validación. Es decir, que para poder realizar una autentica actividad demostrativa las acciones deben ir dirigidas a desarrollar procesos tales como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, que son las que permiten movilizar el razonamiento hacia la búsqueda de la validación, dar significado a la tarea de argumentar para aceptar afirmaciones y proveerse de elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones; además, se deben considerar las acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones matemáticas. Desde nuestro punto de vista, es posible acercar significativamente a estudiantes de secundaria a la demostración si ellos participan de manera genuina en acciones asociadas a dicha actividad.

Uno de los aspectos relevantes que se constituye en objeto de análisis de quienes se ocupan del aprendizaje de la demostración es el papel que juegan las definiciones en la actividad demostrativa. Reflexiones hechas por autores como Vinner (1991) y Dreyfus (1990) destacan que aprender de memoria una definición no garantiza comprender su significado y muchos menos su uso en la producción de demostraciones, por lo que los estudiantes tendrán dificultades a la hora de hacer uso de éstas dentro de una cadena de argumentos. Destacan la necesidad de incluir el análisis de las definiciones en el marco de la resolución de problemas en el momento en el que los objetos geométricos que se van a definir se vuelven parte indispensable de la argumentación. Efectivamente, en el curso de nuestra investigación encontramos en los registros de las dos primeras sesiones de trabajo una

intensa discusión acerca de las definiciones de rectángulo, cuadrado y trapecio dado que las conjeturas formuladas por los estudiantes hacían referencia a dichos objetos. Incluso, pese a haber acordado como definición de rectángulo que éste es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y cuatro ángulos rectos, al momento de justificar una conjetura, un estudiante quiso usar como dado que dos lados opuestos de un rectángulo eran congruentes. Esto condujo a revisar la definición y establecer qué propiedades explícitas en ella se podían tomar como antecedentes de los pasos de la justificación.

3. Descripción del proceso de organización y reducción de la información

A partir de la transcripción de las interacciones de las sesiones de trabajo llevamos a cabo un proceso metodológico de organización y reducción de la información que describimos a continuación.

- Eliminamos aquellas intervenciones no relevantes para el análisis porque hacían referencia a asuntos ajenos a la actividad demostrativa o porque eran demasiado confusas y nos era imposible reconstruir el sentido de lo dicho.
- Hicimos anotaciones para complementar las intervenciones de tal suerte que el mensaje dicho quedara más claro. Por ejemplo, mejoramos con información que agregamos en paréntesis cuadrados la siguiente intervención de un estudiante: “si cojo estas y mi zeta, ósea que se me forma este y este...”; escribimos exactamente a qué objetos hacía referencia, observando el video para incluir los nombres. La intervención quedó entonces así: “si cojo estas [segmentos AD y BC] y mi zeta [figura formada por los segmentos AD, DB y BC], ósea que se me forma este [ángulo ADB] y este [ángulo DBC]”.
- Dividimos las transcripciones de cada sección en fragmentos teniendo en cuenta la acción de la actividad demostrativa que estaban realizando. Así, obtuvimos un conjunto de fragmentos clasificados según la acción de explorar, formular conjeturas, verificar, definir, explicar, probar o demostrar, según el caso.
- Contextualizamos cada fragmento escribiendo un encabezado que permitiera a cualquier lector ubicarse en la actividad que estaban realizando los estudiantes y comprendiera la interacción comunicativa que se llevaba a cabo sin necesidad de leer todos los fragmentos.

- Propusimos una descripción general de cada fragmento indicando la acción de la actividad demostrativa que se llevaba a cabo y algunas ideas en torno al rol de los estudiantes y de la profesora.
- Llevamos a cabo una interpretación y análisis de la interacción en cada fragmento, comenzando con una descripción de los sucesos, sobre todo de aquellos no tan fáciles de comprender debido al contexto o a la forma de comunicarse de los estudiantes. Dado que una de las autoras de este trabajo es la profesora de los estudiantes y la otra estuvo presente en la experimentación, como observadora no participante, disponíamos de información adicional para hacer la interpretación. Además de la descripción, hicimos un análisis de la actividad demostrativa que llevaban a cabo los estudiantes, apoyadas en los referentes proporcionados por el marco teórico.

En la *figura 1* se muestra el esquema usado para el análisis de los fragmentos en torno a la acción de la actividad demostrativa que se desarrollaba en un momento dado.

CONTEXTUALIZACIÓN			
NUMERACIÓN DE LAS INTERVENCIONES	NOMBRE DE LOS PARTICIPANTES EN CADA INTERVENCIÓN	TRANSCRIPCIÓN DE LAS INTERVENCIONES LÍNEA POR LÍNEA.	DESCRIPCIÓN GENERAL
INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS			

Figura 1

4. Un ejemplo de análisis

A continuación presentamos un ejemplo de los análisis que hemos realizado hasta el momento. El fragmento es tomado de la segunda sesión. Los estudiantes estaban investigando qué tipo de cuadrilátero permitía afirmar lo siguiente: “si el cuadrilátero $ABCD$ es un _____ entonces la intersección de sus diagonales es vértice de dos triángulos isósceles”. Cada mesa de trabajo había construido un rectángulo, ya que habían conjeturado que este cuadrilátero satisfacía la afirmación. Habían etiquetado los vértices

con las letras A, B, C y D, respectivamente, y trazado sus diagonales. También habían nombrando el punto de intersección entre ellas con la letra E (*figura 2*),

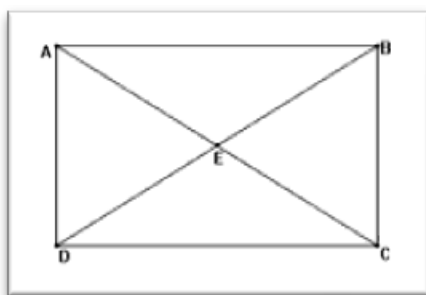


Figura 2

El fragmento que se presenta a continuación recoge la interacción entre los estudiantes con intervención de la profesora, en el momento en el que creen haber demostrado que los ángulos ADE y CBE son congruentes, así como los ángulos DAE y BCE. Deciden justificar que los segmentos AD y BC son congruentes para poder afirmar que los triángulos AED y BEC son congruentes. Esto porque han desviado el interés por demostrar que los triángulos son isósceles y se concentran en mirar que son congruentes. En el curso de la justificación de la conjetura, un estudiante pretende hacer uso de propiedades del rectángulo no incluidas en la definición de rectángulo que había sido construida en consenso por todos los integrantes del grupo.

458 Diego: Pero falta mirar que los lados [de los triángulos] son congruentes.

459 Jordan: ¡Ah!... pero falta.

460 Nathaly: Faltan los segmentos [AD y BC].

461 Diego: Los segmentos son congruentes.

[...]

465 Jordan: [...] [El segmento] BC es congruente a [el segmento] AD, por definición de rectángulo.

[...]

469 Profesora: ¿Sí? Y, ¿dónde dijimos en la definición de rectángulos qué dos [lados opuestos] son congruentes?

470 Jordan: ¡Ah, no!, eso era el trapecio [isósceles].

471 Nathaly: Sí, los [lados] paralelos son congruentes.

- 472 Profesora: Pero eso no lo dijimos en la definición que construimos.
- 473 Jordan: No.
- 474 Nathaly: ¿y por qué?
- 475 Jordan: ¡Ah!
- 476 Profesora: Y como la definición es esa, no la podemos usar así. Tocaría demostrarlo. [...]
[...]
- 492 Profesora: Miren [el criterio] ALA; si fuera ALA, necesitaríamos un [par de] lado [lados congruentes].
- 493 Jordan: ¡Ah!
[...]
- 495 Jordan: ALA... yo ya lo tengo.
[Los estudiantes observan las construcciones de su respectiva mesa de trabajo. Luego se retoma la socialización entre todos los integrantes].
- 497 Jordan: Eh..., uhm... Profe, cuando uno traza las...
- 498 Profesora: ¿Señor?
- 499 Jordan: ¿Al trazar las diagonales en un cuadrilátero, entonces, ósea, la intersección de estas es el punto medio, de este segmento [de cada diagonal]?
- 500 Profesora: [...] Puede que sí sea cierto, pero [...] todo lo que no conozcamos en este momento habría que demostrarlo, solamente podemos jugar con lo que tenemos.
[...]
- 503 Jordan: Pues es que yo se que sí, con lo que tenemos.

Diego, Jordan y Nathaly caen en cuenta de que deben afirmar que tienen un par de lados congruentes [458 - 461], afirmación en la que se centra la argumentación desarrollada en este fragmento. Jordan comienza por señalar que el segmento BC es congruente con el segmento AD justificando la afirmación con la definición de rectángulo [465]. La profesora interviene preguntándoles si realmente pueden asegurar la congruencia recurriendo a la definición de rectángulo que se ha construido en consenso [469]. Nathaly insiste en que los lados paralelos del rectángulo son congruentes [471], quizás con base en la visualización de la figura o en la imagen conceptual que posee, por lo que parece no comprender por qué no se puede usar esta información en la justificación [474]. La

profesora recurre a la norma establecida al comenzar la experiencia recordándoles que sólo pueden afirmar propiedades del rectángulo que estén explícitas en la definición que ellos adoptaron [476]; por lo tanto, deben buscar cómo justificar la congruencia de los segmentos AD y BC. Propone revisar el criterio de congruencia ALA, haciendo ver a los estudiantes que hace falta verificar la congruencia de un par de lados para poder aplicarlo [492]. Por tal motivo, Jordan, (probablemente buscando una alternativa que le permita encontrar un lado), pregunta si se puede afirmar que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan en su punto medio [499]. La profesora insiste en que todo lo que se afirme y no se haya establecido o definido anteriormente debe ser demostrado para poder ser usado [500]; pero a pesar de la aclaración, Jordan insiste en la certeza de dicho hecho [503].

El fragmento ilustra dos aspectos problemáticos de la actividad demostrativa que están muy relacionados. De un lado, el papel que juegan las definiciones en la producción de una justificación. A pesar de haber acordado una definición de rectángulo, a la hora de usarla como garante de una afirmación, los estudiantes recurren al conocimiento común que tienen del rectángulo y sus propiedades, y no a la definición, ignorando el funcionamiento de un paso deductivo. Es decir, los estudiantes asumen la definición como una descripción y no como una expresión bicondicional que sirve de puente entre unos datos y una conclusión que se quiere obtener. A lo largo de la interacción, Jordan parece entender a qué se refiere la profesora cuando les explica que sólo deben usar las propiedades incluidas en la definición de rectángulo. En cambio Nathaly se muestra confundida al respecto e insiste en preguntar por qué no pueden afirmar que los lados paralelos de un rectángulo son congruentes. De otro lado, la negociación de la norma de usar en las justificaciones sólo afirmaciones que ya se tengan de antemano, es otro aspecto que genera dificultades a los estudiantes. En el fragmento, como Jordan ha entendido que no se puede valer de la definición de rectángulo para afirmar la congruencia de dos segmentos, recurre a una propiedad del rectángulo reconocida visualmente, pero no demostrada: las diagonales se bisecan. Nuevamente viola la norma establecida y la profesora debe insistir en ella.

Desde nuestro punto de vista, aunque los estudiantes logran sintetizar los hallazgos relevantes alrededor de la demostración de la congruencia de triángulos que quieren establecer, es necesaria la guía de la profesora cuando buscan las justificaciones de lo que desean afirmar. Ella centra su papel en enfocarlos sobre los objetos relevantes para la demostración y también los ubica cuando recurren a argumentos que no son validos dentro

de una argumentación deductiva, insistiendo en la norma. Parece que Jordan entiende mejor las reglas del juego y se ve un avance en la actividad demostrativa que realiza con respecto al resto de los estudiantes. A pesar de que aún utiliza afirmaciones que no se han demostrado, recurre a la generalización y a hacer uso de sus conocimientos previos. Es probable que un trabajo más sistemático y prolongado en ese sentido le permita a él y a otros estudiantes entrar en el mundo teórico de la geometría tempranamente.

5. Reflexión final

Nuestra comunicación hace referencia a un trabajo en curso por lo que más que conclusiones hacemos unas reflexiones finales al respecto relacionadas con la actividad investigativa que estamos llevando a cabo y con la posibilidad de impulsar en educación secundaria la actividad demostrativa.

Con relación a nuestra actividad investigativa vemos que:

- Las diferentes etapas del análisis han hecho que tengamos que desarrollar unos ojos muy analíticos, para poder seleccionar los fragmentos, reducirlos para destacar solo lo relevante de estos, relacionarlos con los diferentes procesos de la actividad demostrativa, y sintetizarlos de manera que destaquen aspectos que no lo son sin una mirada minuciosa.
- En lo transcurrido del análisis de la transcripción de la actividad realizada por los estudiantes, se puede ver que hemos podido articular el marco teórico con lo que se ha desarrollado del trabajo. Esto nos anima a seguir analizando los fragmentos por esta vía.
- En el momento de realizar las transcripciones y hacer los análisis hemos tenido dificultades debidas al desorden de los estudiantes al expresar sus ideas o al no concluir las. Ellos tienden a elaborar frases incompletas y quizás, el afán de terminar rápido ocasionaba que los procesos se cortaran. Hemos aprendido que, en la planeación de futuros trabajos hay que insistir en el esfuerzo especial que debe hacer el conductor de las interacciones, así sea el profesor, por lograr una mejor comunicación.

Con relación a la actividad demostrativa de los estudiantes:

- Se evidencia que con algunas pautas y guía del profesor es posible impulsar la actividad demostrativa en bachillerato.

- Los estudiantes deben involucrarse de manera genuina en la actividad demostrativa, interactuando constructivamente, teniendo en cuenta los aportes no solo del profesor sino también de los compañeros.

Bibliografía

- Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En NESHER, P. y KILPATRICK, J. (Ed), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133).Cambridge: Cambridge University Press.
- Healy, L. y Hoyles, C. (1998). Student's performance in proving: competence or curriculum?, *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1, (págs. 153 – 167). Osnabrück.
- Mariotti, M. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (págs.21-26). Prague: Prometheus Publishing House
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación matemática*, 15 (2), 27-53.
- Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. En D. Tall (Ed.): Advanced Mathematical Thinking.