La Importancia de la Imagen Primigenia

Resumen

En el aprendizaje de matemáticas, se da la tendencia a dejar inamovible la impresión del primer contacto con un concepto o con un procedimiento. Esta primera impresión no puede englobar el concepto matemático y, así, se convierte en impedimento para construirlo. La construcción deficiente limita la posibilidad de comprender un concepto (o un procedimiento) más adelantado que se basa en él. La tendencia, además, no sólo se observa en los alumnos sino también en los profesores: en su caso, la dificultad puede llevarlos a no superar la forma en que enseñaron inicialmente un concepto, al no conectar adecuadamente esa forma con las subsiguientes ampliaciones de la primera exposición.
En este escrito se analizan registros de clases de matemáticas a diferentes niveles, desde primaria hasta estudios superiores. A través de ellos, se constata la tendencia mencionada.

Abstract. In learning mathematics, there is a strong tendency to maintain the imprint of the first contact with a concept or procedure. This imprint cannot totally capture the mathematical concept and thus becomes an obstacle to construct it. Defective construction limits the possiblity for understanding a more advanced concept or prodecure based upon it. This behaviour is observed not only in students but also in teachers: in this case, what becomes difficult is to overcome the way they taught the inicial concept failing to connect adequately this way with the subsequent amplifications of the concept.
This article analizes class logs from different levels, from grade school to higher studies. Throughout them, the mentioned tendency is observed.

Jorge Martínez Sánchez
Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Autónoma de Querétaro

José Manuel Pinto Sierra
Centro de Estudios Sobre la Universidad
de la Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción

"No logro entender por qué no aprenden mis alumnos" es un pronunciamiento al estilo socrático que introduce en un camino difícil pero enriquecedor. Cuando en un curso inicial de capacitación de profesores en ejercicio, incluso al comienzo de los estudios a nivel de maestría sobre alguna rama pedagógica, un participante experimentado en la docencia asume dicha posición, se ha alcanzado un logro tenido en alta estima por cualquier capacitador de profesores: el desechar supuestos, prejuicios o enunciados con base emocional para emitir un limpio "la verdad es que no sé," requiere de una madurez epistemológica no siempre presente en los educadores, quienes hemos recorrido un largo camino precisamente para asumir con cuidado nuestro papel de detentores del saber y del proceder que deberemos transmitir a nuestros pupilos.

Pero ¿por qué nuestros alumnos no aprenden matemáticas? Bueno, para ser congruentes, deberemos comenzar afirmando que no sabemos. Realmente no sabemos. Se ha detectado un gran número de causas' cargarla y sentirse con la seguridad de haber *comprehendido* el fenómeno. Desde luego, la mayoría de las causas indicadas por los no especialistas son además circulares, o de segundo orden.

Por ejemplo, con seguridad reconoceremos la siguiente apreciación, escuchada en cualquier visita a un centro de investigación o de educación superior científicas en la cual tratemos el tema: lo que sucede es que los profesores no saben suficientes matemáticas. Y hasta estaremos de acuerdo con tal opinión. Pero "¿porqué los profesores no aprendieron matemáticas?" sería la pregunta obligada. Fácil respuesta: porque sus profesores tampoco sabían matemáticas. Parecería que Adán habría sido el primer culpable.

O ¿qué tal esta otra?: "Es que las matemáticas son muy difíciles." Claro que lo son, ¿no ven que a los alumnos les cuesta mucho trabajo aprenderlas?

"Es un problema complejo; los alumnos reciben del ambiente social, dentro y fuera de la escuela, el mensaje de que lo normal es no aprender matemáticas." Aguda observación psicosocial. Falta completarla con la explicación de cómo ha llegado tal mensaje al inconsciente colectivo. Quizá el origen se encuentre en el hecho de que las matemáticas son difíciles.

¿No será una deficiencia de los planes de estudio? Seguramente; sólo que para perfeccionar los planes actuales, primero habría que saber por qué los alumnos no aprendieron con ellos.

En las últimas décadas se ha avanzado enormemente en la detección de causas más profundas y a la vez más cercanas a una explicación útil del fenómeno. Sin embargo, la utilidad de muchas de ellas, en términos de lograr que los alumnos aprendan mejor, no ha podido plasmarse en un proyecto integrado que permita observar un avance notable en el aprendizaje de los alumnos en el país.

Existen esfuerzos internacionales por integrar las causas develadas aisladamente, en una teoría complexiva que permita comprender el fenómeno de la Educación en

Matemáticas. Mientras se construye tal teoría, los profesores podremos seguir aportando al fenómeno nuestras experiencias, nuestras intelecciones, nuestras intuiciones. De cualquier forma, aun después de conocer los enunciados de tales causas, frecuentemente tiene uno la sensación de que, en última instancia, lo único con lo cual cuenta es con lo (poco) que sabe de la materia, con su entrega a la enseñanza y con esas intuiciones.

Este escrito presenta el intento de sistematización de una de esas intuiciones. Conectada con lo que algunos investigadores han llamado *obstáculo didáctico*, parecida a lo que otro ha bautizado como la *metáfora estructural*, presenta una causa posible de algunas de las dificultades encontradas tanto en la enseñanza de algunos profesores como en el aprendizaje de algunos alumnos. Es una de las mencionadas develaciones aisladas, que deberá ser integrada a una construcción teórica más general pero que por lo pronto permite analizar algunos casos de enseñanza de las matemáticas y, ojalá, propiciará el mejorar ésta al menos parcialmente.

El obstáculo didáctico

La Escuela francesa de Burdeos ha producido una diversidad de categorías de análisis del fenómeno de la educación en matemáticas (Balacheff, 1984). Para fijar la atención imaginativa, ha utilizado metáforas atractivas (el "efecto Topaz," el "contrato didáctico," la "transportación didáctica," etc.) Prescindiendo de la intención de los autores al bautizar de esta forma sus categorías, se ha observado que dichas metáforas han llevado con frecuencia a falsas interpretaciones por parte de sus lectores (véase por ejemplo el comentario al calce de Pimm, 1988.) En su mayoría, tales metáforas anteriormente inéditas al menos cumplen con la función de advertir al lector del intento de mostrar algo nuevo para el conocimiento. El caso del obstáculo didáctico es algo más sutil: "obstáculo" es un término utilizado corrientemente como metáfora para el encuentro de una dificultad en el razonamiento o, en este caso, del aprendizaje. "Obstáculo didáctico" parecería entonces referirse a una dificultad en la Didáctica, es decir, a cualquier hecho que entorpezca la forma de facilitar el aprendizaje de los alumnos.

Pero un obstáculo es didáctico, de acuerdo a estos autores franceses, cuando su *origen* es el correcto uso anterior de la didáctica. Es decir, cuando lo que impide a un alumno construir un concepto matemático es precisamente un adecuado aprendizaje a un nivel anterior de su estudio.

El término intenta describir un fenómeno observado repetidamente. Un alumno aprende, por ejemplo, a sumar en columnas, *llevando* de una columna a la inmediata de la izquierda ("y llevamos una.") Ese mismo alumno, al intentar aprender a restar en columnas, se confunde al llevar nuevamente a la izquierda, y aumenta en uno el dígito superior en lugar del inferior: el haber aprendido correctamente el algoritmo de la suma introduce en su camino un obstáculo para aprender el algoritmo similar para la resta.

La metáfora estructural

El ejemplo preferido de Pimm (1987) para aclarar este concepto es el de *triángulo esférico*. Un triángulo, hablando con toda propiedad en castellano, es una figura plana de tres lados rectos. Y eso es para cualquier estudiante hasta antes de llegar a estudiar geometría esférica. El recorrido lógico para dar sentido a la expresión "triángulo esférico" es reconstruido de la siguiente forma por el mismo autor:

Al pasar de geometría plana a esférica, se conserva la noción de una línea cuya longitud es la distancia más corta entre dos puntos (*geodésica*); de esta forma, si en el plano se habla de "segmento recto," ahora se pasa, por aplicación del mismo concepto de geodésica, a considerar un "arco" (de una circunferencia sobre la esfera.) Pimm simboliza la metáfora de la siguiente forma (pág. 101):

circunferencias: esfera : : rectas : plano.

Mediante esta analogía, lo que antes se definía a través de tres lados rectos puede ahora definirse concibiendo tres lados curvos, tres arcos de circunferencias sobre la esfera. El concepto de triángulo, ahora generalizado, es el de una figura resultante de la intersección, dos a dos, de tres líneas geodésicas.

El uso del nombre "triángulo" para dichas figuras sobre la esfera, desde luego, no responde a simples analogías imaginativas o métricas; las implicaciones en cuanto a expansión de la teoría matemática son múltiples. Puede ahora hablarse de congruencia de triángulos esféricos, e investigar cuáles criterios de congruencia euclidiana continúan vigentes. A la inversa, estudiar las propiedades de estos triángulos arroja nueva luz sobre algunos teoremas de geometría plana.

Muy interesante en cuanto al uso que los matemáticos hacen del lenguaje. Con respecto a la educación, el encuentro de un alumno con el término "triángulo esférico" puede hacerle captar una simple contradicción, como sería el hablar de triángulos cuadrados.

Puede considerarse, a semejanza del concepto mencionado de la Escuela de Burdeos, que haber aprendido (correctamente) a distinguir triángulos pudiera llegar a ser un obstáculo para el estudio de los triángulos esféricos: las características del concepto mismo y el conocimiento de las propiedades de los triángulos (en el plano) pueden llevar a confusiones en caso de que alguno de ellos no se aplique a los triángulos esféricos.

La imagen primigenia

Los conceptos anteriormente expuestos pueden servir como punto de partida para comprender algunas manifestaciones observadas repetidamente en el fenómeno del aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, parece ser que algunas expresiones de profesores de matemáticas respecto de un tema que remonta a un inicio de mayor sencillez o a un contexto más simple, con frecuencia parecen contaminadas de esa sencillez cuando ésta ya no es adecuada para comprender o aplicar el nuevo concepto. Como muestra, analícese este fragmento de una sesión de clase de cuarto grado de primaria, en una escuela rural. El profesor está introduciendo una serie de ejercicios de aplicación de la multiplicación en problemas expresados verbalmente:

> "Recuerden que la multiplicación es una suma abreviada; pero también la multiplicación es una operación numérica que representa la unión de conjuntos equivalentes, o sea que podemos multiplicar vestidos con vestidos, dinero con dinero ¿verdad?"

Dos conjuntos finitos se denominan equivalentes, en el lenguaje matemático convencional, cuando tienen el mismo número de elementos. Los libros de texto utilizados en cursos anteriores por el mismo profesor de cuarto grado y por sus colegas (SEP, 1987) presentan la multiplicación a través de la unión de conjuntos equivalentes. Por ejemplo, tratan de llegar a la comprensión de 3×4 visualizando 3 conjuntos de vestidos, de 4 elementos cada uno, y pidiendo al alumno que los una gráficamente. El número de elementos del nuevo conjunto es el resultado de multiplicar 3 por 4. Desde luego, el énfasis está puesto en la cardinalidad igual de los tres conjuntos, no en que todos sean conjuntos de vestidos iguales.

La operación de sumar se presenta en textos anteriores, de manera semejante: un conjunto de 2 vestidos, unido a otro de 3 vestidos, resulta en uno mayor, de 5 vestidos: $2+3=5$. Para poder unir esos dos conjuntos, es imprescindible que éstos sean del mismo tipo de elementos; a este nivel de presentación no tendría sentido unir (sumar) un conjunto de 2 vestidos con otro de 3 zapatos. *Se suman vestidos con vestidos*.

Para ese profesor de cuarto grado, el concepto de equivalencia se ha contaminado por esta presentación de la suma. Conjuntos equivalentes parecen ser los que tienen elementos iguales, no igual número de elementos: "o sea que podemos multiplicar vestidos con vestidos, dinero con dinero ¿verdad?"

Nótese el uso de la proposición *con*: no dice el profesor que se multipliquen vestidos *por* vestidos, pues está atado a la noción de sumar vestidos *con* vestidos. El profesor no parece estar consciente de este uso, ni corregir su percepción seis minutos después, al analizar el problema de conocer el número de jarros que un artesano produce en 8 horas, si en una hora fabrica 3. Ya en el contexto de números indeterminados, se dirige a un alumno para preguntar:

> "...¿por qué crees que el primer artesano haga tres y se multiplique *por* ocho, tres por ocho veinticuatro?"

En la manera de hablar de este profesor, se multiplican vestidos *con* vestidos, pero se multiplican números *por* números. Su uso de preposiciones revela la fijación de una imagen anterior, del punto de partida utilizado por él para ayudar a sus alumnos en la construcción del concepto de multiplicación.

Un alumno del mismo profesor ofrece otro ejemplo del mismo fenómeno, en el transcurso de la solución de un problema, durante otra sesión de clase:

Profesor: ¿Quién quiere leer el primero, donde dice "resuelve estos problemas"?
Juan: Mi abuela tiene dos hijos. Uno de ellos es mi papá, el otro es mi tío Alberto que tiene seis hijos; yo tengo tres hermanos.
Profesor: A ver ¿cuántos nietos tiene la abuelita?
Aurelio: Yo sé cuántos.
Profesor: ¿Ya sabes cuántos? ¿Cuántos tiene?
Aurelio: Dos manos.
Profesor: ¿Dos manos? ¿Cuántos nietos tiene la abuelita?
Aurelio: (No responde.)

En diálogo con el profesor, otros alumnos encuentran la respuesta. El profesor verifica que todos la anoten en su cuaderno, incluyendo a Aurelio. Inmediatamente, los alumnos pasan a resolver otro problema: "Mi papá llega hoy de un viaje a las doce de la noche. Estoy comiendo y son las dos de la tarde. ¿Cuántas horas debo de esperar a mi papá?"

Una vez que se ha encontrado la respuesta, antes de seguir adelante el profesor verifica que Aurelio ha estado trabajando:

Profesor: Aurelio, ¿arreglaste el problema donde decías que era una suma? ¿Ahora qué hiciste?
Aurelio: Una resta.
Profesor: ¿Y cuánto te salió?
Aurelio: Dos manos.
Profesor: ¿Cuánto son dos manos?
Aurelio: Son diez, diez dedos.
Profesor: ¿Diez qué? Pero no estamos hablando de dedos...
Aurelio: Diez horas.

Aurelio tiene fijada la relación entre las operaciones y la forma en que comenzó a realizarlas tres años antes: utilizando los dedos de la mano. Es perfectamente capaz de resolver los problemas con poca ayuda; más aún: encontró la solución al primero antes que todos sus compañeros. Pero su respuesta desconcierta al profesor: "dos manos." En el segundo problema y la segunda vez que Aurelio ofrece su respuesta, el profesor comprende la situación y lleva a Aurelio a desprenderse de la fijación de la imagen: no hablan de manos y dedos, sino de relojes y horas. El niño reacciona sin dificultad; la fijación determinó su respuesta espontánea, no su capacidad total. Mayor fue la dificultad del profesor para reaccionar adecuadamente.

Otro tipo de fijación se observa en las claves que utilizan los alumnos para determinar las operaciones que deben ser realizadas para encontrar la solución a un problema (Cf.) Una de esas claves consiste en la cantidad de números que ofrece el problema: si son muchos, obviamente hay que sumarlos, prescindiendo de la relación operacional entre los datos del fenómeno en cuestión. Un ejemplo se encuentra en la siguiente grabación:

"Un autobús lleva 42 pasajeros. En la primera parada bajan 8 y suben 12. En la siguiente bajan 10 y suben 3. ¿Cuántos pasajeros van ahora en el autobús?"

Después de unos minutos de trabajo individual, el profesor observa los cuadernos:

Profesor: ¿Tú por qué dices que son 81? Hiciste una suma de todos los números que aparecen ahí. ¿Por qué crees que está equivocada?
Dolores: Está equivocada porque no es eso.

El profesor se ocupa de hacer comprender a los alumnos la relación entre los datos, cómo si suben 12 pasajeros, aumenta el número y por lo tanto hay que sumar el 12 al número anterior. Y cómo si bajan 8 pasajeros, el número disminuye y por lo tanto hay que restar 8 al número anterior.

Pero el criterio de Dolores es otro. En este problema, la llevó a un error. En otros, le permite encontrar la solución correcta. Dicho criterio queda claro en el siguiente fragmento:

"En el pueblo se va a instalar un lavadero público. Los costos son de:

475.00	de los fregaderos
260.00	de la tubería
166.00	del tinaco
530.00	del piso y techado
11,150.00	de mano de obra

¿Cuánto es el costo total del lavadero?"

Dolores: Una suma.
Profesor: ¿Qué van a hacer ahí?
Polo: Van a comprarlos.
Profesor: Sí, Dolores ¿qué es lo que se tiene que hacer?
Dolores: Una suma.
Profesor: ¿Por qué crees que se tiene que hacer una suma?
Dolores: Porque hay bastantes números.
Profesor: ¿Por eso rectificas que debe realizarse una suma?
Dolores: Sí.

La respuesta de la niña es inmediata, anterior incluso a la pregunta del profesor: Polo aún está analizando el problema, cuando ella ya sabe que debe realizarse una suma. Su análisis no tiene que ver con la relación operacional de los datos. Al iniciarse en la solución de problemas expresados verbalmente, Dolores construyó la clave: sumamos los números de un problema cuando éstos son "bastantes." Los esfuerzos del profesor por construir un camino adecuado de decisión se enfrentan con la primera imagen que Dolores ha construido (véase también Lambdin, 1994).

A otro nivel educativo, puede observarse otro ejemplo de contaminación causada por la primera imagen que genera todas las demás: En un examen aplicado a 62 alumnos de bachillerato, 53 de ellos aplicaron correctamente la llamada ley de los cosenos en un problema de trigonometría; pero 19 de éstos, al sustituir los datos en la fórmula, realizaron las operaciones de izquierda a derecha, asociando incorrectamente. Es decir, en lugar de operar

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos(-)$$

Terminaron con el número determinado a través de

$$(a^2 + b^2 - 2ab) \cos(-)$$

Los primeros encuentros de los alumnos con operaciones que involucraran más de dos números, varios años atrás, les pedían, efectivamente, que realizaran las operaciones de izquierda a derecha: 2+5+3. Se fijó entonces una imagen de procedimiento, que permanece por encima de su posterior aprendizaje de álgebra. Un nuevo ejemplo de la importancia de la imagen que genera las posteriores: ésta es una imagen construida alrededor de cómo proceder cuando las operaciones se realizan entre más de dos números.

En el mismo sentido, a nivel de educación secundaria, es frecuente que los alumnos interpreten $2+3\times5$ como $(2+3)\times5$, a pesar de habérseles explicado con detenimiento que la convención dicta que el producto tiene prioridad sobre la suma: la imagen primigenia tiene prioridad.

En un curso para 22 profesores de matemáticas a nivel medio y medio superior, la instructora propuso la siguiente pregunta:

¿Cuáles son iguales?

a) 3^{3^3} b) 3^{33} c) $(3^3)^3$ d) $3^{(3^3)}$

Después de comentar unos segundos entre ellos, todos los profesores coincidieron en que los incisos (a) y (c) eran iguales. Interpretaron de izquierda a derecha, en lugar de leer bases y exponentes. Este aprendizaje posterior se ha visto contaminado por la fijación de la imagen original sobre cómo realizar una interpretación de la simbolización de operaciones.

Conclusiones

Hemos mostrado la influencia de los primeros encuentros y construcciones de imágenes, en intentos posteriores de aprendizaje. Algunas de estas imágenes primigenias son correctas, otras incorrectas. Algunas son conceptuales, otras de procedimiento. Pero en los ejemplos ofrecidos y en muchos otros registrados, se observa el mismo fenómeno: el primer contacto con un concepto o procedimiento que debe ir superándose para dar lugar a otros más complejos, permanece en los alumnos y en los profesores como una dificultad en esa superación. La conciencia de un profesor respecto de este fenómeno le permitirá determinar con mayor prontitud y certeza la causa de muchas de las dificultades de sus alumnos. Conociendo la probable causa, podrá encontrarse el remedio. Una dimensión que debe permanecer en lugar importante para un profesor de matemáticas al dirigir su interacción con un alumno tiene que ver con la pregunta: ¿Cómo se inició este alumno en el tema que estamos estudiando?

Bibliografía

BALACHEFF, H. (1984) "Principales conceptos de Didáctica de las Matemáticas". México: TMI.

LAMBDIN, Diana; KLOOSTERMAN, P.; JOHNSON, M. (1994) "Mathematics teaching in the middle school." USA: *National Council of Teachers of Mathematics*, abril, vol. 1, núm. 1, p.p. 38-43.

PIMM, David. (1988) "Mathematical Metaphor." *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, núm. 1. Montreal, FLM Publishing Association, febrero.

PIMM, David. (1987) *Speaking mathematically: communications in mathematics classrooms*. London: Routledge & Kegan Paul. Traducción al español: *El lenguaje matemático en el aula*. México: Moratá, 1990.

SEP (1987) *Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública, libros de texto gratuitos, 1º a 6º grados de educación primaria.