La Demostración en Matemáticas Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria

Resumen

Se describe buena parte de las demostraciones matemáticas que figuran en los currículos de Enseñanza Secundaria tanto desde el punto de vista científico (verificación, sistematización) como desde el didáctico (medio de: explicación, descubrimiento y comunicación). Se propone una clasificación de las técnicas de demostración acompañadas de múltiples ejemplos. El trabajo termina con una muestra de resolución de problemas que ilustra el uso de todas las técnicas.

Abstract. The proof procedures commonly developed at Secondary School are described from the scientific (verification and systematization) and didactic (explanation, discovery and communication) view points. A proof classification is proposed, illustrated by many examples of each of the described techniques. The work ends up showing that proofs in problem solving make use of all of the described cases.

El presente trabajo forma parte de un proyecto más amplio en el que venimos trabajando desde que en el curso 1993-94 se realizó un test a alumnos del Curso de Capacitación Pedagógica. Después de que el profesor les mostró el teorema de Tales y su demostración en una transparencia, sin explicaciones adicionales, les pidió que respondieran si ellos creían que el teorema estaba realmente demostrado o, por el contrario, la prueba estaba mal o era incompleta. Se trataba de la demostración sintética dada por P. Puig Adam (1980), viendo que existe correspondencia en la igualdad, en el orden y en la suma de segmentos de una y otra recta.

Marcelino Ibañes y Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

España

Licenciaturas	Respuestas positivas	Respuestas negativas	Total
Economistas	9	6	15
Químicos y Biólogos	5	4	9
Ingenieros y Arquitectos	7	4	11
Físicos	13	14	27
Matemáticos	9	12	21
Respuestas totales	43	40	83

Tabla 1. *Test sobre la demostración del teorema de Tales.*

La transparencia estuvo expuesta, ininterrumpidamente, hasta que los alumnos estuvieron seguros de su respuesta y la emitieron. Los resultados fueron los que recoge la tabla adjunta y, a la vista de los mismos y de las explicaciones dadas por los alumnos, nos formulamos una serie de interrogantes a los que tratamos de dar respuesta:

> ¿Por qué buena parte de los alumnos licenciados, que han adquirido las técnicas de demostración matemática no reconocen la prueba de un teorema elemental?
>
> ¿Qué entienden los alumnos cuando el profesor les reproduce una demostración en la pizarra? ¿Siguen los razonamientos?
>
> ¿Son los alumnos conscientes de la existencia de múltiples técnicas de demostración y las conocen?
>
> Luis A. Santaló (1966) da una demostración del mismo teorema basada en el concepto de área, totalmente diferente, ¿habrían entendido mejor ésta?
>
> ¿Cómo y cuándo entienden los alumnos las demostraciones?
>
> ¿Cuando los profesores hacemos una demostración en la pizarra, indicamos la técnica que se va a utilizar y otras posibilidades probatorias?
>
> ¿Hasta qué punto demostrar es mejor que explicar, ejemplificar o comprobar?

Aún no tenemos respuesta para todas estas preguntas, pero estamos trabajando en ello. Se trata de una cuestión muy atractiva para analizar, tanto desde el punto de vista científico (verificación, sistematización) como del didáctico (medio de: explicación, descubrimiento y comunicación —véase [30]—) y entendemos que una clasificación de las demostraciones desde el punto de vista de la matemáticas, junto con la descripción de las técnicas de uso más frecuente en el ámbito de la Educación Secundaria, que es cuando los alumnos se inician en el razonamiento deductivo, constituye un primer paso en el estudio de este tema. Aunque se hacen algunas observaciones de tipo didáctico, como en el modo **analítico** o **indirecto** descrito en el apartado 5, la presentación sistemática de sugerencias para el proceso de enseñanza de las técnicas de demostración es excesiva aquí y se abordará posteriormente.

1. Propuesta de clasificación

Según el criterio que adoptemos, obtendremos diversas *etiquetas* para la demostración; así distinguiremos, en relación al enunciado del teorema, el TIPO; referente a la propia demostración, los MÉTODOS y ESTILOS; y, en lo que atañe a la exposición, el MODO:

- **TIPO, si atendemos a la estructura lógica del enunciado.**

  * En relación a la implicación:
    - De condición necesaria o suficiente
    - De condición necesaria y suficiente
  * En relación al cuantificador existencial:
    - No existencial
    - De existencia:
      - Simple
      - De imposibilidad
      - De unicidad

- **MÉTODO, si atendemos a los procedimientos lógicos.**

  - Por silogismo
  - Por casos
  - Por reducción al absurdo
  - Por inducción completa
  - Constructivo (ejemplo o contraejemplo)
  - Por analogía
  - Por dualidad

- **ESTILO, si atendemos a los procedimientos matemáticos.**

  - Geométrico
  - Algebraico
  - De las coordenadas
  - Vectorial
  - Del Análisis Matemático
  - Probabilístico
  - Topológico, etc.

- **MODO, si atendemos al procedimiento de exposición.**

  - Sintético o directo
  - Analítico o indirecto

A continuación desarrollamos cada una de estas etiquetas, con ejemplos de demostraciones que pueden proponerse en la Enseñanza Secundaria, bien en teoremas o en el marco de la resolución de problemas.

2. Tipos

2.1. Aclaración

Todo teorema matemático comprende al menos una implicación, aunque, a veces, no aparece explícitamente en el enunciado. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. El enunciado "$\sqrt{2}$ es irracional" en realidad significa "Si x es un número real positivo que verifica $x^2 = 2$, entonces x es irracional".

Ejemplo 2. El teorema "todo múltiplo de 4 es par", se puede enunciar: "Para todo número, la propiedad de ser múltiplo de 4 implica la propiedad de ser par".

Ejemplo 3. Si decimos: "existen números trascendentes", lo que estamos asegurando es que "si $A = \{ z \in C \ / \ z$ no es raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros$\}$, entonces A no es vacío".

2.2. La implicación

Si $p \Rightarrow q$ se dice que q es una **condición necesaria** para que se verifique p, y que p es una **condición suficiente** para que se verifique q.

Si $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$, se escribe $p \Leftrightarrow q$ y se dice que la **condición necesaria y suficiente** para que se verifique p es q (y recíprocamente).

Por lo tanto, $p \Rightarrow q$ es la estructura lógica del enunciado de los teoremas de condición necesaria o suficiente, y $p \Leftrightarrow q$ es la correspondiente a la condición necesaria y suficiente.

Ejemplo 1. La propiedad de los determinantes "si dos filas (o columnas) son iguales el determinante es cero", nos permite enunciar un teorema de condición necesaria: "Es condición necesaria para que un determinante tenga dos filas o dos columnas iguales que su valor sea cero", y otro de condición suficiente: "Es condición suficiente para que un determinante sea nulo que tenga dos filas o dos columnas iguales"; ambos enunciados responden a la estructura lógica $p \Rightarrow q$, siendo p la proposición "un determinante tiene dos filas (o columnas) iguales" y q "el valor del determinante es cero".

Ejemplo 2. El hecho de que "toda función derivable es continua", nos permite enunciar un teorema de condición necesaria: "para que una función sea derivable es necesario que sea continua", y otro de condición suficiente: "para que una función sea continua es suficiente que sea derivable"; ambos enunciados responden a la estructura lógica $p \Rightarrow q$, siendo p "la función es derivable" y q "la función es continua".

Generalmente una condición necesaria no es también suficiente. Por ejemplo para que un determinante tenga dos filas o columnas iguales, es necesario que sea nulo; pero que su valor sea cero no resulta suficiente para asegurar que tiene dos filas (o columnas) iguales. También, para que una función sea derivable es necesario que sea continua, pero el hecho de que sea continua no es razón suficiente para que sea derivable. Los siguientes teoremas son de condición necesaria y suficiente:

Ejemplo 3. "La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por tres es que la suma de sus cifras sea divisible por tres".

Ejemplo 4. "Es condición necesaria y suficiente para que una función derivable sea constante, que su derivada sea cero".

Ejemplo 5. "Una condición necesaria y suficiente para que los sucesos A y B sean independientes es que $p(A \cap B)=p(A) \cdot p(B)$".

2.3. El cuantificador existencial

Ya hemos hablado de enunciados que se refieren a la existencia de algún objeto matemático; se denominan **de existencia** y pueden escribirse utilizando el cuantificador existencial ($\exists$).

Según lo que prediquen de dicha existencia, los podemos clasificar en los siguientes casos:

De existencia simple. Son los que se limitan a asegurar la existencia.

Ejemplo 1. "Existen números trascendentes", "existen funciones continuas que no son derivables", el teorema de Rolle[1]: "Si f es continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en (a,b), y verifica $f(a) = f(b)$, entonces existe algún número x_0 del intervalo (a, b) para el que $f'(x_0) = 0$", el teorema del valor medio[2]: "Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe algún x_0 de (a,b) para el que $f(b) - f(a) = f'(x_0).(b-a)$", o el teorema fundamental del Álgebra[3]: "Toda ecuación polinómica (de grado > 0) con coeficientes reales o complejos tiene solución en el cuerpo de los números complejos", son enunciados de existencia simple.

---

[1] Ver pág. 223 de CHILOV, G. *Analyse Mathématique*. Mir. Moscú, 1973.

[2] Ver pág. 224 de CHILOV.

[3] Para distintas demostraciones ver: CARTAN, H. *Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas*. Madrid: Selecciones Científicas, 1968. (ver pág. 89). CHILOV, G. (ver pág. 164). KOSTRIKIN, A. I. *Introducción al Álgebra*. Moscú: Mir, 1980 (ver pág. 244).

De imposibilidad. Niegan la existencia.

Ejemplo 2. "$\sqrt{2}$ no puede expresarse de la forma *a/b*", "no existe cota superior del conjunto de los números primos", "si f es derivable en *(a,b)* y f' no se anula en (a, b), entonces no existen extremos relativos de f en *(a,b)*", o los famosos resultados de imposibilidad de la cuadratura del círculo[4] (con regla y compás), imposibilidad de resolver por radicales (en general) ecuaciones polinómicas de grado >4[5], o el último teorema de Fermat[6]: "la ecuación $x^n + y^n = z^n$, $x, y, z \in Z$, no tiene solución distinta de la trivial para $n>2$", son enunciados de imposibilidad.

De existencia y unicidad. Aseguran que el objeto al que se refieren, si existe, es único.

Ejemplo 3. "En un espacio vectorial, fijada una base, la representación de cualquier vector, respecto de dicha base, es única", "la inversa de una matriz, si existe, es única", el teorema fundamental de la Aritmética[7]: "Todo entero positivo (mayor que 1) se expresa de forma única como producto de potencias de números primos", "el límite de una función en un punto, si existe, es único", son enunciados de existencia y unicidad.

Dependiendo del procedimiento para probar la existencia, la demostración puede ser constructiva o no, pero de ello nos ocupamos en el apdo. 3.5.

2.4. El cuantificador universal

Los teoremas de condición necesaria, suficiente o necesaria y suficiente utilizan o pueden ser expresados, explícita o implícitamente, con el cuantificador universal ( ).

Ejemplo 1. Los ejemplos 1 y 2 del apdo. 2.2 pueden escribirse de la forma:
$\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$, siendo:

x = determinante / función
p = propiedad: tener dos filas(columnas) iguales / ser derivable
q = propiedad: ser nulo / ser continua

[4] Ver pág. 193 de: PUIG ADAM, P. *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Gómez Puig Ediciones, 1980.
[5] Ver pág. 74 de: ARTIN, E. *Teoría de Galois*. Barcelona. Vicens-Vives, 1970.
[6] GOLDSTEIN, C. La conjetura de Fermat es por fin un teorema. En *Mundo Científico*. nº160, vol. 15, 1995; págs. 777-778.
[7] Ver p. ej. KOSTRIKIN, pág. 55).

Ejemplo 2. El teorema "$\sqrt{2}$ es un número irracional", se puede renunciar: "Para todo número real positivo x, la propiedad de verificar $x^2 = 2$ implica la propiedad de ser irracional".

Ejemplo 3. Incluso los teoremas de existencia pueden escribirse con el cuantificador universal y la negación. Así, decir "existen funciones derivables que no son continuas", equivale a: "no es cierto que toda función continua sea derivable". Y asegurar que "existen números trascendentes", equivale a: "no es cierto que todo número complejo sea algebraico".

3. Métodos

3.1. Demostración por silogismo

Es el esquema de razonamiento matemático ordinario. Para demostrar H $\Rightarrow$ T, basta con probar H $\Rightarrow$ M y M $\Rightarrow$ T, siendo M una proposición intermedia que, frecuentemente, es una cadena de silogismos.

Ejemplo 1. Si A y B son dos sucesos independientes, entonces A y B' también son independientes:

Encadenamiento lógico y proposiciones intermedias	Proposiciones auxiliares
H: A y B independientes	
$\Downarrow$	
def.: $p(A \cap B) = p(A).p(B)$	
$\Downarrow$	A_1: $p(A \cap B') = p(A) - p(A \cap B)$
M_1: $p(A \cap B') = p(A) - p(A).p(B)$	
$\Downarrow$	A_2: Propiedad distributiva
M_2: $p(A \cap B') = p(A).(1 - p(B))$	
$\Downarrow$	A_3: $p(B') = 1 - p(B)$
$p(A \cap B') = p(A).p(B')$ def.:	
$\Downarrow$	
T: A y B' independientes	

Se observa, por un lado, que hemos empleado varias proposiciones intermedias y, por otro, proposiciones auxiliares, que son proposiciones verdaderas conocidas con anterioridad, y, sin las cuales, sería imposible avanzar.

Ejemplo 2. Para demostrar que el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto de coordenadas (A, B), siendo $A = -b / (2a)$ y $B = (4ac - b^2) / (4a)$, usamos la proposición intermedia consistente en escribir la ecuación de la parábola de la forma $y = a (x-A)^2 + B$.

El empleo de estas proposiciones auxiliares, normalmente resulta rutinario, pero en otras ocasiones son de gran dificultad y precisan mucho ingenio. Por ejemplo, GAUSS estudió[8] la posibilidad de construir con regla y compás polígonos de *n* lados, utilizando recursos, creados por él mismo, de la teoría de grupos, que por entonces aún no había sido desarrollada, y por lo tanto, estaban muy alejados de las estrategias matemáticas usuales.

3.2. Demostración por casos

Si $H=H_1 V H_2 V... VH_n$ es una tautología, para demostrar la proposición $H \Rightarrow T$, basta probar las implicaciones: "$H_1 \Rightarrow T$", "$H_2 \Rightarrow T$",..., "$H_n \Rightarrow T$"

Ejemplo 1. Para demostrar el teorema de Rolle, argumentamos:

H_1: f alcanza el máximo o el mínimo en el interior del intervalo $\Rightarrow$ T: f' se anula en un punto interior del intervalo.

H_2: f alcanza el máximo y el mínimo en los extremos $\Rightarrow$ T: f'es nula en todo el intervalo.

Ejemplo 2. Para demostrar que si $k > 0$, la relación $|x| \leq k$, es equivalente a $-k \leq x \leq k$, procedemos de la siguiente manera:

H_1: Si $x \geq 0$, la equivalencia es cierta: T

H_2: Si $x < 0$, la equivalencia es cierta: T

Ejemplo 3. Si queremos demostrar la desigualdad $\ln x \leq x/e$ $(x > 0)$, aplicamos el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$, distinguiendo los casos:

H_1: en el intervalo $[e, x] \Rightarrow$ T: $\ln x \leq x/e$.

H_2: en el intervalo $[x, e] \Rightarrow$ T: $\ln x \leq x/e$.

3.3. Demostración por reducción al absurdo

Se basa en el deseo de respetar la *consistencia* de las Matemáticas ("principio de no contradicción") y en el "principio del tercio excluso".

El esquema es éste: partiendo de un sistema consistente de premisas $\mathcal{P}$, se pretende establecer la validez de una conclusión C, y para ello introducimos como nueva premisa la proposición $\neg C$. Si con las reglas de inferencia se llegara a una contradicción $R \wedge \neg R$, forzosamente el nuevo sistema de premisas $\mathcal{P} \cup \{\neg C\}$ sería inconsistente, por lo que debemos admitir C.

---

8 Ver pág. 994 de KLINE, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial, 1992.

Parece[9] que fue usado por los pitagóricos para demostrar la irracionalidad de 2, y que fueron los eleatas[10] (S. V a.C.) quienes sentaron su base lógica y lo utilizaron en los célebres argumentos de Zenón, aunque hay quien piensa[11] que pudo ser Hipócrates de Chíos quien lo introdujo. También fue utilizado por Euclides, p.ej. para demostrar que hay infinitos números primos[12]. Sin embargo, no fue aceptado por los *matemáticos intuicionistas*, puesto que esta corriente niega la aplicabilidad del principio del tercio excluso[13].

Ejemplo 1. El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Suponemos que $\sqrt{2}$ es no-irracional = p/q (irreducible)

$\Downarrow$

p/q es reducible

(Contradicción)

$\Downarrow$

no - ($\sqrt{2}$ no-irracional)

(Principio de no contradicción)

$\Downarrow$

$\sqrt{2}$ es irracional:

(Principio del tercio excluso)

Ejemplo 2. Si fijamos una base en un espacio vectorial, entonces cualquier vector tiene una única representación.

Suponemos que un vector **a** tiene representación no-única

$\Downarrow$

Los vectores de la base son dependientes

(Contradicción)

$\Downarrow$

no- (**a** tiene representación no-única)

(P. de no contradicción)

$\Downarrow$

a tiene representación única

(P. del tercio excluso)

Ejemplo 3. El "método de exhaución".

Proviene de Eudoxo[14] y fue utilizado por Euclides y Arquímedes, aunque el término "exhaución" fue introducido en el S. XVII. Emplea una doble reducción al absurdo: para probar que el área de cierto recinto es S, demuestra, utilizando polígonos inscritos, que no puede ser menor que S; de la misma forma demuestra, utilizando polígonos circunscritos, que no puede ser mayor que S.

---

[9] Ver pág.45 de: REY PASTOR, J. y BABINI, J. *"Historia de la Matemática"*. Barcelona. Gedisa, 1984.
[10] Ver REY PASTOR y BABINI, pág. 50.
[11] Ver pág.99 de: BOYER, C. *"Historia de la Matemática"*. Madrid: Alianza, 1987.
[12] Ver proposición 20 del libro IX (pág. 412, vol. II) de: EUCLIDES. "The thirteen books of Euclid's elements" (edición de T. L. HEATH). New York: Dover, 1956.
[13] Ver DOU, pág. 125.
[14] Ver KLINE pág. 81.

Ejemplo 4. El método del "descenso infinito".

Es una demostración por reducción al absurdo, en la que la contradicción consiste en definir una sucesión infinita estrictamente decreciente, de números enteros positivos.

Fue así denominado por Fermat[15], y según él lo utilizó para demostrar algunas propiedades de la teoría de números, como por ejemplo el teorema[16]: "todo número primo de la forma $p = 4n + 1$, puede expresarse de forma única como la suma de dos cuadrados".

Sin embargo, este método ya fue utilizado por Euclides, que demuestra que "todo número compuesto es medido por algún número primo"[17] con arreglo al siguiente esquema:

Sea A un número compuesto

$\Downarrow$

Es medido por un número A_1, que si no es primo,
es medido por un número A_2, etc.

$\Downarrow$

Obtenemos así una sucesión estrictamente decreciente de divisores de A,
lo que es contradictorio en los números enteros positivos;
luego alguno de los divisores tiene que ser primo.

Un caso particular de la demostración por reducción al absurdo es la **demostración por contraposición**: si queremos demostrar $H \Rightarrow T$, suponemos $H \wedge \neg T$ y probamos el contrarrecíproco $(\neg T \rightarrow \neg H)$. Así se llega a la contradicción $H \wedge \neg H$.

Ejemplo 5. Si *a* y *b* son enteros positivos y su producto es impar, entonces ambos son impares.

Suponiendo que uno de ellos sea par, entonces llegamos a la conclusión de que el producto de ambos debe ser par, lo que contradice la hipótesis de que el producto es impar.

3.4. Método de inducción completa

Es un hecho bien conocido que matemáticos de distintas épocas han tratado de obtener fórmulas que proporcionen números primos. Una de ellas (estudiada por Euler) es $p(n) = n^2 + n + 41$[18], que sirve para los 39 primeros términos, pero falla para $n = 40$, lo que exige poner ciertos límites al pensamiento inductivo, que por otro lado es la fuente de la creación matemática, y llegar a un convenio:

---

[15] Ver pág. 445 de BOYER.

[16] Ver KLINE, pág. 275.

[17] Proposición 31 del libro VII de los Elementos. Ver pág. 332 de la versión citada.

[18] Ver pág. 8 de: SOMINSKI, I. S. *Método de inducción matemática.* Moscú: Mir; lecciones populares de matemáticas, 1975.

Aceptamos que una determinada propiedad P, referida a los números naturales, es cierta para todos ellos, si se verifican las siguientes dos condiciones:

1. P(1). "La propiedad es cierta para 1".

2. P (k) $\Rightarrow$ P (k + 1). "Si la propiedad es cierta para k, entonces también lo es para k + 1".

La razón es muy plausible: si admitimos P (1) y aplicamos la condición 2, obtenemos P (2), y volviendo a aplicar 2, obtenemos P (3) y luego p (4), etc.

Aunque el nombre procede de De Morgan (1838), había sido utilizado muy anteriormente, siendo Pascal (1654) uno de los primeros en aplicarlo con toda claridad.[19]

Ejemplo 1. La suma de los n primeros números naturales es S (n) = (n + 1) ·n / 2.

1. S (1) = 1 = (1 + 1) · 1/2, luego P (1).

2. Suponemos P (k), es decir S (k) = (k + 1) ·k/2 y a partir de aquí, se prueba que S (k + 1) = (k + 2) (k + 1) / 2, o sea P (k + 1).

Ejemplo 2. La fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

1. $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$

2. Suponemos que la relación se verifica para n = k:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}b^k$$

y como consecuencia se prueba que

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^{k}b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Ejemplo 3. A veces resulta conveniente utilizar la inducción de forma regresiva: Construir un triángulo equivalente en área a un polígono convexo (no necesariamente regular) dado.

La figura 3.1. muestra cómo puede pasarse de un polígono ABC... de *n* lados, a uno equivalente A'C... de *n-1* lados. En particular, el cuadrilátero ABCD tiene la misma área que el triángulo A´CD. Se ha efectuado una transformación topológica "estirando DC" y "presionando en B" hasta que BA' es paralelo a AC.

[19] Ver BOYER, pág. 457.

[20] Ver pág. 136 de CHILOV.

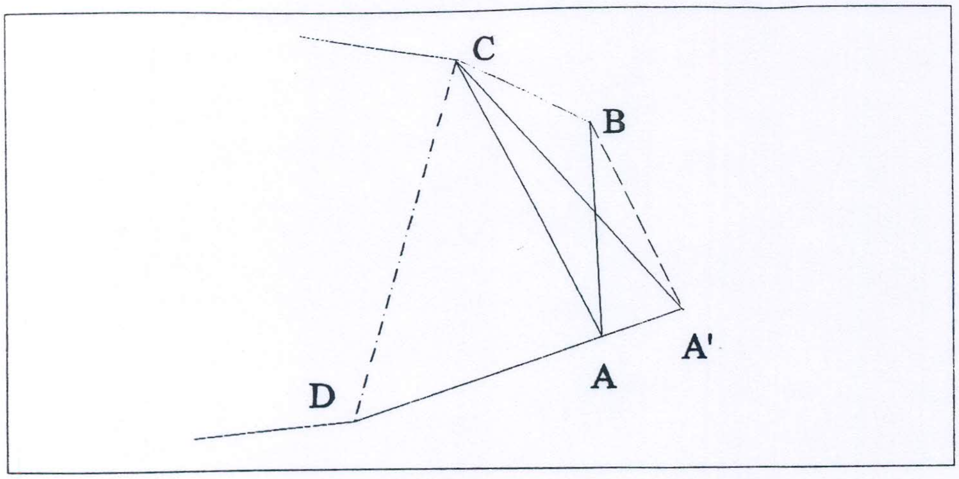


Figura 3.1

Ejemplo 4. La demostración del teorema de Bolzano, exige la utilización de varios métodos:

Suponemos que f (a) > 0 y f (b) < 0. Consideramos el punto medio m del segmento [a, b]:

Casos:

- f (m) = 0, que probaría el teorema.
- f (m) > 0, que significa que la función cambia de signo en el subintervalo [m, b].
- f (m) < 0, lo que implica que f cambia de signo en el intervalo [a, m].

Inducción completa:

Reiterando la subdivisión de los intervalos, obtenemos una sucesión de subintervalos encajados que tienen la propiedad de que, en sus extremos, la función f cambia de signo (lo que se demuestra por inducción completa).

Reducción al absurdo:

Aplicando el axioma de los intervalos encajados, nos aseguramos de la existencia de un único punto x_0 que pertenece a todos ellos. Se prueba, utilizando el método de reducción al absurdo, que precisamente f $(x_0) = 0$.

3.5. Método constructivo

Si nos piden probar la *existencia* de un determinado objeto matemático, el recurso más directo para ello es *construirlo*.

Ejemplo 1. La geometría de los griegos nos proporciona abundantes ejemplos de demostraciones constructivas. La misma proposición 1 del Libro I de los Elementos de Euclides[21] trata de "construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado".

[21] Ver pág. 241 de la edición citada.

Ejemplo 2. Para demostrar que existe una mínima distancia entre dos rectas que se cruzan, construimos los puntos sobre ambas rectas cuya distancia es mínima.

Ejemplo 3. Para demostrar que en un espacio vectorial de dimensión finita, un sistema libre, S, se puede completar con vectores de un sistema de generadores, G, hasta constituir una base: se van añadiendo vectores de G a S hasta obtener la base.

Pero no todas las demostraciones de existencia son constructivas; se limitan a asegurar la existencia de un objeto matemático, pero no lo muestran. Son demostraciones que guardan cierto paralelismo con algunos hallazgos teóricos en las Ciencias Experimentales: por ejemplo, en 1820.

Leverrier y Adams[22], basándose en las discrepancias entre las predicciones teóricas y las observaciones experimentales de la órbita de Urano, pronosticaron la existencia de otro planeta, calculando su masa y recorrido (más tarde, en 1846, se observó Neptuno en el lugar predicho).

Ejemplo 4. En los teoremas de Rolle y del valor medio, se nos pide demostrar la existencia de algún número real que verifica una determinada condición, pero las correspondientes demostraciones no son constructivas.

Ejemplo 5. Tampoco es constructiva la demostración de Cantor de "existencia de números trascendentes", puesto que consiste en probar que el conjunto de números algebraicos es numerable[23]. Sí son constructivas, en cambio, las demostraciones sobre este mismo hecho que dieron Liouville y Hermite (éste probó que *e* es trascendente)[24].

Ejemplo 6. Las demostraciones por reducción al absurdo son no constructivas; se encuentran en el polo opuesto: pueden demostrar que la no existencia de un determinado objeto matemático conduce a contradicción, pero no construyen dicho objeto.

Si el objeto construido no es genérico sino concreto, se habla de **ejemplo**.

Ejemplo 7. Una función continua en todo R salvo en los enteros.

Ejemplo 8. Una función continua en sólo un punto.

Y construimos las funciones concretas que cumplen los requisitos.

Un ejemplo que prueba la existencia de objetos que no verifican una propiedad, se denomina **contraejemplo**.

Ejemplo 9. Una función que no es integrable Darboux[25].

---

22 Ver pág. 116 de: SPIELBERG, N y ANDERSON, B. *Siete ideas que modificaron el mundo*. Madrid: Pirámide, 1990.

23 Ver KLINE pág.1314.

24 Ver KLINE págs.1294-5.

25 Ver pág 623 de E. Fischer.

La función f (x)- = $\begin{cases} 1 \; si \; x \in Q \cap [-1, 1] \\ -1 \; si \; x \in I \cap [-1, 1] \end{cases}$

Ejemplo 10. Para probar que no toda función continua es derivable, ponemos un ejemplo de una función que es continua, pero no derivable.

Los contraejemplos juegan un importante papel en la creación matemática, importancia que resaltan especialmente los filósofos que están en la órbita del *falsacionismo*. Como decía LAKATOS: *"La refutación nos hace aprender; la corroboración nos hace olvidar."*[26] Y de ello da una preciosa muestra en *"Pruebas y refutaciones"*.

La matemática intuicionista pone ciertas limitaciones al método constructivo, de manera que las construcciones deben constar de un número finito de pasos.

Ejemplo 11[27]. Sea z = 0,3333..., donde el número de veces que se repite el tres después de la coma lo determinamos así: si en la expresión decimal de π = 3,14159..., aparece por primera vez el conjunto consecutivo de cifras 0123456789, de modo que esa última cifra 9 ocupe el lugar k-ésimo, entonces sea k el número de treses. Un matemático clásico concluiría que z es un número racional; en efecto: o bien "existe" k, en cuyo caso $z = (10^k-1) / (3.10^k)$, o bien k no "existe", y entonces z = 1/3. Sin embargo el matemático intuicionista no admitiría este argumento, pues k no está debidamente construido.

Surge una cuestión interesante y polémica cuando el ordenador pasa de ser un mero instrumento para realizar cálculos, como ocurre en el Análisis Numérico, a formar parte en los procesos constructivos de las demostraciones, lo que sucede en las últimas pruebas que se han dado de problemas clásicos, como el de los cuatro colores o el último teorema de Fermat. El problema que se plantea es el de la verificación de los pasos dados por el ordenador, aumentando así, a juicio de algunos críticos, la falibilidad de las Matemáticas.

3.6. Demostraciones por analogía y por dualidad

El razonamiento por analogía consiste en **utilizar la semejanza en algunos aspectos entre dos teorías matemáticas, para deducir su semejanza en todos los aspectos**. Por lo tanto, en general, no puede ser considerado un método demostrativo, sino un valioso recurso creativo.

En la historia de las matemáticas hay numerosas muestras de abuso de este principio, en virtud del cual se consideraban generalizados teoremas, sin haber realizado la correspondiente demostración rigurosa. Por ejemplo, a lo largo del s. XIX fueron aceptados el *Principio de permanencia de la forma* de Peacock[28], por el que las propiedades de las operaciones en el *álgebra aritmética* (relativa a los enteros positivos) eran automáticamente extendidas al *álgebra simbólica* (que se refería a toda clase de números) y el *Principio de continuidad* de Poncelet[29] que dice:

---

26 Ver pág. 20: LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid. Alianza, 1981.
27 Ver DOU, pág. 121.
28 Ver KLINE pág. 1018.

"Si una figura es derivada de otra mediante un cambio continuo y la última es tan general como la anterior, entonces cualquier propiedad de la primera figura puede ser establecida inmediatamente para la segunda".

Sin embargo, se convierte en un método demostrativo cuando se puede probar que **la coincidencia en algunos aspectos implica necesariamente la coincidencia en todos**. Por ejemplo, el álgebra de conjuntos, la de las proposiciones lógicas, la de los sucesos y la de los circuitos eléctricos, coinciden todas ellas en cumplir los axiomas de Algebra de Boole[30] y por tanto tienen en común el resto de las propiedades. Esto quiere decir que si hemos probado una propiedad para una de ellas (o, en general, para el Algebra de Boole), podemos considerarla demostrada para las demás.

Ejemplo 1. La relación $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ entre conjuntos, implica la misma relación entre sucesos, o entre proposiciones lógicas: $p \vee q = (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$.

O en un ámbito completamente distinto:

Ejemplo 2. Probemos el teorema de Pitágoras por **analogía**[31]:

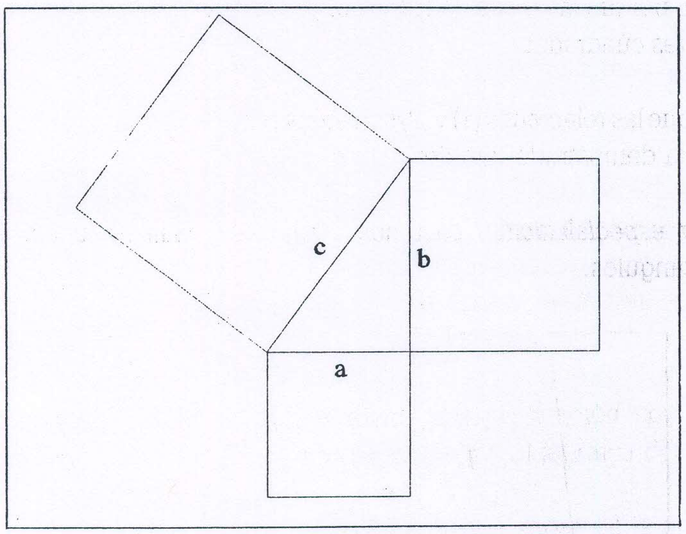


Figura 3.2

(1) $$a^2 + b^2 = c^2$$

[30] Ver pág. 29 de: KURATOWSKI, K. *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Barcelona. Vicens-Vives, 1973.

[31] Ver pág. 42 de: POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid. Tecnos, 1966.

Si *generalizamos* y construimos sobre los lados del triángulo otros polígonos semejantes entre sí, tendríamos:

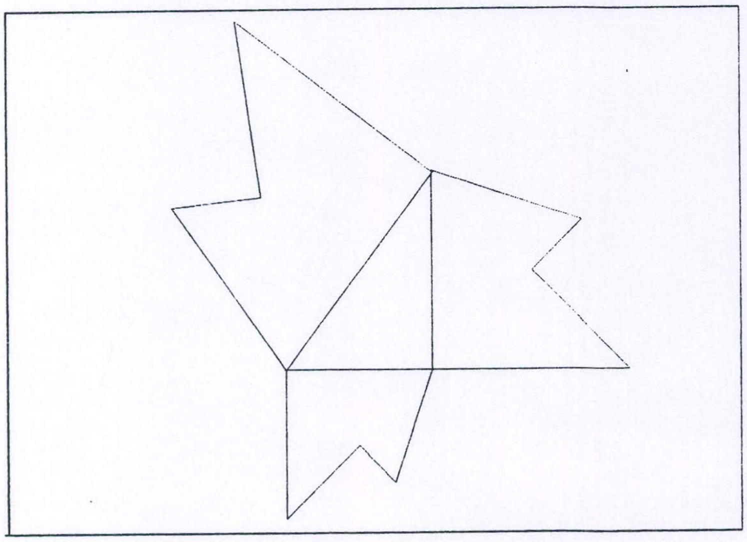


Figura 3.3

(2) $$k.a^2 + k.b^2 = k.c^2.$$

Esto es así, porque las áreas de estos polígonos son proporcionales a las áreas de los correspondientes cuadrados.

Está claro que las relaciones (1) y (2) son equivalentes, luego si probamos (2) para algún polígono, queda demostrado también (1).

Ahora, *por especialización*, pasamos a un caso *análogo* al inicial considerando triángulos rectángulos:

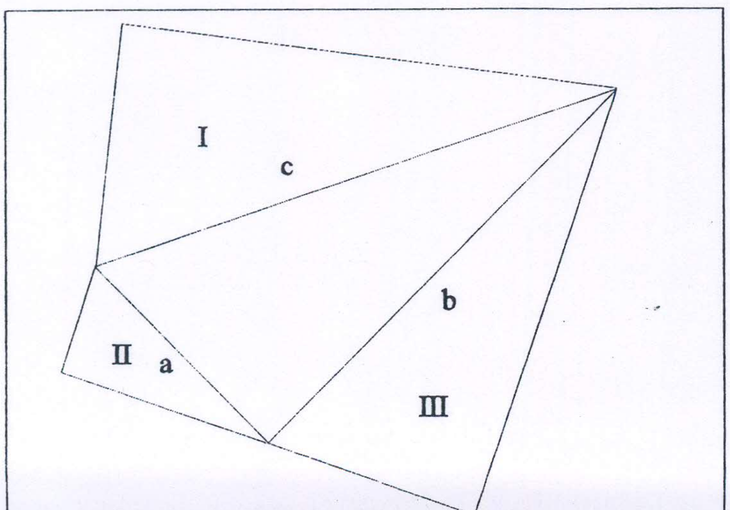


Figura 3.4

Pero para estos triángulos la relación (2) se hace evidente considerando la figura así:

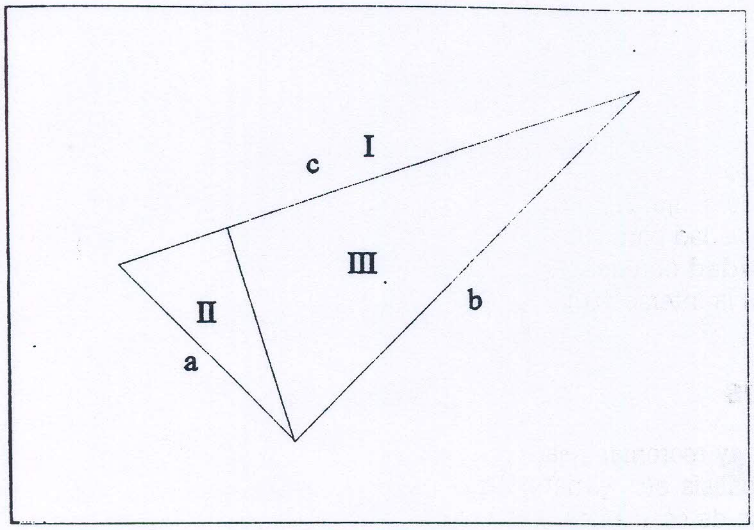


Figura 3.5

Aquí la analogía no ha sido sólamente un procedimiento **creativo**, sino también **demostrativo**, al quedar fundamentada por el hecho de ser las áreas de los polígonos semejantes entre sí, construidos sobre los lados, proporcionales a las correspondientes áreas de los cuadrados.

También fue Poncelet quien estableció el *Principio de dualidad* [32], según el cual si en un teorema de Geometría Proyectiva intercambiamos los términos "punto" y "recta", se obtiene otro teorema que también es cierto. Por ejemplo[33]:

TEOREMA DE PASCAL

Si los vértices de un exágono están alternativamente sobre dos rectas, los puntos en que se cortan los lados opuestos son colineales.

TEOREMA DE BRIANCHON

Si los lados de un exágono pasan alternativamente por dos puntos, las rectas que unen vértices opuestos son concurrentes.

Este principio fue aplicado sin que hubiera una explicación convincente, hasta que pocos años después Plücker[34] dió una demostración algebraica del mismo.

El principio de dualidad puede ser trasladado a otras áreas de la matemática, por ejemplo como puede verse en Yaglóm[35], si en una *desigualdad booleana* intercambiamos entre sí las dos operaciones, sus elementos neutros y el sentido de la desigualdad, entonces obtenemos una nueva desigualdad válida.

Ejemplo 3. De $A \cap B \subset A$, se deduce $A \cup B \supset A$.

[32] Ver KLINE pág.1117.
[33] Ver pág. 203 de COURANT, R y ROBINS, H. *¿Qué es la Matemática?* Madrid. Aguilar, 1971.
[34] Ver KLINE pág. 1130.
[35] Ver pág. 48 de: YAGLOM, I.M. *Álgebra extraordinaria*. Moscú. Mir, 1977.

Si simplemente consideramos como duales los sucesos A y B, el teorema del producto de probabilidades nos proporciona otro ejemplo:

Ejemplo 4. De $p(A \cap B) = p(A) .p(B/A)$, se deduce *por dualidad*, que también es $p(A \cap B) = p(B) .p (A/B)$, dualidad fundamentada en la propiedad conmutativa de la intersección de sucesos.

Ejemplo 5. De la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión en el álgebra de conjuntos: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, deducimos por **analogía** la misma propiedad para el álgebra de sucesos, o para el álgebra de proposiciones lógicas. Y por **dualidad** obtenemos las correspondientes propiedades distributivas de la unión respecto de la intersección.

4. Estilos

Como hay teoremas relativos a las distintas partes de las Matemáticas: Geometría, Álgebra, Análisis, etc., es natural que, en cada caso, se utilicen los procedimientos propios de cada una de esas áreas, dando lugar a los diferentes estilos.

4.1. Estilo geométrico

Es el utilizado por los griegos y, en particular, por Euclides, y fue retomado y enriquecido a principios del s. XIX con la aportación de la Geometría Proyectiva. Supone la utilización exclusiva de recursos geométricos.

Ejemplo 1[36]. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Se demuestra que el triángulo ABD es congruente al FBC, que el rectángulo de diagonal BL equivale a dos veces el triángulo ABD, y que el cuadrado GB equivale a dos veces el triángulo FBC, Por lo tanto, el rectángulo BL es equivalente al cuadrado GB. De la misma forma se prueba que el rectángulo CL es equivalente al cuadrado AK, y en consecuencia, el cuadrado BE equivale a los cuadrados GB y AK.

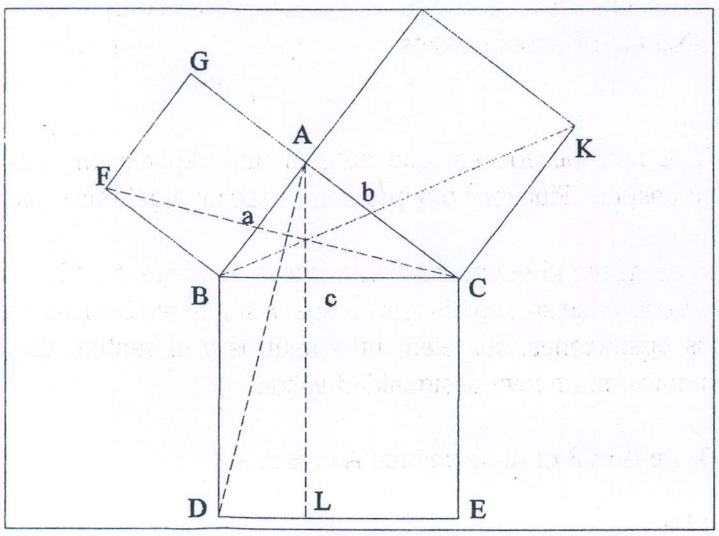


Figura 4.1

[36] Proposición 47 del Libro I de los Elementos de EUCLIDES. Ver pág. 349 de la edición citada.

Existen pruebas más intuitivas del teorema de Pitágoras, como la que se basa en estas figuras:

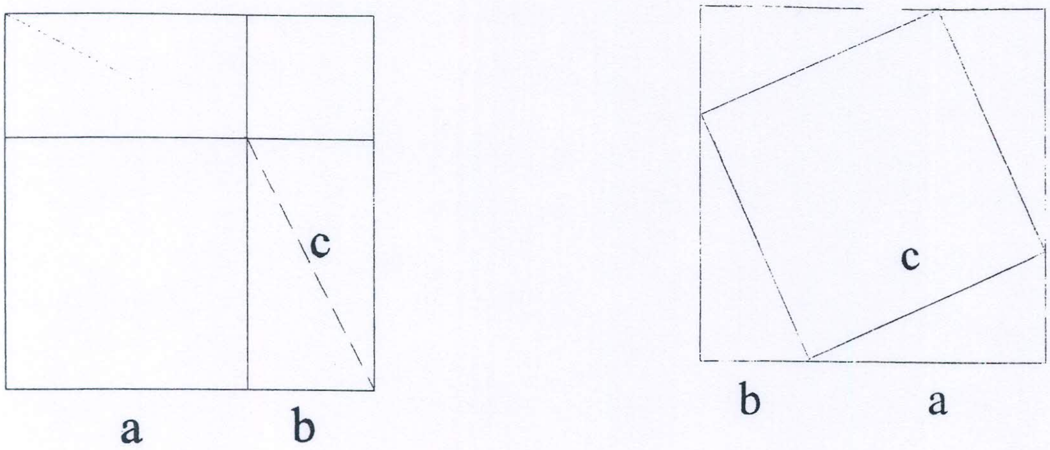


Figura 4.2

Ejemplo 2[37]. Si se divide aleatoriamente un segmento dado, el cuadrado sobre el segmento entero es igual a los cuadrados de las partes más el doble del rectángulo definido por esas partes.

A partir del segmento AB se construye el cuadrado AE. Se traza la recta BD, la recta CF paralela a AD y BE, y por el punto G la recta HK paralela a las rectas AB y DE. Se demuestra que CK y HF son cuadrados. Por lo tanto, HF, CK, AG y GE, por un lado, cubren el cuadrado entero, y por otro, equivalen a los cuadrados sobre AC y CB, y dos veces el rectángulo definido por AC y BC.

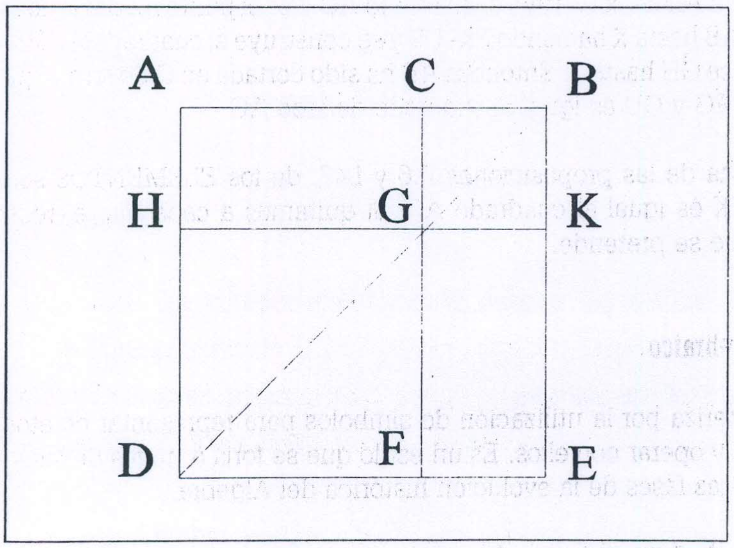


Figura 4.3

[37] Proposición 4 del libro II de los Elementos de EUCLIDES. Ver pág. 379 de la edición citada.

Ejemplo 3[38]. Dividir un segmento dado de forma que el rectángulo definido por dicho segmento y una de las partes, sea igual al cuadrado sobre la otra parte.

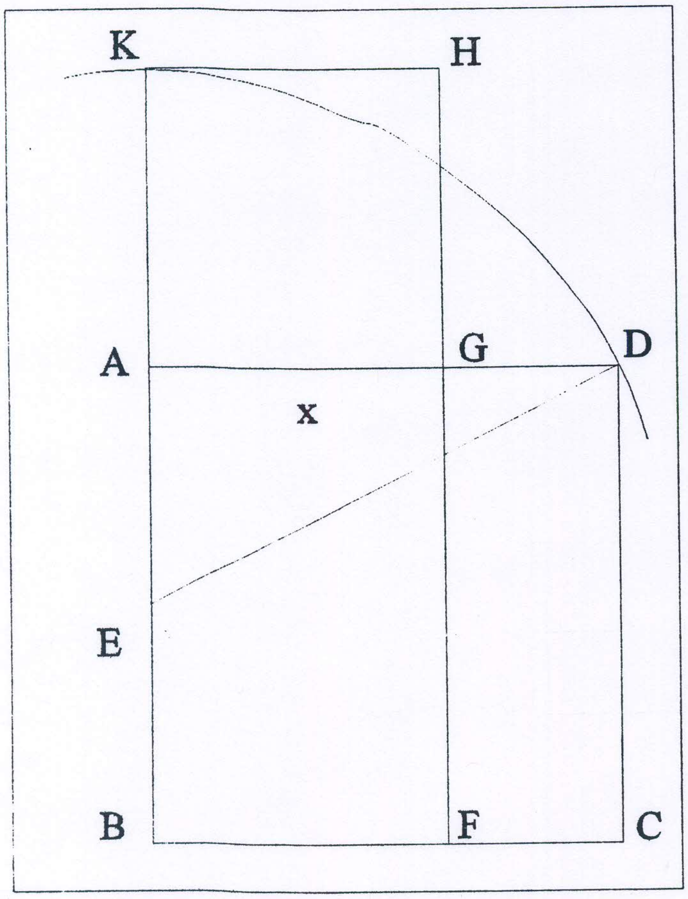


Figura 4.4

A partir de AD se construye el cuadrado AC. Por el punto medio E de AB se traza DE, se prolonga AB hasta K haciendo EK=DE y se construye el cuadrado AGHK a partir de AK, prolongándose GH hasta F. Entonces AD ha sido cortada en G de forma que el rectángulo definido por FG y GD es igual al cuadrado de lado AG.

Con ayuda de las proposiciones II.6 y I.47, de los ELEMENTOS se prueba que el rectángulo FK es igual al cuadrado AC. Si quitamos a cada uno el rectángulo AF, se obtiene lo que se pretende.

4.2. Estilo algebraico

Se caracteriza por la utilización de símbolos para representar objetos matemáticos cualesquiera y operar con ellos. Es un estilo que se forja a través de los siglos, pasando por las distintas fases de la evolución histórica del Álgebra.

Ejemplo 1. Demostramos el teorema del coseno para un triángulo acutángulo:

[38] Proposición 11 del libro II de los Elementos de EUCLIDES. Ver pág. 402 de la edición citada.

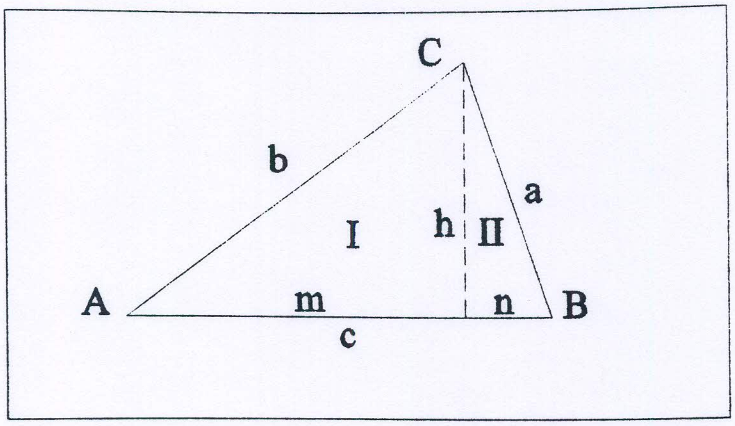


Figura 4.5

Del triángulo rectángulo II se deduce: $a^2 = h^2 + n^2$. Pero: $h^2 = b^2 - m^2$ y $n^2 = (c - m)^2$, luego: $a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 = b^2 + c^2 - 2cm$. Y como $m = b\cos A$, obtenemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Ejemplo 2. Obtención de la fórmula general de resolución de la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales.

Ponemos $ax^2 + bx = -c$, y multiplicamos por 4a: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$. Sumamos b^2: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$. Agrupando: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Resolviendo: $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$, de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 3. El ejemplo 3 del apartado 3.4.

4.3. Estilo de las coordenadas

El procedimiento de las coordenadas permite enlazar los estilos geométrico y algebraico en una fructífera simbiosis. Como es bien conocido surge en el s. XVII con los trabajos de Fermat y Descartes, perfeccionándose poco después con las contribuciones de otros grandes matemáticos como Wallis o Newton.

Ejemplo 1. Vamos a probar analíticamente que las tres medianas de un triángulo cualquiera concurren en un punto[39].

[39] Ver pág. 283 de: VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría.* México: Limusa, 1983.

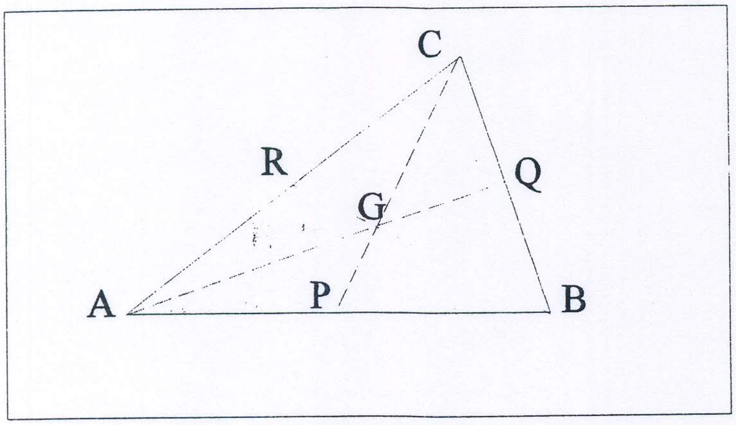


Figura 4.6

Sea el triángulo ABC. Elegimos el eje de las x sobre el lado AB y el origen de coordenadas sobre A. De esta forma las coordenadas de los vértices son: A(0, 0), B(a, 0) y C(b, c). Sean P, Q y R los puntos medios de los lados AB, BC y AC respectivamente.

- La recta CP tiene de ecuación: $2cx - (2b - a)\,y = ac$
- La recta AQ: $cx - (a + b)\,y = 0$
- Y la recta BR: $cx - (b - 2a)\,y = ac$
- El punto de intersección de CP y AQ se halla resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones, obteniendo $G\,((a + b)/3,\ c/3)$.
- Para terminar, basta probar que este punto satisface la ecuación de BR.

4.4. Estilo del Análisis Matemático

Se va elaborando desde el s. XVII con los creadores del Cálculo y se consolida con la fundamentación del Análisis en el s. XIX. Supone la utilización de los procedimientos del Análisis Matemático y, en particular, del concepto de límite.

Ejemplo 1. Teorema fundamental del cálculo integral[40]: Sea f integrable sobre [a, b] y se define F sobre [a, b] por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Si f es continua en c de [a, b], entonces F es derivable en c, y $F'(c) = f(c)$.

Demostración: Suponemos que c está en (a, b); para c=a o b, los razonamientos son análogos con las derivadas laterales.

Sea $h > 0$. Entonces: $F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$

[40] Ver pág. 358 de: SPIVAK, M. *Calculus*. Barcelona. Reverté, 1970.

Definimos: $m_h = \inf\{f(x): c < x < c + h\}$,
$M_h = \sup\{f(x): c < x < c + h\}$.

Se deduce: $$m_h h \leq \int_c^{c+h} f(t)\, dt \leq M_h h.$$

O bien: $$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

La misma expresión se obtiene cuando $h < 0$.

Tomando límites cuando $h \to 0$, y puesto que f es continua en $x = c$, se obtiene $F'(c) = f(c)$.

Ejemplo 2. Aunque parezca paradójico, las demostraciones que figuran en los textos[41], del teorema fundamental del Algebra, utilizan estilo analítico, puesto que resulta preciso acudir a conceptos y procedimientos propios del Análisis Matemático.

Ejemplo 3. El "método" de exhaución (ej. 3 del apdo. 2.3) es un procedimiento geométrico, que al huir del concepto de infinito evita el uso de límites y, por lo tanto, genera un estilo geométrico y no analítico.

Así pues, los procedimientos matemáticos propios de cada una de las grandes áreas de la Matemática confieren al lenguaje un estilo característico. Y se podía seguir considerando los estilos probabilístico, vectorial, etc, e incluso otros más locales ligados a un sólo procedimiento, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Queremos demostrar que si una función tiene límite, éste es único.

Podemos considerar dos procedimientos para definir el límite, l, de la función f (x) cuando $x \to x_0$:

I) Para todo entorno de l, E (l), existe un entorno de x_0, E (x_0), tal que si x pertenece a E* (x_0), entonces f (x) pertenece a E (l).

II) Para todo número positivo ϵ, existe otro número positivo δ, tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Está claro que según adoptemos un procedimiento u otro, resultarán distintos estilos para la demostración: uno con lenguaje de entornos y otro con lenguaje de épsilon y delta.

Aunque hay que resaltar que, en la literatura matemática actual, los estilos suelen aparecer mezclados. Así, el estilo analítico va tan íntimamente ligado al algebraico, que toda demostración analítica posee elementos algebraicos.

41 Ver nota 4.

Ejemplo 5. Mike Staring (1996) demostró el teorema de Pitágoras usando un estilo analítico como sigue:

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. let be AB = b. Denotemos a AC por la variable x y pongamos BC = f (x). Si AC se incrementa en Δx, entonces BC se incrementa en Δf (x). Ver la figura 4.7, donde:

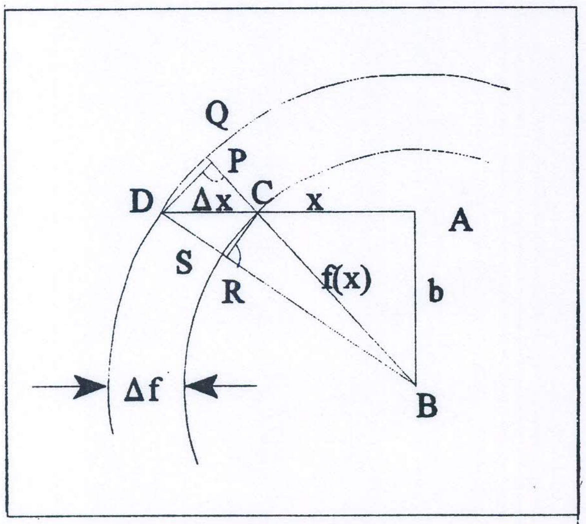


Figura 4.7

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{CQ}{CD} > \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CB} = \frac{x}{f(x)}.$$

Por otra parte,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{SD}{CD} < \frac{AD}{BD} = \frac{x + \Delta x}{f(x) + \Delta f(x)}.$$

Tomando límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{f(x)}.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se llega a $f^2(x) = x^2 + C$, siendo C la constante de integración. Si x = 0, entonces f (0) = b y $C = b^2$. En definitiva se ha probado que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

4.5. Estilos alternativos

En muchas ocasiones, una misma proposición se puede interpretar en dos áreas distintas o con diferentes puntos de vista, lo que conduce a la posibilidad de elegir entre diversos estilos de demostación.

Ejemplo 1. Si en el triángulo ABC, consideramos los vectores-lado **a**, **b** y **c**, se tiene:

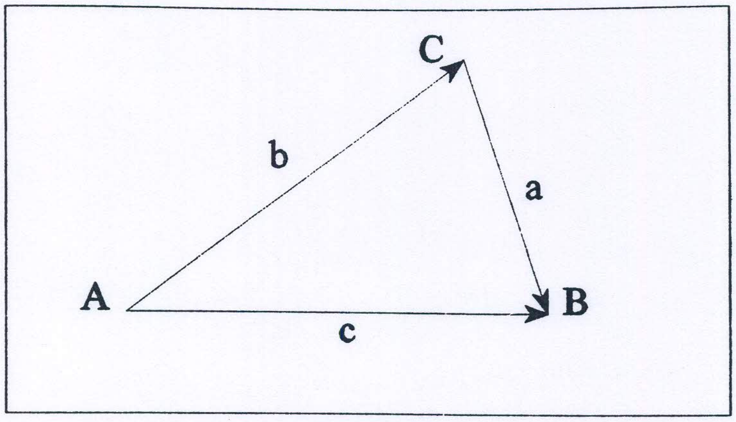


Figura 4.8

a.**a** = (**b**-**c**) · (**b**-**c**) = **b**·**b**-**b**·**c**-**c**·**b** + **c**.**c** = **b**·**b** + **c**·**c** -2**b**·**c**

Si A = 90°, **b**·**c** = 0 y se obtiene el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$.

En el caso general, **b**.**c** = bccosA, quedando el teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

De esta forma hemos demostrado, con estilo vectorial, dos teoremas que habíamos visto antes (ejemplos 1 del apartado 4.1 y 1 del apdo. 4.2) con estilos geométrico y algebraico respectivamente.

Ejemplo 2. El ejemplo 2 del apdo. 4.1, se traduce a $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, que se demuestra fácilmente en estilo algebraico.

Ejemplo 3. El ejemplo 3 del apdo. 4.1 equivale a resolver la ecuación algebraica $(a - x)\, a = x^2$.

Ejemplo 4. El teorema del ejemplo 1 del apartado 4.3 también puede demostrarse con estilo geométrico[42]:

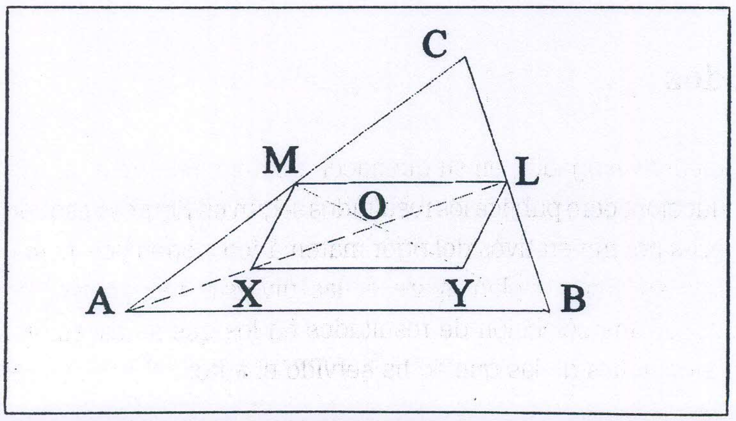


Fig. 4.9

[42] Ver pág. 96 de VELASCO SOTOMAYOR.

En el triángulo ABC consideramos las medianas AL y BM, cuyo punto de intersección llamamos O. Sean X y Y los puntos medios de AO y BO respectivamente. Puesto que "el segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad", considerando los triángulos ABO y ABC, concluimos que XY//AB// ML y que XY=1/2AB=ML. Por lo tanto el cuadrilátero YLMX es un paralelogramo. Luego XO=OL y YO=OM, de donde AO=2/3AL y BO=2/3BM, es decir, "el punto de intersección de cualesquiera dos medianas está a 2/3 de cada una de dichas medianas medidas desde el vértice". Por tanto, el punto de intersección de la mediana restante con cualquiera de estas dos medianas, por ejemplo con AL, está a 2/3 de AL medidos desde A, y por consiguiente, coincide con el punto O.

Ejemplo 5. Veamos cómo Al Khwarizmi (S. IX), resuelve con estilo geométrico la ecuación $x^2+10x=39$. Se sigue la explicación de M. KLINE[43]: Sea AB el segmento que representa el valor de la incógnita x y construyamos el cuadrado ABCD. Prolonguemos DA hasta H y DC hasta F de manera que AH=CF=5, que es la mitad del coeficiente de x. Completemos el cuadrado sobre DH y DF. Entonces, las áreas I, II y III son x^2, 5x y 5x respectivamente. La suma de las tres es el primer miembro de la ecuación. Añadimos ahora a ambos miembros el área IV, que es 25. Luego, el cuadrado completo tiene área 64 y su lado debe valer 8. Así pues, AB=3.

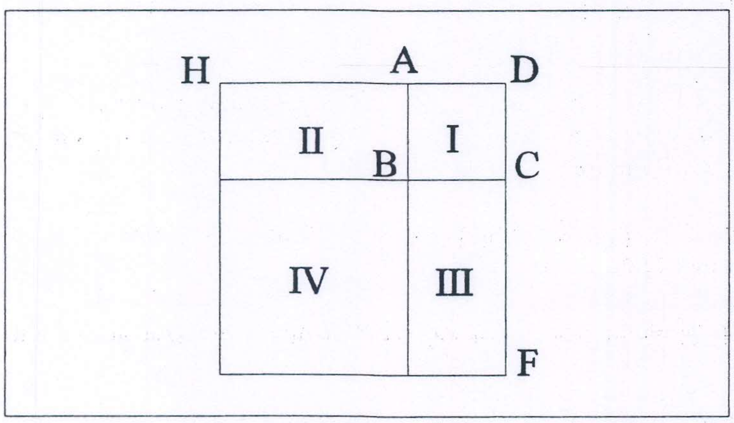


Figura 4.10

5. Los modos

El matemático investigador, en su quehacer creativo, recurre a tanteos, analogías y procede por inducción, pero publica los resultados según un riguroso esquema hipotético-deductivo, a veces por imperativos del rigor matemático y otras por mera comodidad de exposición. Y así es como suelen aparecer las diversas teorías en los manuales de Matemáticas, como una colección de resultados en los que se escamotea al lector las sugerencias e intuiciones de las que se ha servido el autor.

43 Ver KLINE, M. pág 261.

Polya, en su obra *Matemáticas y razonamiento plausible* afirma:

> "las Matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa. Sin embargo, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta a su vez es descubierta mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición".

Por lo tanto, podemos considerar dos *modos* en relación a la exposición de las teorías matemáticas:

- El modo **sintético** o **directo**, propio de la presentación formalizada del producto final.
- El modo **analítico** o **indirecto**, más adecuado para la exposición didáctica.

Para ilustrar estas ideas, expondremos el enunciado y la demostración del teorema del valor medio, utilizando ambos *modos*:

Teorema. Si f es continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe algún punto x_0 perteneciente a (a,b), tal que: $f(b) - f(a) = f'(x_0).(b - a)$.

Demostración sintética o directa: Consideramos la función:

$$g(x) = (b - a).f(x) - [f(b) - f(a)].x$$

(La pregunta de cualquier alumno atento es ¿por qué?). Vamos a aplicar el teorema de Rolle a esta función:

g (x) es una función continua en [a,b] por serlo f (x).
g (x) es derivable en (a,b) por la misma razón.

Además, g (a) = g (b). Por lo tanto, existe al menos un punto x_0 perteneciente a (a,b) en el que $g'(x_0) = 0$. Pero $g'(x) = (b-a).f'(x)-[f(b)-f(a)]$, luego: $g'(x_0) = 0 = (b - a).f'(x_0) - [f(b) - f(a)]$; de donde se deduce lo que queremos demostrar.

Demostración analítica o indirecta: El significado geométrico del teorema de Rolle es el siguiente: si una curva es "suave" y sus extremos "están a la misma altura", existe al menos un punto donde la recta tangente es horizontal, o sea, paralela a la cuerda que une los extremos:

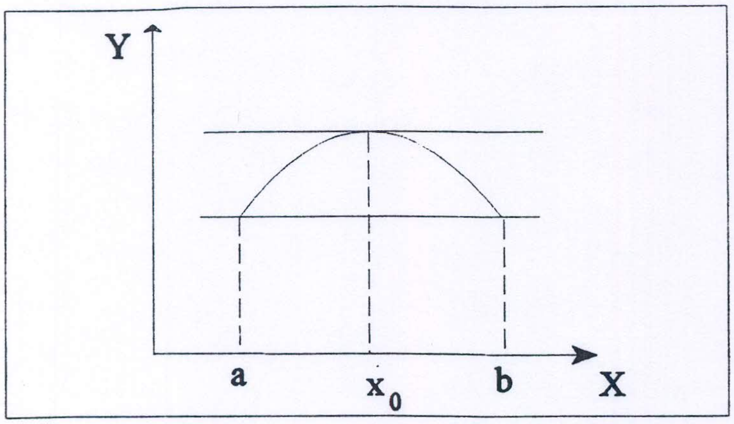


Figura 5.1

Si prescindimos de la condición de que los extremos "estén a la misma altura", la cuerda que une estos puntos ya no será horizontal, pero parece natural mantener que existirá algún punto de la curva en el que la recta tangente sea paralela a dicha cuerda.

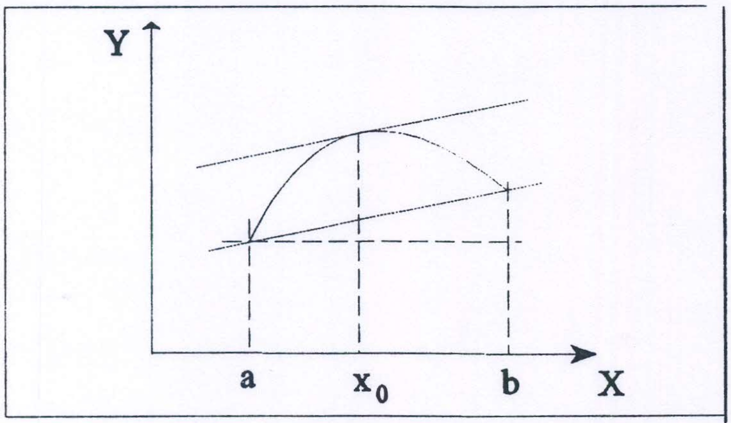


Figura 5.2

Si ambas rectas son paralelas tendrán la misma pendiente. La de la tangente es $f'(x_0)$ y la de la cuerda $[f(b) - f(a)]/(b - a)$, por lo que podemos conjeturar el teorema antes enunciado, y ahora pasamos a la demostración:

Para lograr que la cuerda que une los extremos fuera horizontal, tendríamos que hacer un giro de ejes:

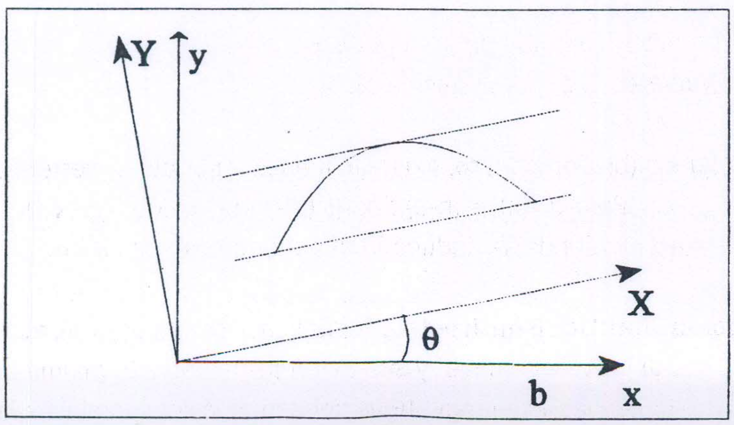


Figura 5.3

Tras efectuar este giro las nuevas ordenadas ,Y, se expresan en función de las antiguas coordenadas (x, y) mediante esta relación:

$$Y = -\text{sen } (\theta) \cdot x + \cos (\theta) \cdot y,$$

siendo θ el ángulo de giro. Como del ángulo θ lo que conocemos es su tangente (pues $\text{tag}(\theta) = [f (b) - f (a)] / (b - a)$), podemos poner, salvo factor constante —cambio de escala—, $Y = -\text{tag } (\theta)\cdot x + y = -[f (b) - f (a)] / (b-a))\cdot x + f (x)$. Si multiplicamos por la constante b − a (que para nuestro objetivo es lo mismo), obtenemos esta expresión más cómoda: $g (x) = b - a)\cdot f (x) - [f (b) - f (a)]\cdot x$, y seguimos como antes.

6. La demostración en la resolución de problemas

Aunque la fase creativa de resolución de problemas se basa en procesos de razonamiento inductivo, que dan lugar a las distintas estrategias de resolución que han sido estudiadas por POLYA[44], MASON[45], GUZMAN[46], etc., en la fase expositiva se emplean todas las técnicas demostrativas anteriormente descritas, de las que pasamos a ejemplificar algunas de ellas.

Muchos problemas consisten en la *construcción* de un determinado objeto y, por lo tanto, la demostración es de **existencia**:

Ejemplo 1. *Muestra cómo puede dividirse esta figura en cuatro piezas idénticas*[47].

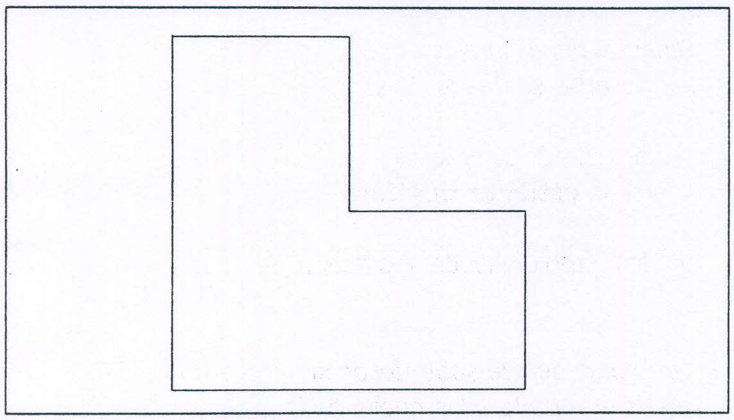


Figura 6.1

Aquí el proceso de **construcción** es meramente inductivo y su comprobación más bien reponde al mandato de los antiguos matemáticos hindúes: ¡Mira! Pero esto no siempre es así:

Ejemplo 2. *Construir un triángulo conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.*

44 POLYA, G. *"Cómo plantear y resolver problemas"*. México D.F. Trillas, 1976.
45 MASON, J. y otros. *"Pensar matemáticamente"*. Barcelona: Labor-MEC, 1988.
46 GUZMÁN, M. *"Para pensar mejor"*. Barcelona: Labor-MEC, 1991.
47 "Cuatro piezas iguales", número 30, pág. 18 de: BOLT, B. *"Divertimentos matemáticos"* Barcelona. Labor, 1988.

Este problema se resuelve también en **estilo geométrico**, pero exige utilizar la estrategia: *"supongo el problema resuelto"* y cierto encadenamiento deductivo.

O este menos sencillo:

Ejemplo 3. *Construir un triángulo conocidos el perímetro y dos ángulos.*

Problema que se resuelve suponiéndolo construido y aplicando propiedades de los triángulos:

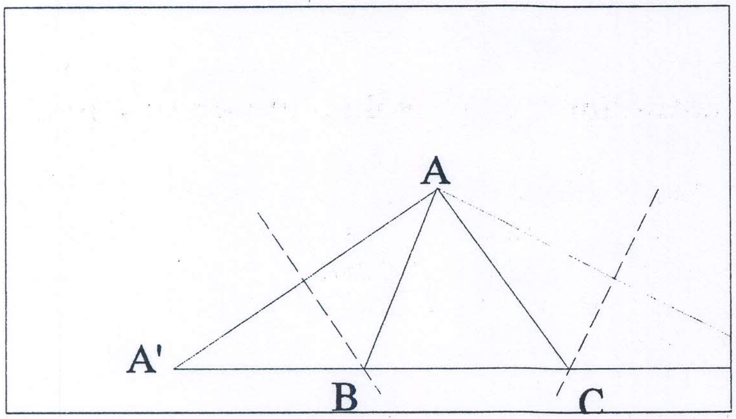


Figura 6.2

Igualmente, el problema:

Ejemplo 4. *Tenemos doce monedas, once de las cuales tienen el mismo peso. Muestra cómo con sólo tres pesadas se puede determinar cuál es la moneda de peso distinto.*

Para resolver esta cuestión se precisa la distinción de diversos **casos** y complicados **silogismos**, todo ello en **estilo aritmético**.

Siguiendo con los problemas de existencia, a algunos les conviene **técnicas especiales**:

Ejemplo 5. *Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de su ermita a las nueve de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las nueve, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero. Al ir bajando se pregunta: ¿Habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora a la que estuve ayer?* [48]

Que puede resolverse en **estilo algebraico** utilizando las ecuaciones de movimiento, pero resulta mucho más sencillo considerando un monje imaginario que baja en el mismo día y a la misma hora en que el monje real sube.

Las técnicas especiales no tienen porqué resultar tan fantasmagóricas; incluso se puede recurrir a **modelos físicos**, reales:

[48] Propuesto en obra citada de GUZMAN. "El monje en la montaña", pág.113.

Ejemplo 6. *Dos monedas idénticas A y B parten de la posición que indica la figura. La moneda B permanece en reposo, mientras que la A rueda alrededor de B, sin deslizar, hasta que vuelve a su posición inicial. ¿Cuántas vueltas habrá dado la moneda A?* [49]

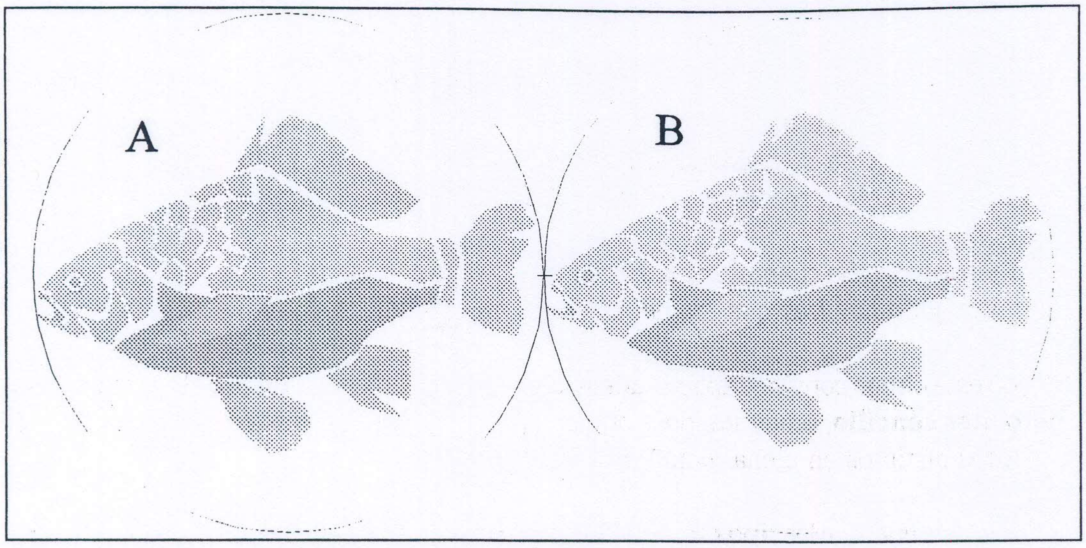


Figura 6.3

La mejor forma de resolverlo consiste en coger dos monedas y hacer el experimento; luego se puede diseñar un argumento sin el soporte físico.

Cuando el ente construido está en relación con la sucesión de números naturales, hay que recurrir a la **inducción completa**:

Ejemplo 7. *Es un juego para dos jugadores A y B. En un tablero 8 × 8 se coloca una ficha en la esquina inferior izquierda. Juega A y debe mover la ficha un cuadro hacia arriba, hacia la derecha o en la dirección de la diagonal NE. Juega B y, del mismo modo, debe mover la ficha, desde la posición que ahora ocupa, un cuadro hacia el N, E, o bien NE. Juega A, ... Gana quien coloque la ficha en la esquina superior derecha. ¿Puedes encontrar una estrategia para alguno de los jugadores?* [50]

Para tableros de orden 2, 3, 4, es sencillo comprobar para cada casilla si su posición es ganadora o perdedora. Con ello podemos conjeturar una estrategia ganadora para un tablero de orden n, y luego se demuestra por inducción completa.

También precisan la utilización del método de inducción completa los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 8. *"En el gran templo de Benarés, bajo la cúpula que señala el centro del mundo, está situada una plancha de latón a la que están fijadas tres agujas de diamante de un cúbito de alto y del grosor del cuerpo de una abeja. En una de estas tres agujas*

[49] Propuesto en la obra citada de BOLT. "Monedas que dan vueltas", número 32, pág. 18.
[50] Propuesto en la obra citada de GUZMAN. "Caza cartesiana", pág. 95.

puso Dios en el momento de la creación sesenta y cuatro discos de oro puro, el disco mayor situado sobre la plancha de latón, y los otros, cada vez mas pequeños, unos encima de otros. Esta es la TORRE DE BRAHMA. Día y noche, sin cesar, los sacerdotes del templo pasan los discos de una aguja a otra siguiendo las leyes fijas e inmutables de Brahma, que exigen que el sacerdote que realiza la ceremonia no puede mover más de un disco al mismo tiempo, y que debe situarlo en una de las agujas sin ponerlo sobre un disco más pequeño. Cuando los sesenta y cuatro discos hayan sido transferidos desde la aguja en que Dios los situó en el momento de la creación, a una de las otras agujas, la torre, el templo y los sacerdotes se desmoronarán transformándose en polvo, y en medio de un gran estruendo el mundo se desvanecerá".[51] *¿Cuándo se acabará el mundo?*

Ejemplo 9. *¿En cuántas regiones dividen al plano n rectas tales que dos cualesquiera se cortan y no hay tres que tengan un punto en común?*

En este último conviene aplicar, además, la técnica de resolver **un problema similar, pero más sencillo**, preguntándose primero, ¿en cuántos segmentos dividen a una recta n puntos distintos en dicha recta?

Para terminar con los **tipos**, a continuación proponemos dos problemas de **implicación**:

Ejemplo 10. *¿Será verdad que si p es cualquier número primo mayor que 3, entonces p^2 es un múltiplo de 12 más una unidad siempre?* [52]

Su resolución se limita a considerar p^2-1, y probar que es múltiplo de 3 y de 4.

Ejemplo 11. *Escoge un número de tres cifras distintas. Ordena sus cifras de mayor a menor y luego de menor a mayor. Resta y repite el experimento con otros números. Explica lo que pasa.*[53]

Después de comprobar algunos casos particulares, observa que en el número (abc) – (cba) la suma de las cifras 1ª y 3ª es 9 y la 2ª es siempre 9; a partir de aquí se pueden considerar todos los **casos** posibles y estudiarlos.

En este último se aprecia que el enunciado no nos dice exactamente qué es lo que hay que demostrar, quedando la cuestión **abierta**, lo cual es una característica muy típica de los **problemas**, a diferencia de los **teoremas.**

Completando los métodos, uno que se resuelve por **reducción al absurdo**:

Ejemplo 12. *Sea m un número natural. Pruébese que si $2^m + 1$ es primo y mayor que tres, entonces m es par necesariamente.* [54]

---

[51] Propuesto en: BALL,W.W.R. *"Mathematical recreations & Essays"*. Revisado por COXETER, H.S.M. New York: Macmillan, 1973.
[52] Propuesto en la obra citada de GUZMAN. "Cuadrados primos", pág. 115.
[53] Se ha modificado ligeramente el problema "¿Un número verdaderamente mágico?" propuesto en la obra citada de GUZMAN, pág. 102.
[54] Problema 28.7, pág. 37 de: BELLOT ROSADO, F. y otros. *"Olimpiada matemática española. Problemas propuestos en el distrito universitario de Valladolid"*. Valladolid. I.C.E., 1992.

Observar que si m = 2k + 1, entonces: $2^{2k+1} + 1 = (2 + 1)(2^{2k} - 2^{2k-1} + \ldots + 2^2 - 2 + 1)$, lo que contradice lo supuesto.

La **analogía** y **dualidad** son muy útiles en resolución de problemas como estrategias creativas; pero aquí nos referimos a ellas como métodos de demostración y nos remitimos a lo dicho en el apartado 3.6, a lo que añadimos el siguiente:

Ejemplo 13. Del enunciado: "Si la *suma* de dos cantidades positivas es constante, su *producto* es *máximo* cuando ambas cantidades son iguales" se sigue, por dualidad que: "Si el *producto* de dos cantidades positivas es constante, su *suma* es *mínima* cuando ambas cantidades son iguales". La dualidad está sostenida por el *Teorema de las medias*: $x.y \leq ((x + y)/2)^2$. (Naturalmente, ambos resultados pueden demostrarse por separado utilizando los resultados del Cálculo Diferencial).

Y para terminar con los **estilos**, proponemos uno del **análisis matemático** y otro de **probabilidad:**

Ejemplo 14. *Para construir un puente desde una orilla, disponemos de vigas de p metros de longitud, pero no las podemos unir, sino sólamente apilarlas. ¿Qué longitud máxima puede tener el puente?* [55]

La distancia máxima alcanzable con n vigas es $d = (p/2)(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n)$, por lo que, teóricamente, el puente podría tener una longitud tan grande como se quisiera.

Ejemplo 15. *La señora Paca solía abordar el autobús en una parada de la calle Mayor para ir al mercado. No se preocupaba por los horarios, porque le servía igual un autobús de la línea P que uno de la línea Q. Sabía que de cada uno pasaban seis autobuses por hora y nunca había tenido que esperar mucho. Sin embargo, le sorprendía que muy pocas veces era un Q. Decidió, pues, llevar la cuenta del tipo de autobús que abordaba y descubrió que viajaba en un autobús Q aproximadamente sólo una vez de cada diez. ¡La señora Paca estaba completamente perpleja! ¿Podrías ayudarla a entender lo que pasaba?* [56]

Un esquema del horario nos ayuda a comprender la situación y calcular las probabilidades de tomar un autobús de cada línea.

Aunque muchos pueden resolverse en dos estilos:

Ejemplo 16. *Discutir, según los distintos valores de* **a**, *el número de soluciones reales del sistema:* [57]

$$x^2 - y^2 = 0 \; ; \; (x - a)^2 + y^2 = 1.$$

---

[55] Se ha modificado el enunciado del problema "Pontoneros de maniobras", propuesto en la obra citada de BOLT. Núm. 126, pág.72.

[56] Propuesto en la obra citada de BOLT. "Un ama de casa perpleja", Núm. 52, pág.29.

[57] Propuesto en la obra citada de GUZMAN."¿Cuántas soluciones?", pág. 106.

En **estilo algebraico** la discusión es bastante complicada, pero interpretando el enunciado en **estilo geométrico** (cortes de dos rectas y una circunferencia), la discusión resulta muy intuitiva.

El siguiente ejemplo se resuelve aplicando transformaciones topológicas a los casos que resultan de considerar todas las posibilidades teóricas y también en un estilo algebraico.

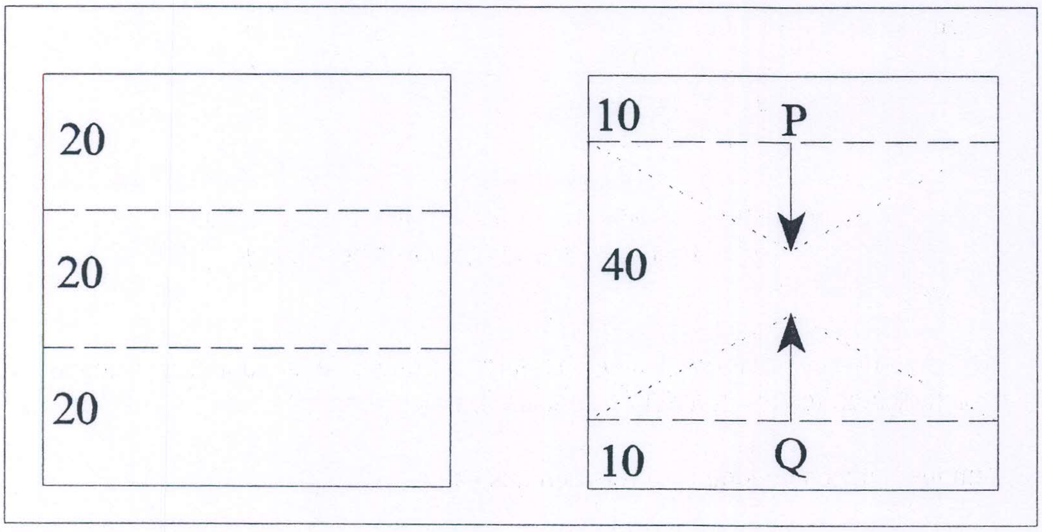
Ejemplo 17. *Tres hermanos heredan un solar cuadrado de 60 m de lado, que da a cuatro calles. Dividir el solar en tres partes de igual área, con los mismos metros de fachada, que las divisiones a realizar sean rectas y tengan la menor longitud posible, y que resulten partes aptas para edificar.*

El área y la fachada de cada una de las partes debe ser de 1200 m^2 y de 80 m, respectivamente. Buscando que las divisiones se hagan mediante poligonales se tienen los siguientes casos:

1. Buscamos que las tres partes tengan forma de banda:

   Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.4.a, no tienen la misma fachada.

   Si coinciden en la fachada, figura 6.4.b, no pueden tener la misma superficie.

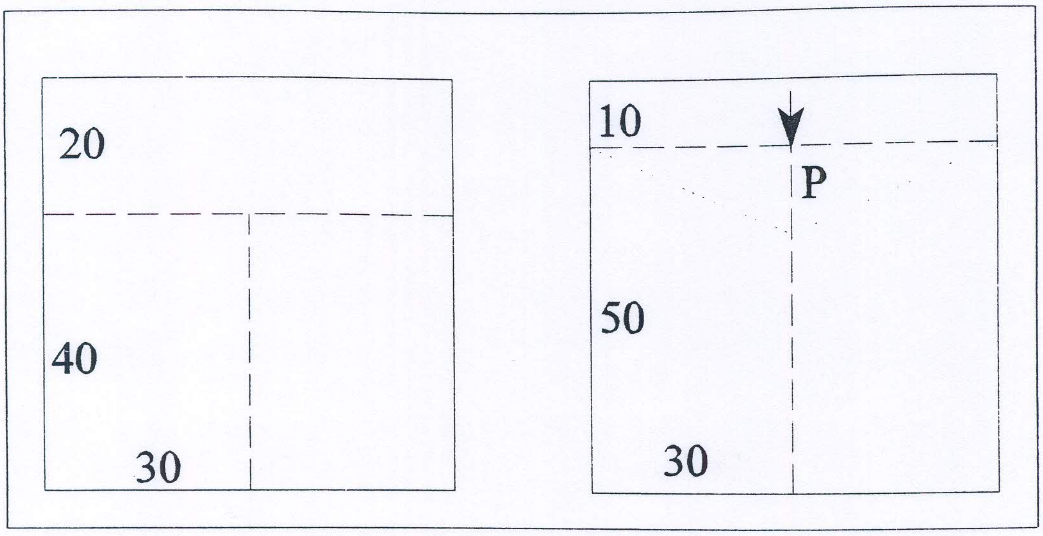


Figuras 6.4.a-b

2. Buscamos dos partes rectangulares y otra con forma de banda:

   Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.5.a, no tienen la misma fachada.

   Si coinciden en la fachada, figura 6.5.b, no pueden tener la misma superficie.

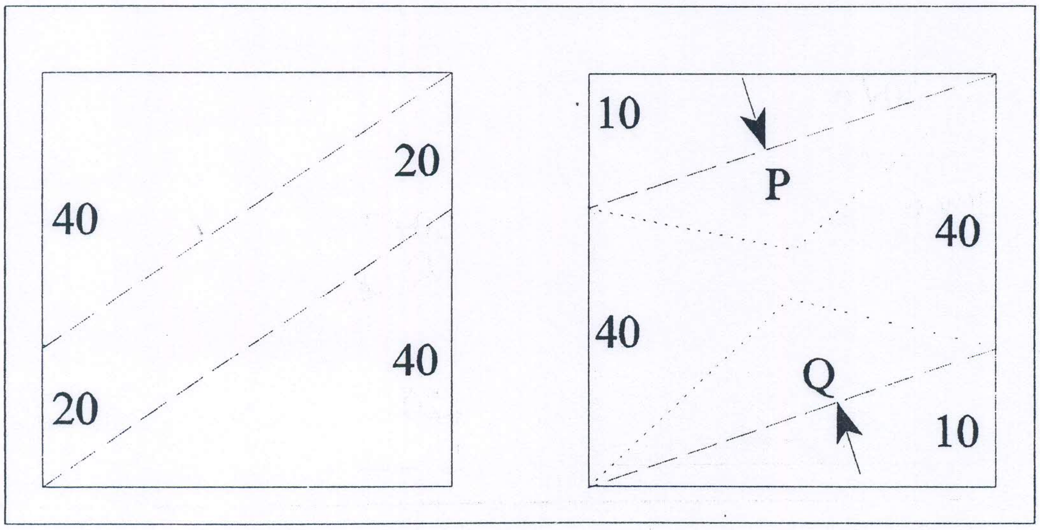


Figuras 6.5.a-b

3. Buscamos dos partes que sean triángulos no equiláteros, que uno de los lados contenga una fachada entera y que la tercera sea una banda que tenga fachadas a dos calles:

Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.6.a, no tienen la misma fachada.

Si coinciden en la fachada, figura 6.6.b, no pueden tener la misma superficie.

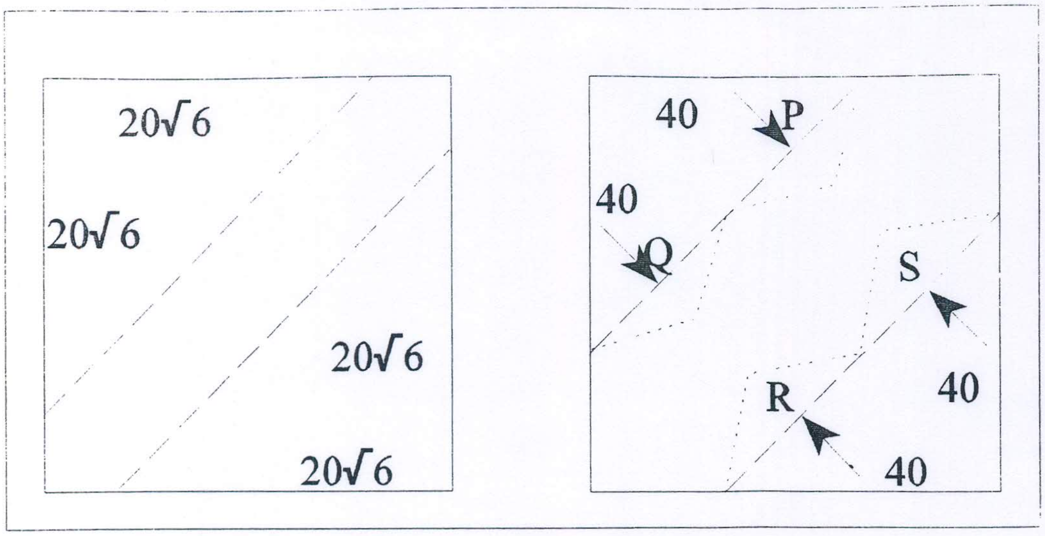


Figuras 6.6.a-b

4. Buscamos dos partes que sean triángulos equiláteros, con el ángulo recto en esquinas de la misma diagonal y que la tercera sea una banda que contenga a las otras dos esquinas:

Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.7.a, no tienen la misma fachada.

Si coinciden en la fachada, figura 6.7.b, no pueden tener la misma superficie.

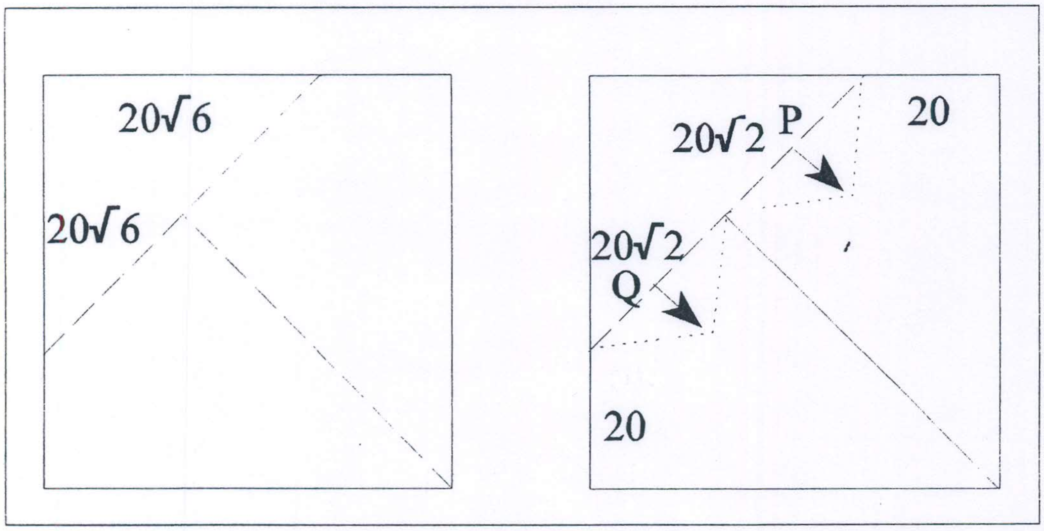


Figuras 6.7.a-b

5. Buscamos que una parte sea un triángulo rectángulo de esquina y que las otras sean los trapezoides que resultan de dividir la superficie restante en dos partes simétricas respecto de la diagonal:

Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.8.a, no tienen la misma fachada.

Si coinciden en la fachada, figura 6.8.b, no pueden tener la misma superficie.

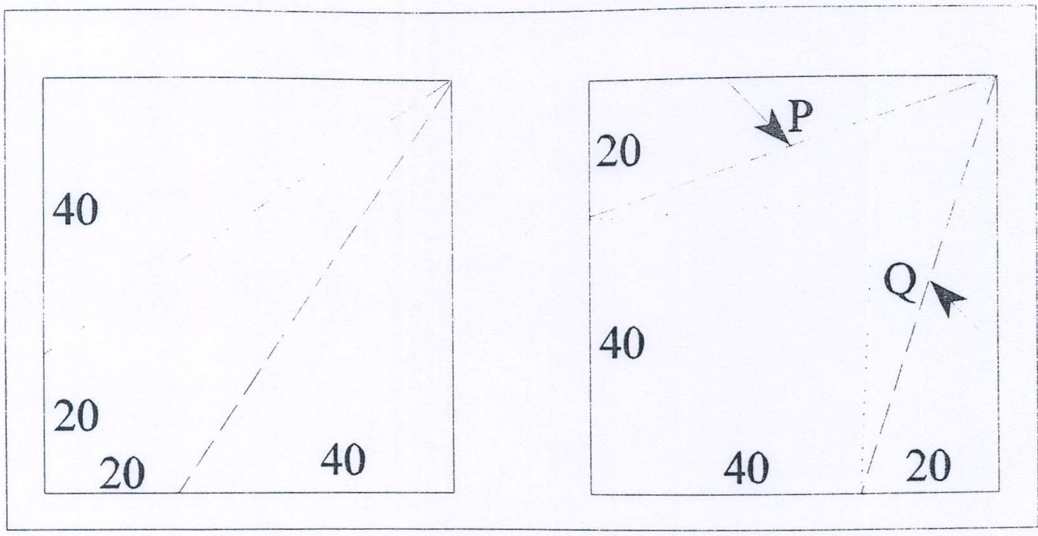


Figuras 6.8.a-b

6. Buscamos dos partes que sean triángulos rectángulos tales que uno de sus catetos sea una fachada entera y que la tercera sea un trapezoide que toque a la esquina común y contenga a la esquina restante.

Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.9.a, no tienen la misma fachada.

Si coinciden en la fachada, figura 6.9.b, no pueden tener la misma superficie.

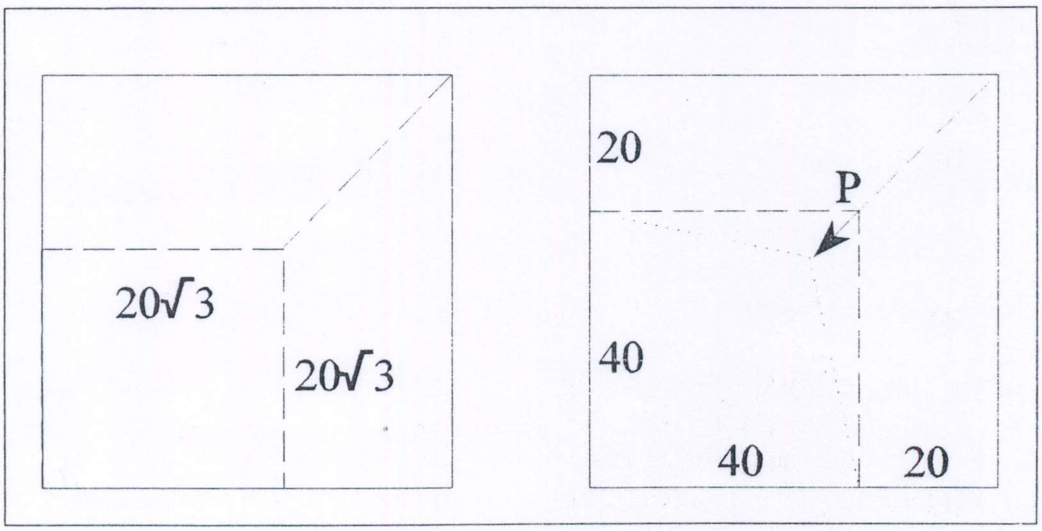


Figuras 6.9.a-b

7. Buscamos que una parte sea un cuadrado de esquina y que las otras dos sean los trapezoides que resultan de dividir la superfície restante en dos partes simétricas respecto de la diagonal.

Si tienen 1200 m^2 de área, figura 6.10.a, no tienen la misma fachada:

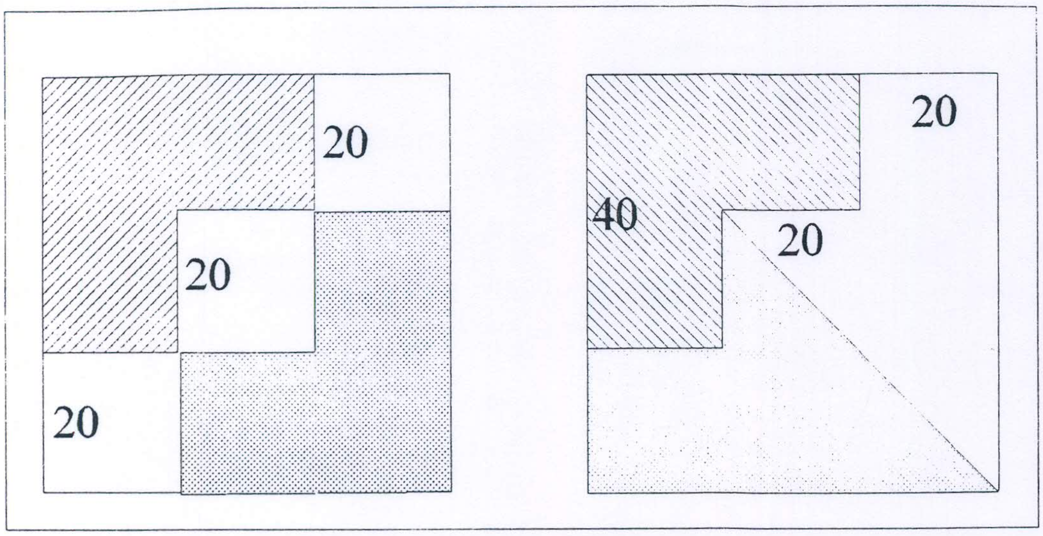
Si coinciden en la fachada, figura 6.10.b, no pueden tener la misma superficie.



Figuras 6.10.a-b

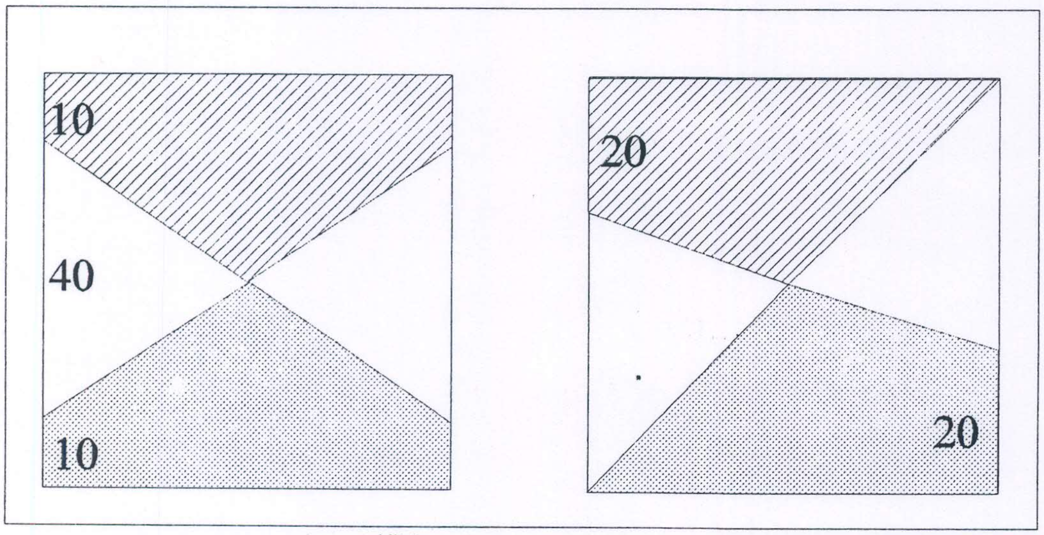
Ninguno de los repartos descritos cumple los requisitos del enunciado, pero aplicando transformaciones topológicas como indican las flechas se obtienen las siguientes soluciones:

La solución de la figura 6.11 se obtiene a partir de la figura 6.7.b mediante la tranformación topológica que deforma los recintos como indican las flechas (presionando y estirando en P, Q, R y S). La de la figura 6.12 se obtiene de 6.8.b con idéntico método.



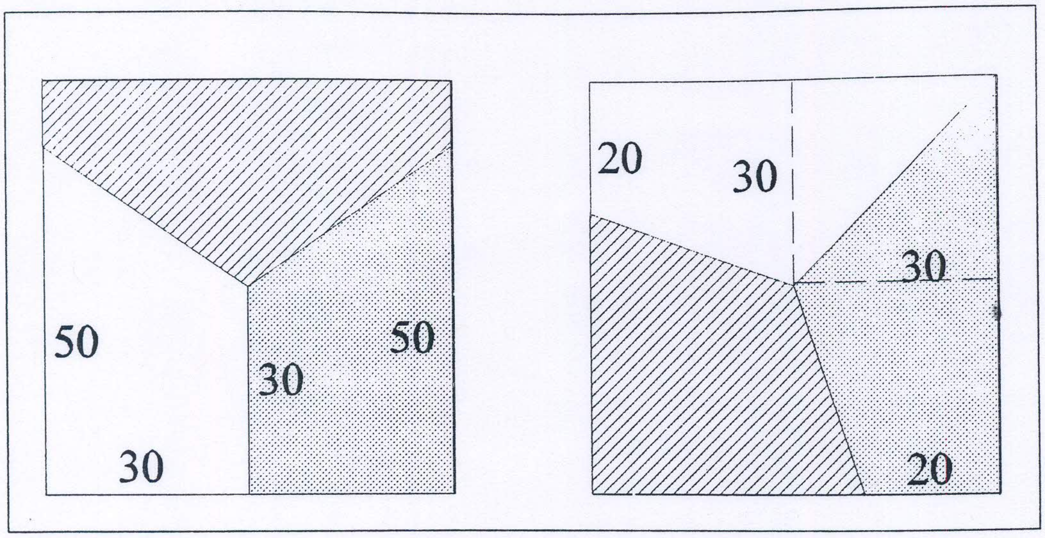
Figuras 6.11 y 6.12

La solución de la figura 6.13 se obtiene a partir de la figura 6.4.b mediante la tranformación topológica que deforma los recintos como indican las flechas (presionando y estirando en P y en Q). La de la figura 6.14 se obtiene de 6.6.b con idéntico método.



Figuras 6.13 y 6.14

La solución de la figura 6.15 se obtiene a partir de la figura 6.5.b mediante la tranformación topológica que deforma los recintos como indica la flecha (presionando y estirando en P). La de la figura 6.16 se obtiene de 6.10.b con idéntico método y también podía haberse obtenido de las figuras 6.8.b.y 6.9.b.



Figuras 6.15 y 6.16

De todas las "soluciones" una simple inspección ocular sobre las gráficas nos indica que las dos últimas son las mejores y, de ellas, la longitud de las divisiones de la primera es $20\sqrt{13} + 30 \approx 102'111$ y la de la segunda $20\sqrt{10} + 30\sqrt{2} \approx 105'672$. Además los ángulos agudos de la esquina común, de la última solución, son de menor amplitud que los ángulos agudos de los trapecios, geometría que dificultaría las posibles construcciones. Por lo tanto, concluimos que la "mejor solución" es la representada por la figura 6.15

Bibliografía

ALEKSANDROV, A. D. Y OTROS. *Las matemáticas: su contenido y significado* 1-2-3. Alianza Universidad.

ARTIN, E. (1970) *Teoría de Galois*. Vicens-Vives. Barcelona.

BALL, W. W. R. (1973) *Mathematical recreations & Essays*. -Revisado por COXETER, H. S. M.- Macmillan. New York.

BELLOT ROSADO, F. y otros. (1992) *Olimpiada matemática española. Problemas propuestos en el distrito universitario de Valladolid*. I.C.E. Valladolid.

BOLT, B. (1988) *Divertimentos matemáticos*. Labor. Barcelona.

BOYER, C. (1987) *Historia de la Matemática*. Alianza. Madrid.

CARTAN, H. (1968) *Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas*. Selecciones Científicas. Madrid.

COURANT, R. y ROBINS, H. (1971) *¿Qué es la Matemática?* Aguilar. Madrid.

CHILOV, G. (1973) *Analyse Mathématique*. Mir. Moscú.

DOU, A. (1970) *Fundamentos de la Matemática*. (Nueva coleción Labor, 117) Labor. Barcelona.

EUCLIDES. (1956) *The thirteen books of Euclid's elements*. Dover, (edición de T. L. HEATH). New York.

FISCHER, E. (1983) Intermediate real Analysis. Springer-Verlag. New York.

GOLDSTEIN, C. (1995) *La conjetura de Fermat es por fin un teorema*. En Mundo Científico, Núm. 160, vol. 15, págs. 777-778.

GUZMÁN, M. (1991) *Para pensar mejor*. Labor. Barcelona.

KLINE, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid.

KOSTRIKIN, A. I. (1980) *Introducción al Álgebra.* Mir. Moscú.

KURATOWSKI, K. (1973) *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología.* Vicens-Vives. Barcelona.

LAKATOS, I. (1978) *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza. Madrid.

LAKATOS, I. (1981) *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza. Madrid.

MASON, J. y otros. (1988) *Pensar matemáticamente.* Labor-MEC. Barcelona.

POLYA, G. (1976) *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas. México D.F.

PUIG ADAM, P. (1980) *Curso de Geometría Métrica.* Gómez Puig Ediciones. Madrid.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1984) *Historia de la Matemática.* Gedisa. Barcelona.

SANTALÓ, L. A. (1966) *La matemática en la escuela secundaria.* EUDEBA. Buenos Aires.

SOMINSKI, I. S. (1975) *Método de inducción matemática.* Mir. (lecciones populares de matemáticas) Moscú.

SPIELBERG, N. y ANDERSON, B. (1990) *Siete ideas que modificaron el mundo.* Pirámide. Madrid.

SPIVAK, M. (1970) *Calculus.* Reverté. Barcelona.

STARING, M. (1996) *The Pytagorean Proposition: A Proof by Means of Calculus.* Mathematics Magazine Vol. 69, No. 1

VELASCO SOTOMAYOR, G. (1983) *Tratado de Geometría.* Limusa. México.

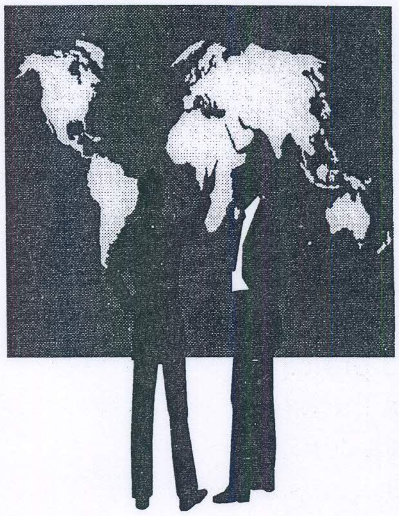
VILLIERS, M. DE (1993) *El papel y la función de la demostración en Matemáticas.* Épsilon, 26, pp. 15-30.

YAGLOM, I. M. (1977) *Álgebra extraordinaria.* Mir. Moscú.

Primavera 1996 Volumen 1 Número 1

TEXAS INSTRUMENTS

México TI-Cares(TM)



Notas, Preguntas, y Respuestas...

Estimados Educadores:

Bienvenidos a ***SU*** primera edición de México TI-Cares(TM).

TI-Cares contiene información acerca de los servicios de apoyo que Texas Instruments de México les provee. Incluyen Calculadoras Prestadas, similar a WOLOP, Workshop Loan Program, muy popular en EEUU y Europa. Esto les permite acceso a Calculadoras TI para su entrenamiento técnico y pedagógico, y en apoyo al proceso de adopción escolar de las calculadoras Texas Instruments.

Otros servicios incluyen materiales gratis para apoyar el uso en su aula, para cada modelo de calculadora Texas Instruments: Transparencias, Posters, Literatura, etc...

En Texas Instruments todos nosotros les escuchamos y les oímos, déjenos saber qué necesitan y con gusto les serviremos.:.

Por esta columna miembros de nuestro equipo en México, EEUU, y otros países les contestaremos sus preguntas.

Disfruten de estos informes y llamen, escriban, y visiten nuestras exposiciones en las conferencias de matemáticas y ciencias. ¡Estamos a su disposición !

Atentamente,

Ing. Julio Valella,

Director Mercadotecnia,

Asia y América Latina

"Una** TI **en manos de cada alumno"

Calculadoras Texas Instruments México disfruta de agudo interés académico en tecnología práctica y probada en aulas de matemáticas, ciencias, e ingeniería.

Muchos profesores mexicanos han iniciado el uso de calculadoras Texas Instruments en sus aulas de secundarias y superiores y nos reportan gran éxito y entusiasmo. También nos piden apoyo local aquí en México para entrenamiento, materiales pedagógicos, y difusión de información a todos los niveles educativos.

Son ustedes quien nos dicen "deseamos una TI en manos de cada alumno aquí en México"

Bien. ¡Trabajando juntos lo lograremos! Julio

CONTACTO RAPIDO Y FACIL- ASI:

En Ciudad México (525) +

TEL 639-9740, 639-9732

FAX 639-9226

correo electrónico mundialmente:

ti-cares@ti.com

Visite Texas Instruments W.W.W:

http://www.ti.com

+ vea productos en detalle

+ esta y otras "TI-Cares"

+ descubra otros recursos

Si desea escríbanos a nuestras oficinas en Ciudad México:

Av. Xola 613 Módulo 1-2

Colonia Del Valle

México D.F. 03100

Contenido:

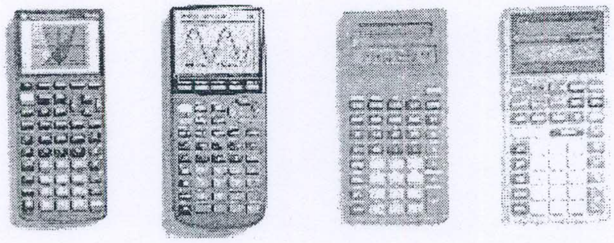
Productos y Noticias

"Una calculadora gráfica económica y propia para alumnos de aritmética y álgebra". Ese pedido a Texas Instruments por maestros de matemática que usan los modelos **TI-81** y **TI-82** en varios países inició el desarrollo y producción del nuevo modelo **TI-80**. Hoy a la venta en México y mundialmente.

TI-80 combina características superiores del modelo **TI-82** con la capacidad principal del modelo **Math Explorer** para fracciones. Fabricada para uso diario en aula como herramienta pedagógica, al igual que sus progenitores; el modelo **TI-80** es robusto y muy duradero, además es el modelo más económico en las calculadoras gráficas TI de herramientas pedagógicas.

La nueva TI-83 continua las tradiciones establecidas por la popular **TI-82**. En el aula los dos modelos trabajan juntos sin discrepancias o dificultad, cumpliendo los deseos de maestros y profesores usando la **TI-82**. La **TI-83** brinda mejores estadísticas, análisis de datos, siete estilos de gráficos para mayor diferenciación visual, y también funciones para finanzas y negocios. Utilidad pedida por pedagogos deseando aplicar la Tecnología Gráfica Texas Instruments en sus aulas de Matemáticas Aplicadas, Ciencias Sociales, Negocios, Finanzas, y muchos otros cursos.

Una tradición sólida continua avanzando. Facilidad de Uso, Funciones Requeridas, y Alta Calidad... TI-83 llega a México en Junio 1996!, pregúntele a su distribuidor.



"La venerable calculadora científica **TI-30X** sigue progresando y para 1996 establece nuevo alto nivel de Calidad, Funcionamiento y Valor.

Nuevos modelos **TI-30Xa**, **TI-30XaSolar**, y **TI-30XaSE** sirven a los alumnos en aulas, profesionales en sus trabajos, y pedagogos dando clases. Una calculadora práctica y duradera con todas las funciones requeridas en sus trabajos. La calculadora de bolsillo científica **TI** más popular mundialmente.

Esta nueva serie **TI-30Xa** da a profesores y maestros una calculadora que sus alumnos pueden comprar a bajo costo y utilizar por largo tiempo. Pronto a la venta en México.

TI EXPLORER PLUS(TM) como su nombre lo explica aumenta el funcionamiento del popular TI EXPLORER(TM). Es un modelo para doble servicio: una herramienta pedagógica de aula y también a la venta al público en México. Las escuelas ahora pueden utilizarlas en aulas y sugerirles a sus estudiantes y padres que las compren para uso individual y escolar. Varios profesores reportan que esa cooperación permite agregarlas en la escuela. Así se facilita el estudio y trabajo del alumno durante sus tareas y en sus aulas. Las dos el TI EXPLORER(TM), y el TI EXPLORER PLUS(TM) están a la venta en México.

página 3 Programas de Apoyo a Educadores *México* TI-Cares

Texas Instruments ofrece servicio completo y gratis de préstamo de calculadoras para entrenamiento técnico y pedagógico a los maestros y profesores de aula. *Préstamo Académico de Calculadoras TI... PAC-TI*.

Prioridad #1 es préstamos a Cursos y Talleres de Entrenamiento a MAESTROS y PROFESORES.

Otros préstamos en apoyo a la evaluación y adopción para aulas de las calculadoras Texas Instruments son posibles. Cada caso se considera individualmente y después de cumplir con la prioridad #1.

Todos los préstamos son a tiempo limitado y a previo acuerdo.

1 modelo por préstamo excepto CBL conjunto con TI-8X, TI-92

PETICION DE PRESTAMO: <u>COMPLETE Y ENVIE AL</u> **FAX (52-5) 6 39-92-26**

Nombre: ______________________ y favor, Firme: ____________________

Razón Social: ______________________ | Por favor fotocopie aquí su

Escuela/Univ: ______________________ | tarjeta de identificación como

Teléfono: __________ FAX __________ | profesor o maestro. Si usted

RAZON: ______________________ | desea facilitarnos esos datos.

Curso:__ Taller:__ Conferencia: __________ | ____________________

______________________ Lugar del evento: ______________

¿Cuántos individuos participarán? ________ Fecha(s): ____/____/ 96, a ____/____/ 96

Recibo y Devolución del préstamo: ** Texas Instruments Inc. de México

__ Yo lo recibo a horas de oficina, y ** Avenida XOLA 613 módulo 1-2

__ Yo lo devuelvo y entrego en: ** Colonia del Valle México D.F. 03100

***<u>TI entrega y recoje (Gratis), atencion Sr(a):</u>* ______________________**

***<u>horas entre____AM y ____PM, Fecha ___/___/96; en dirección:</u>* ______________**

____

Modelo: 108 MathMate Explorer ExplrerPlus TI-80 TI-82 TI-83 TI-85 TI-92 CBL

¿Cuántos? ____ ____ ____ ____ ____ ____ (Agosto) ____ ____ ____

Proyectable ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

(Cada préstamo trae su Transparencia, Poster, Manual... completo y listo para usarse)

Comentarios y particulares: ______________________

página 4 Programas de Apoyo a Educadores *México* TI-Cares

¿"Dónde podemos comprar calculadoras Texas Instruments"?, Distribuidores y Almacenes:

Es un privilegio para nuestros distribuidores y almacenes servirles calculadoras marca Texas Instruments y participar en *México* **TI-Cares(TM)**. Nos agrada saber cómo podemos servirles aún mejor. Les escuchamos. ¡Déjennos saber sus experiencias! No todos los almacenes tienen todos los modelos Texas Instruments, asi que les sugerimos comparen con varios de ellos.

Ciudad México

Grupo Comercial Pro-Ideas TEL 573-1703 FAX 573-7131 Almacen Todo Cómputo Av. Universidad 1911 TEL 661-0950	Toni Visa (Almacén) Av Alvaro Obregon # 243 Colonia Roma CP 06700 México D.F. 06700 TEL 207-8811 FAX 511-5504	Grupo Editorial Iberoamérica (varias Librerías) Nebraska 199 COL Nápoles México D.F. 03810 TEL 523-0640 FAX 543-1173
Electrónica SETA SACV Galeana # 114 La Loma, Tlalneplantla 54060 Estado de México TEL 390-7713 FAX 390-9468	Abastecedora LUMEN SACV Avenida Toluca # 481 COL Olivar De Los Padres México D.F. 01780 TEL 683-5211 FAX 683-5211	CCM Mayoristas SACV Bajío 234 COL. Roma Sur México D.F. 06760 TEL 264-1101 FAX 264-1101
CINAM cursos y Av Cafetales # 1506 COL CAFETALES, Coyoacán México D.F. 04930. TEL 673-4585 FAX 688-7129	Infotoreli General Juan Cano # 135-A COL San Miguel Chapultepc México D.F. 11950 TEL 272-9672 FAX 273-9215	Grandes Almacenes: WALMART de México SAM's CLUBS (varios) Office Depot Mexico (varios)
DISTRIBUIDORES en EEUU	QUE SIRVEN TODO EEUU Y	TAMBIEN MEXICO:
WHOLESALE ELECTRONICS TEL 95-800-880-9400 (2)Esp. D & H DISTRIBUTING TEL 95-800-877-1200	AFP SCHOOL SUPPLY TEL 95-800-962-4041 Esp. SCHOOLMART TEL 95-800-285-2662	Advantage Marketing TEL 95-800-937-9777 WEST (Internacional - Ingles) TEL 95-800-325-8641

Guadalajara

HERSYMAC SISTEMAS Enrique Díaz de León 829 Col. Moderna, 44100 Guadalajara, Jalisco México TEL 610-06-66 610-05-66	INGENIERIA EN SISTEMAS Av. M. Avila Camacho 1465 S.H. C.P. 44260 Guadalajara Jalisco, México TEL 823-1007 Fax 823-7908	ESTEC TOLOV 4866 COL MIRADOR GUADALAJARA, JALISCO TEL 628-65-82 FAX 6-28-65-82

Monterrey

CALCTEK Avenida Del Estado #215-A Col. Tecnológico Monterrey Monterrey, Nuevo León TEL	Intertec (Mayoristas) 64640 Monterrey, Nuevo León, México TEL (8)333-6622 FAX (8)333-0744	DESDE EEUU: W.E.S.T. International 91-800-325-8641 (Ingles) e-Mail west @ trib.com