Niveles Epistemológicos en el Aprendizaje de las Matemáticas

Resumen

Este trabajo es el resultado del seguimiento efectuado sobre la forma en la que fueron realizando avances en el conocimiento de las matemáticas dos estudiantes de la Maestría en Docencia de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Querétaro, cuya formación profesional no es matemática.
El estudio se desarrolló a partir de las reflexiones de los estudiantes sobre su propio proceso de aprendizaje, la revisión de algunos ejercicios que efectuaron como tareas y algunos exámenes.
Para describir el proceso de aprendizaje se consideran los siguientes elementos: lenguaje, revisión de ejercicios, análisis de errores cometidos en la solución de tareas y la elaboración de demostraciones. Es posible resaltar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas en estos dos individuos fue similar en los siguientes aspectos: 1) La forma de aproximación al objeto de estudio; 2) La influencia de la metodología empleada en las diferentes materias en la evolución del proceso; 3) El desarrollo no gradual del proceso determinado por la existencia de un punto de corte que permite establecer etapas con diferencias cualitativas y cuantitativas importantes.

Abstract. This work presents the development in mathematical thinking of two graduate students in the Teaching of Matehmatics master's program at the Universidad Autonoma de Queretaro. Queretaro. The undergraduate background of these students is not mathematical. This study was developed around the students reflexions on their own learning, as well as the analysis of asample of some exercises they worked on, either as assignments or exams.In order to describe their learning process, we focused on the following: language, exercise assesment, analisis of mistakes made in the solution to assigned exercises, and theorem proving. What we found is that the learning process of the two subjects was similar regarding the following: 1) The way of approaching the study subject; 2) The influence of the methodology employed at the different subject matters in their process' evolution; 3) The existence of a cut-off point in their evolution defining two separate stages with significant, qualitative as well as quantitative, differences.

Ma. Rosa Hernández Mondragón
Centro de Investigación en Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Introducción

Este trabajo es el resultado del seguimiento efectuado sobre la forma en la que fueron realizando avances en el conocimiento de las matemáticas dos estudiantes.

Los elementos considerados para la investigación fueron: la observación del proceso de aprendizaje, la descripción de los propios estudiantes sobre la evolución de su forma de estudio a lo largo de dos años y medio[1] y el cuestionamiento directo a los estudiantes sobre los cambios operados durante el proceso[2]. Así, para el desarrollo de este trabajo se consideraron: las reflexiones de los estudiantes sobre su propio proceso de aprendizaje, algunos de los ejercicios que efectuaron como tareas y algunos exámenes.

Marco Teórico

Una de las formas de la investigación en Educación Matemática, comprende el estudio del comportamiento de los individuos en lo relativo a las formas como realizan algunas tareas y a las estrategias que emplean para aprender. Entre los trabajos existentes sobre procesos de aprendizaje está el desarrollado por Hans Freudenthal quien basó parte de sus resultados en estudios realizados por Dieke y Pierre van Hiele[3]. Ellos encontraron que los procesos de aprendizaje son discontinuos, por lo que Van Hiele dedujo que existen *niveles de pensamiento*.

Al planteamiento de cómo aparecen las características que indican la existencia de diferentes niveles de pensamiento surgen dos distintas explicaciones: *aparición gradual* determinada por cambios continuos casi imperceptibles o *aparición no gradual*, (aparentemente instantánea) de características que antes no estaban presentes. Así, durante el proceso de aprendizaje se pueden definir dos tipos de cambios: *cualitativos y cuantitativos*.

Un *cambio de tipo cualitativo* se distingue por la aparición de una nueva actitud, tal actitud se puede detectar por la existencia de nuevas capacidades para enfrentar un problema. Los cambios cualitativos no se relacionan con la adquisición de nuevos conceptos, con la ampliación del vocabulario, ni con el manejo de nuevas técnicas, ya que estas características definirían *cambios de tipo cuantitativo*, así, la diferencia marcada por el nivel de complejidad en operaciones del mismo tipo, sería un cambio cuantitativo.

> En realidad, los testimonios a la mano sugieren que algunos aspectos o dimensiones del desarrollo intelectual se caracterizan por cambios cuantitativos o continuos, mientras que otros lo están por cambios cualitativos o discontinuos... (Ausubel, 1983: 206)

---

[1] Tiempo de duración de los estudios de maestría en Docencia de Matemáticas en la UAQ.

[2] Los estudiantes fueron cuestionados después de la conclusión de sus estudios por lo que sus aportaciones muestran su visión retrospectiva del proceso de aprendizaje durante la maestría.

[3] GOFFREE, Fred. Hans Freudenthal Working on mathemathics education, Amsterdam (1992).

Entre los elementos útiles para describir el proceso de aprendizaje se consideran: lenguaje, revisión de ejercicios, análisis de errores cometidos en la solución de tareas y la elaboración de demostraciones.

1. *Lenguaje*.- Pimm (1990) hace referencia al gran poder del lenguaje, en especial en el aspecto de la interpretación, ésta es determinante en el aprendizaje de las matemáticas porque los conceptos pueden interpretarse como tales o puede ampliarse su significado, lo que en ocasiones conduce a la destrucción, en vez de la expansión del significado. La construcción del significado matemático requiere utilizar una red de conocimientos matemáticos anteriores y a veces tal construcción está sujeta a interferencias representadas por los significados no matemáticos de términos tomados del registro ordinario en provecho del matemático; los cuales pueden influir sobre la comprensión matemática y ocasionan frecuentemente confusiones.

2. *Solución de problemas*. Los niveles de pensamiento pueden caracterizarse si se considera:

(a) El enfoque:

> El enfoque de ensayo y error consiste en la variación, aproximación y corrección aleatorias o sistemáticas de respuestas hasta que surge una variante acertada. El enfoque de discernimiento, supone una disposición hacia el descubrimiento de una relación significativa de medios-fines que fundamenta la resolución (Ausubel, 1983:487)

(b) La forma: "A un nivel más bajo las cosas se hacen intuitivamente, informalmente y actuando sobre objetos, pero esto se contempla de forma distinta a un nivel más alto"[4]

Los dos aspectos anteriores enfoque y forma determinan la estrategia que el estudiante sigue al resolver un problema. Si un niño ve en un problema los números 34 y 42 piensa en una suma o multiplicación mientras que si ve 42 y 34 puede pensar en restarlos; por otra parte, si los números fueran 63 y 3 tal vez pensaría en restarlos o dividirlos.

Este ejemplo ilustra cómo la elección de la operación puede hacerse simplemente por la comodidad que le representa al individuo o porque su forma concuerda con el esquema que se tiene.

---

[4] Van Hiele describe así lo que ocurre en los niveles de pensamiento. GOFFREE, Fred. *Hans Freudenthal Working on mathemathics education*, Amsterdam (1992)

Así por ejemplo, al determinar la validez de la siguiente argumentación:

Si hace calor, estaré enfermo
No hizo calor
$\therefore$ No estaba enfermo.

El contenido de las frases determina que algunos piensen que es válido, antes que investigar la forma lógica del mismo.[5]

(c) La lógica empleada:

La fase lógica abstracta del desarrollo cognoscitivo presenta características particulares que la distinguen.

> El alumno comienza a depender menos de apoyos empírico-concretos al vincular significativamente relaciones abstractas con la estructura cognoscitiva. A la larga dejará de necesitarlos totalmente al entender y manejar significativamente relaciones entre abstracciones. (Ausubel, 1983:212)

3. *Desarrollo de demostraciones*.- El significado matemático de prueba y de demostración es muy importante, la adquisición de tal significado parece estar relacionada con el éxito o fracaso en la realización de demostraciones por los estudiantes.

Una prueba está constituida por todos aquellos medios que permiten convencer de que una afirmación es cierta. Pero una demostración en el contexto matemático significa hacer una argumentación formal. Aunque los estudiantes en apariencia distinguen la diferencia entre ambas, con frecuencia existe confusión en su aplicación.

[5] La siguiente tabla reportada por Lambdin , Kloosterman y Johnson, 1994; (como una adaptación de Sowder 1988), muestra una lista de estrategias usadas por niños en la solución de problemas:

Estrategia de Imitación	1. Encontrar los números y sumarlos (restarlos, multiplicarlos o dividirlos, dependiendo del trabajo más recientemente efectuado en clase o de la operación más cómoda para el alumno). 2. Adivinar la operación a usar.
Estrategia guiada por la operación	3. Observar los números; ellos te indicarán el tipo de operación a emplear (por ejemplo "si son como, 78 y 54, entonces es probable tanto sumarlos como restarlos. Pero [78 y 3] aparentan una división por el tamaño de los números 4. Intentar todas las operaciones y escoger el resultado que parezca más razonable.
Estrategias menos inmaduras	5. Buscar "palabras o frases clave" que indiquen el tipo de operación a usar ligeramente (por ejemplo *todos junto* significa sumar). 6. Decidir si la respuesta debe ser mayor o menor que los números dados. Si es mayor, intentar la suma y la multiplicación y escoger la que de la respuesta más razonable. Si es menor, intentar restar o dividir y escoger la más razonable.
Estrategia deseada	7. Escoger la operación que se ajuste al significado del problema.

Braconne y Dionne (1987)[6] realizaron una investigación sobre el entendimiento de los términos *prueba y demostración*, con estudiantes de quince años de edad y maestros. Los resultados muestran que para los maestros *prueba y demostración* no son sinónimos mientras que la diferencia entre ambos términos, no es clara para los estudiantes.

Si se considera la siguiente descripción de los niveles (Hoffer, 1983; Usiskin, 1982) puede decirse que se tiene éxito en la elaboración de demostraciones matemáticas una vez que se ha logrado un determinado nivel.

> Tercer nivel: Orden. El estudiante puede lógicamente ordenar figuras y relaciones pero no opera en un sistema matemático. Así puede seguir deducciones simples, pero no entiende una prueba completa.
>
> Cuarto nivel: Deducción. El estudiante entiende el significado de deducción y el rol de los diferentes elementos en una estructura deductiva. Así puede inventar pruebas o al menos entenderlas.
>
> Quinto nivel : Rigor. El estudiante puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos y es capaz de hacer deducciones abstractas.[7]

Con el objeto de saber si un estudiante relacionado con el concepto de prueba matemática puede entender claramente que una prueba matemática formal confiere el atributo de validez a priori y universal y por ello excluye la necesidad de pruebas adicionales, Fischbein y Kedem (1982)[8], efectuaron un estudio cuyos resultados permitieron determinar tres categorías: *1) consistente y formal, 2) consistente empírico y 3) básicamente inconsistente*. Los estudiantes pertenecientes al primer grupo entienden correctamente la naturaleza de la prueba en matemáticas. Los del segundo la aceptan pero creen que contrastar con casos particulares apoya la validez de la misma. Lo de la tercera categoría aceptan la validez absoluta de la demostración pero no rechazan la necesidad de pruebas adicionales por eso muestran comportamiento inconsistente.

Presentación del trabajo

Este reporte describe el proceso de aprendizaje de matemáticas de dos estudiantes[9] de maestría en Docencia de Matemáticas cuya formación profesional no es eminentemente matemática, puesto que ambos estudiaron la licenciatura en Química.

Es posible resaltar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas en estos dos individuos fue similar en los siguientes aspectos:

---

6 Cit. por HERSHKOWITZ, Rina et al. en *Psychological Aspects of Learning Geometry*, Mathematics and Cognition, pág. 92

7 Ibíd., pág. 72

8 Ibíd., pág 92

9 Los estudiantes hombre y mujer de 35 y 30 años respectivamente.

1) La forma de aproximación al objeto de estudio;

2) La influencia de la metodología empleada en las diferentes materias en la evolución del proceso;

3) El desarrollo no gradual del proceso determinado por la existencia de un punto de corte que permite establecer etapas con diferencias cualitativas[10] y cuantitativas importantes.

Los estudiantes cursaron el posgrado en dos años y medio, tiempo durante el cual se registró la forma en que se estudiaba matemáticas, como un indicador del método bajo el cual se aprendía.

I. Forma de aproximación al objeto de estudio

Los estudiantes mostraron fuertes variaciones en su forma de aproximación al objeto de estudio a lo largo del período mencionado, sin embargo estas formas de aproximación son semejantes para ambos estudiantes, con diferencias en la velocidad en que se desarrollaron.

La observación de los métodos de estudio de ambos estudiantes, a lo largo del período de duración de la maestría, permitió distinguir tres etapas relativas a sus procesos de aprendizaje:

a) Aprendizaje basado en la memorización

Al inicio del programa de maestría, el aprendizaje de conceptos en ambos estudiantes estuvo basado en un proceso de memorización, la elaboración de demostraciones se hacía por imitación de demostraciones similares, que se repetían en forma casi idéntica. En lo relativo a la solución de problemas, sólo se resolvían problemas semejantes al ejemplo, repitiendo los pasos, conservando incluso el mismo orden.

Los estudiantes no reflexionaban en el contenido del problema, ni trataban de interpretarlo; dependían fuertemente de la memorización.

Se empleaba un procedimiento común para resolver problemas semejantes, tal método parecía haberse interiorizado en forma mecánica, puesto que en varias ocasiones se intentaba resolver bajo el mismo esquema general, problemas que no tenían una estructura parecida, esto se usaba como una forma de aproximación inicial, puede decirse que en cierta forma, se probaban diferentes métodos, para escoger después el que condujera al resultado esperado o aquel que mereciera más credibilidad

[10] *Diferencia cualitativa.*- Es importante distinguir entre los cambios relativos al desarrollo cognoscitivo que son de naturaleza cualitativa y los que son cuantitativos.

y confianza, ambas motivadas por la apariencia, o por la forma del problema. Así por ejemplo, al seleccionar la operación para resolver un problema, procedían como algunos niños que en su intento por resolver problemas con enunciados, se basan en cuestiones tales como el tipo de números contenidos en el enunciado del problema o bien en la posibilidad de operarlos mejor, en ocasiones son factores de fuerte influencia en la selección de la operación, la confianza, el gusto que el individuo tenga hacia la misma e incluso la familiaridad que tengan con ella.

Las observaciones registradas en este estudio, muestran que las estrategias empleadas por los sujetos son similares a las inspiradas en los niños por el tipo de números; sólo que en este caso se relacionan con el tipo de operación o con la forma más cómoda de operar o efectuar demostraciones.

Cuando se deseaba demostrar algo, los primeros intentos se hacían en función de la preferencia o facilidad que representaba una forma particular de demostración. Una de las formas de demostración más complicadas para uno de los sujetos, era la reducción al absurdo por lo que aunque sonara factible demostrar por ese método, se recurría primero a otras formas de demostración por la incomodidad que para él representaba estructurar una reducción al absurdo.

En el caso analizado, *el tipo de expresiones, la forma del enunciado, la ubicación del problema*, influían fuertemente en el momento de tomar una decisión sobre la forma más conveniente de enfrentarlo. Por ello para resolver un problema era necesario ubicar, incluso en el libro, el tipo de ejercicios a los que pertenecía, para imaginar la forma de resolverlo.

La *"búsqueda de palabras clave"* que permitieran escoger entre dos diferente métodos, constituye otro ejemplo de este tipo de influencias, como puede verse en los siguientes casos:

¿cuánto daría si se juntan?	se asocia a	**suma, unión**
repartir	se asocia a	**división**
perder o quitar	se asocia a	**resta.**

En Cálculo se buscaban en el enunciado de un problema las palabras o frases claves que sugirieran la operación así, la palabra *velocidad* se asociaba a *derivar*, aun cuando en ocasiones lo que se daba en el contexto del problema, era la ecuación de la velocidad y se requería integrar para encontrar el desplazamiento.

Para hacer una demostración se intentaban varias formas. La ruta no estaba enmarcada por la formalidad, más bien mediante una técnica de ensayo y error que fuera brindando posibilidad de continuar. Se cambiaba de alternativa cuando ésta no ofrecía posibilidad de llegar a lo esperado. En síntesis puede decirse que los procedimientos no se seleccionaban guiados por una razón matemática, sino que aparecían como pruebas o intentos sucesivos por alcanzar un resultado determinado. En algunos casos el individuo confundía hacer una demostración con dar una justificación, por lo que frecuentemente cuando se le pedía demostrar lo único que hacía era exhibir una justificación, que él pensaba era una demostración formal. En algunas otras ocasiones sólo realizaba un análisis previo a la demostración y consideraba a éste como la demostración en sí misma, sin darse cuenta que con todo lo que había escrito no demostraba lo que deseaba.

En un examen de Cálculo I, uno de los estudiantes realiza un análisis previo solamente, y cree haber demostrado un teorema.

Se le pide demostrar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$.

El estudiante escribe: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > o\ \exists\ M > 0\ _{\ni}\ x > M \to |\ f(x) - L\ | < \varepsilon$ por demostrar que: $\forall\ \varepsilon > o,\ \exists M > 0,\ _{\ni}x > M \to \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \to \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, es decir $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$ como $x > M$ y $M > 0$ $x > M > 0$ entonces $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ y como $x > M$ $\frac{1}{x} < \frac{1}{M}$, de donde si $\frac{1}{x} < \varepsilon$ y $\frac{1}{x} < \frac{1}{M}$ supongo $\varepsilon = \frac{1}{M}$ con lo cual queda demostrado.

Esta parte corresponde al análisis que en este tipo de problemas se hace previamente a la demostración, a fin de proponer una M adecuada para desarrollar la demostración en forma conveniente. El alumno toma este desarrollo como una demostración, sin darse cuenta de que lo hecho no demuestra el teorema.

En este nivel todo lo que los estudiantes hacían se regía por la coherencia que el individuo le atribuía, es decir, la selección de los métodos de solución de problemas tenía que ser coherente con los esquemas del individuo más que con la matemática misma.

Lo anterior influía en el hecho de que al inicio del curso de Álgebra Superior eran incomprensibles expresiones como las siguientes:

Definición de idempotencia de la operación *: a*a=a

Establecimiento de una operación: a × b = 2 a + b,

pues se tomaban en el sentido conocido de multiplicación, por lo que se intentaba incluso hacer despejes, sin considerar que ello representaba simplemente la definición de cierta operación.

El arraigo existente de los viejos conocimientos representaba otro tipo de impedimento a la incorporación de conocimientos nuevos ya que éstos eran materialmente rechazados si parecían contradictorios a lo hasta entonces conocido como verdades matemáticas absolutas, esto se presentaba también cuando los nuevos conceptos, no contradecían a los anteriores pero sí se superponían a los ya existentes, haciendo que surgieran confusiones en su uso.

En este aspecto, ambos estudiantes refieren problemas al intentar incorporar nuevas ideas sobre las operaciones suma y multiplicación, puesto que los conceptos que hasta ese momento se tenían sobre tales operaciones prevalecían sobre los nuevos haciendo que se rechazaran las sumas o las multiplicaciones que no operaban en la forma conocida hasta ese momento. Por ejemplo al resolver el producto punto entre vectores se prefería emplear una propiedad "que recordaba a la distributividad", aunque no fuera apegada a la definición, como en: $(a_1,a_2) \cdot (a_3,a_4) = (a_1a_3, a_2a_4)$

Esto hacía que muchos de los problemas no pudieran resolverse debido la incapacidad de desprenderse de los conceptos anteriores, o por el intento de usarlos como conceptos ampliados para su uso en *casos especiales o raros*.

Un ejemplo de la dificultad descrita anteriormente, se observó al estudiar temas de geometrías no euclidianas. El problema apareció con el empleo de palabras conocidas en contextos muy diferentes al *tradicional*. Así había dificultades para aceptar que podía llamarse recta *a cosas que se sabe no son rectas*, y aplicar propiedades que no pueden generarse intuitivamente. Parte del problema radicó en que las tales conceptos estaban definidos en forma aparentemente contradictoria a la conocida, hasta ese momento.

Los problemas anteriores también pueden ser resultado de dificultades por la *fijación de los significados*.[11]

Cuando se definen en el curso de Álgebra los primos entre sí (primos relativos). Se dice:

"Dos enteros son primos entre sí si su máximo común divisor es uno", la palabra conocida *primos* inmediatamente evocó a los números primos (2,3,5,7,..) y evitó poner atención a la siguiente parte (entre sí) a la cual no se le atribuyó importancia. Por lo que el significado de primos entre sí, quedó fijado al de primos simplemente.

La definición de homomorfismo representa otro ejemplo de confusión, debida en este caso a una interpretación parcial de la misma.

Una aplicación ϕ de un grupo G en un grupo G se dice que es un homomorfismo si para a, b $\in$ G cualesquiera siempre se tiene $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$.

Los alumnos veían en las expresiones $\phi(ab)$ y $\phi(a)\,\phi(b)$ y simplemente *multiplicaciones*.

[11] Pimm. establece como un medio utilizado por los alumnos para construir el significado matemático, la búsqueda de un contexto en el que puedan interpretarse las definiciones ya asimiladas. Parece que para ello se utiliza una importante trama de conocimientos matemáticos anteriores para proporcionar consistencia.

En este nivel resultaba difícil distinguir que en $\phi\,(ab)$ y $\phi\,(a)\,\phi\,(b)$ se representaban productos distintos, ya que en el primer caso se trata de un producto de elementos de G, mientras que en el segundo miembro de la relación el producto es el de elementos en G. Al aplicar la definición anterior, los estudiantes se guiaban exclusivamente por la forma de la expresión sin analizar el tipo de productos contenidos en ella.

b) El aprendizaje por analogía y repetición exhaustiva de problemas similares

Durante esta etapa el estudiante aplica un patrón para resolver los problemas. Aquellos que logra resolver son similares entre sí, es decir, pueden variar su forma de presentación pero mantienen una estructura común.

Después de repetir el proceso muchas veces, puede identificar ejercicios que corresponden a un método específico de solución. Es posible que el estudiante no comprenda los conceptos subyacentes a las técnicas de solución y sin embargo, logre resolver los problemas con éxito puesto que solamente está comparando y así, por imitación de un algoritmo, o mediante ligeros ajustes hechos a las técnicas conocidas, las adapta al problema nuevo y logra resolverlo.

En virtud de que no hay una comprensión conceptual profunda ni un entendimiento completo de las técnicas, en este nivel las dificultades se presentan cada vez que aparece un problema para el cual no se ha revisado un modelo previo. Como no se tiene un buen manejo de la teoría, el estudiante ve sólo casos particulares, no puede hacer un análisis general de la situación.

En este nivel, el aprendizaje parece lograrse en el momento en que el estudiante es capaz de clasificar los problemas por tipos y asignarles un método de solución. Hay algo que le permite "percibir" semejanzas y diferencias, y éstas le sirven como el indicador de que el problema a resolver pertenece a un determinado tipo. En este momento usa palabras que refieren la comparación que está elaborando en su mente, algunos ejemplos de estas frases son: "este se resuelve como el ejemplo...", "la diferencia con el ejemplo anterior es que...", etc.

Mientras el estudiante no logra detectar lo anterior continua necesitando resolver más problemas y en cada uno encontrará dificultades distintas.

La necesidad de coherencia, definida en la etapa anterior como *no contradicción con las propias creencias ni con los aprendizajes anteriores*, se transforma ahora en *necesidad de consistencia en formas de solución*, y constituye la nueva metodología empleada.

Como resultado de esto, la forma de estudiar consistía en el seguimiento de patrones, y en su aplicación a un gran número de casos semejantes entre sí.

Algunos ejemplos:

1. Las demostraciones de la asociatividad representaban un patrón que guardaba grandes semejanzas, por ello se seguía el mismo método para demostrar la asociatividad para operaciones con funciones, con vectores, etc.

a) Para funciones.

Sean $f:A \to B$, $g:B \to C$, $h:C \to D$ funciones. Entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

b) Para vectores

Sean $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V$, entonces $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$

c) Para operaciones

La operación interna $x * y = x + y - xy$ es asociativa en R

2.- Cuando se deseaba demostrar una propiedad que ya se había demostrado en otro contexto (para otra operación, otro conjunto, etc.), se hacía en forma similar sin analizar posibles inconvenientes o limitaciones determinados por el nuevo marco.

Así, la demostración del teorema:

Si a, b y c son enteros y $a \neq 0$, entonces $ab = ac \to b = c$

se intentaba resolver en forma similar a la demostración del teorema de cancelación:

Si a, b y c son enteros y $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

Escribiendo:

Si a, b y c son enteros y $a \neq 0$, entonces $ab = ac$, multiplicando por a^{-1} se tiene $a^{-1}ab = a^{-1}ac$, de donde $b = c$

Las demostraciones anteriores podían emplearse como un antecedente al momento de intentar demostrar que dados a, b en el grupo G, entonces las ecuaciones $a \cdot x = b$ y $y \cdot a = b$ y tienen soluciones únicas para x y y en G. en particular, las dos leyes de cancelación: $a \cdot u = a \cdot w \to u = w$ y $u \cdot a = w \cdot a \to u = w$ se verifican en G.

Otro ejemplo, para resolver el problema de demostrar:

Si $a + c \equiv b + c \pmod m$ entonces $a \equiv b \pmod m$ se recurría a la *demostración conocida* del teorema:

Si $a \equiv b \pmod m$ entonces $a + c \equiv b + c \pmod m$, sólo que ahora se hacía en sentido inverso.

Ambos individuos alcanzaban seguridad en el dominio de la técnica y pensaban que habían aprendido cuando lograban identificar, mediante un ligero análisis del problema, las semejanzas y diferencias con respecto al patrón.

Memorizar y conocer cómo aplicar las diferentes propiedades son habilidades diferentes, que hasta esta etapa se habían logrado dominar, sin embargo el fracaso se presentaba por no alcanzar a visualizar *cuándo aplicar*.

En este nivel la certeza del aprendizaje se basaba en la identificación o tipificación adecuada del problema.

Existía una débil comprensión de la teoría, algunos temas parecían o totalmente aislados o tan parecidos que en algunos momentos resultaban redundantes, no se lograba establecer con claridad el alcance de las definiciones, ni las consecuencias de los teoremas. Prevalece el obstáculo constituido por el lenguaje que en este nivel constituye una franca agresión por la extensión de los conceptos a nuevos ámbitos que en muchas ocasiones parecen contradictorios.[12]

Fue posible detectar en ambos estudiantes, un paralelismo entre el proceso de aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del lenguaje matemático. La estrecha relación entre éstos, se manifiesta por el hecho de que el fracaso en el aprendizaje del *lenguaje de las matemáticas*[13] puede ser limitativo del aprendizaje de matemáticas.

Como ejemplos de problemas que se presentaron en ambos estudiantes por el deficiente uso de la teoría básica, están las confusiones en el uso de algunas propiedades conocidas *desde siempre*, aplicables a las operaciones suma y multiplicación que frecuentemente se empleaban cuando su uso no estaba autorizado o era incorrecto, esto fue un fuerte factor de dificultad en cursos como los de geometría analítica, álgebra superior y álgebra lineal (cursos con los que prácticamente inicia la maestría).

Ejemplos de ello se tienen en el uso de propiedades como conmutatividad, distributividad, existencia de idénticos o inversos cuando éstas no estaban autorizadas.

Un caso relacionado con el uso de una propiedad no autorizada se tiene en álgebra. En un grupo G, $a \cdot x = a \cdot y$ implica que $x = y$. Análogamente, $x \cdot a = y \cdot a$ implica $x = y$, esto permitía observar que en los grupos era posible cancelar. Como las leyes

[12] "Los significados no matemáticos de términos tomados del registro ordinario en provecho del matemático pueden influir sobre la comprensión matemática, siendo frecuentemente motivo de confusión". (Pimm 1990).

[13] "Es tan grande la fuerza del lenguaje que casi cualquier colocación de términos puede interpretarse hasta cierto punto. Sin embargo, el peligro mayor consiste en que la ampliación inexplicada de conceptos puede acabar, con demasiada frecuencia, en la destrucción, en vez de la expansión del significado". Ibid.

de cancelación eran conocidas, su uso se extendía en los nuevos contextos, de manera natural, sin pensar que su empleo podía ser erróneo, de $a \cdot x = a \cdot y$ se concluía $x = y$, aun cuando no se tenía forma de saber si $a \cdot x = x \cdot a$. Este error refleja el desconocimiento de la teoría básica por un lado, y por otro la extensión de las propiedades conocidas en un medio desconocido.

Las definiciones de conceptos, se memorizaban textualmente o se buscaban ejemplos que permitieran recordarlas por alguna aplicación, esto permitía el establecimiento de relaciones entre el concepto y ejemplo, de los cuales se era totalmente dependiente.

Por ejemplo, las definiciones de continuidad y de límite, que se incluyen en el programa de Cálculo I eran prácticamente imposibles de aplicar correctamente.

Un ejemplo de lo anterior se tiene en la demostración del siguiente teorema:

Sean f, $g: R \rightarrow R$ tales que la Imagen de g es subconjunto del Dominio de f y si g es continua en x_o y f en un intervalo que contiene a $g(x_o)$ entonces fog es continua en x_o.

El estudiante elabora la demostración de la siguiente manera:

Hipótesis : g es continua en x_o es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \rightarrow | g(x) - g(x_0)| > \eta$, donde η es un intervalo que contiene a $g(x_o)$

f es continua en η, es decir $| g(x) - g(x_0) | > \eta \rightarrow | f(g(x)) - f(g(x_0))| > \varepsilon$.

Se quiere demostrar que fog es continua en x_o, es decir que $\forall$ $\delta > 0, \exists$ $\varepsilon > 0$ tal que $| x - x_0| < \delta \rightarrow | (fog)(x) - (fog)(x_0)| < \varepsilon$

En esta parte de la demostración elaborada por el estudiante se ven dos incoherencias que para él son imperceptibles:

1) Pretende comparar mediante la relación < un número con un intervalo, es decir, ε con η

2) Establece que desea probar que $\forall\, \delta > 0, \exists\, \varepsilon > 0$, que es justo al revés de lo que debía intentar.

En esta parte de la demostración se observa un manejo deficiente de la teoría pero además un bajo nivel en la comprensión de la definición de continuidad, sin embargo el estudiante ajusta lo que recuerda de ella para poder hacer la demostración, aunque ésta resulte forzada. En demostraciones de límites y continuidad frecuentemente se daba ε, en lugar de dar δ.

En cuanto a problemas con los métodos matemáticos, se tenían dificultades ɔr su fragmentación excesiva que los convertía en una gran cantidad de casos ɑrticulares.

También había tropiezos importantes en la elaboración de demostraciones, al ıtentar demostrar un teorema, se empleaba como hipótesis lo que se deseaba emostrar, aunque también era frecuente que en el desarrollo de la demostración se mpleaba la conclusión, y se asumiera que era verdadera.

El problema radicaba a veces en la elección del método de demostración, pero demás había dificultades cuando se era incapaz de ver que las demostraciones ıechas carecían de *validez metodológica o conceptual.*

:) La búsqueda de una lógica o razón de ser que permita intuir un método a seguir ɜn la resolución de problemas, en la demostración de teoremas.

Se caracteriza por la aparición de una forma diferente de aproximación a la ;eoría y un cambio en la metodología de estudio, en cuanto al primer punto se dejan :nenos conceptos a la memorización, y cuando ésta se presenta, aparecen preguntas sobre la razón por la cual se hacen los planteamientos en una forma determinada y no de otra. Se abandonan en gran medida las claves que podrían sugerir operaciones o técnicas de solución, representadas por: el tipo de números, la operación más probable, la metodología vista en las últimas clases, la ubicación del problema en el libro, etc.

Se buscan las justificaciones teóricas, los axiomas y teoremas conocidos que permitan hacer demostraciones.

La existencia de diferencias entre ésta y la etapa anterior puede ejemplificarse con el intento de demostración del corolario siguiente:

Todo conjunto de n elementos de $F^{(n)}$ linealmente independientes es una base de $F^{(n)}$.

Para elaborarla se consideraban elementos de $F^{(n)}$ linealmente independientes y se pretendía demostrar que se trataba de una base pero no se encontraba la forma concretar la propuesta. Una forma sencilla de estructurar la demostración sería tomar un elemento arbitrario de $F^{(n)}$ e intentar demostrar que v es una combinación lineal de $v_1,...v_n$. Suponer que no y ver que los vectores son linealmente dependientes.

La necesidad de considerar negaciones es difícil para etapas anteriores sin embargo en este nivel se puede manejar, lo que implica una situación a partir de exhibir una negación.

Un problema que aparece frecuentemente en esta etapa radica en el hecho de que se duda de todo. Existen dificultades para avanzar por la búsqueda excesiva de justificaciones, por el apego total a la razón de ser.

Hay también una transformación de los procesos de clasificación de estrategias y segmentación de la teoría, presentes en la etapa anterior hacia una fase de análisis comparativo de las distintos métodos donde el individuo empieza a ser crítico, aunque esta crítica es sólo para validar y cuestionar, no es propositiva. Se cuestiona, se compara, se identifica y no sólo se memoriza; lo anterior es el antecedente hacia la comprensión matemática.

En este momento se hacen aplicaciones inmediatas de la teoría aprendida. Pueden elaborarse demostraciones sencillas, resolverse problemas en los que se requiera aplicar un determinado modelo matemático, esto limita la variedad de problemas posibles de resolver a aquellos que cumplan las características de aplicación del modelo, sin embargo tiene mayores posibilidades que las técnicas rutinarias de las etapas anteriores.

d) El desarrollo de la intuición y algunas capacidades creativas[14] en el trabajo matemático.

A esta etapa se accede de manera casi imperceptible para el individuo. De momento se le ocurren ideas que antes nunca hubiera tenido, puede proponer una metodología para la solución de un problema que sea totalmente diferente a las hasta ese momento analizadas, es decir se ha vuelto propositivo, ha desarrollado algunas *capacidades creativas*, éstas se manifiestan cuando sugiere algún método para llegar a la solución de problemas, cuando es capaz de captar intuitivamente conceptos, o cuando puede intuir formas de aproximación exitosa a la solución de un problema.

El alumno que ha desarrollado capacidades creativas en matemáticas muestra un comportamiento más autónomo, menos rígido que le permite *inventar* con relativa facilidad procedimientos para resolver un problema, para iniciar una demostración. Puede darse el caso de que sugiera incluso formas alternativas de solución para problemas ya resueltos o simplemente proponga alguna forma factible de iniciar una demostración.

14 "El término creatividad es uno de los más vagos, ambiguos y confusos de la psicología y la educación contemporáneas. Una fuente de confusión semántica se refleja en el hecho de que no se distingue entre creatividad como capacidad muy particularizada y sustancial y la creatividad como una constelación general de capacidades intelectuales de apoyo, variables de la personalidad y rasgos que se manifiestan en la resolución de problemas. "La creatividad es una capacidad particularizada y sustancial, mientras que las capacidades creativas comúnmente medidas son funciones de apoyo de la intelectualidad y la personalidad que, como la inteligencia general y la capacidad de concentración disciplinada, contribuyen a darle expresión a la creatividad" (Ausubel, 1983:502).

¿Cómo y cuándo se da el paso de la etapa de análisis crítico a la nueva etapa, en la que no sólo se analiza, sino se propone? Es difícil determinarlo, aunque sí existen algunos antecedentes de su aparición:

Resuelve problemas no rutinarios.- Puede cambiar con relativa facilidad el tipo de problemas que resuelve, no requiere resolver un elevado número de problemas con características similares para tener una idea general de los procedimientos que debe emplear en su solución.

Puede apoyarse en ciertos problemas para solucionar otros más complejos o simplemente diferentes en sus características, sin que ello lo conduzca a confusiones o a intentos de repetición.

Construcción de argumentos.- Establece razonamientos lógicos. Hace implicaciones entre los diversos enunciados y tales implicaciones le permiten establecer condiciones de necesidad, posibilidad y suficiencia básicas para la estructuración de sus argumentos. Esta situación es especialmente útil en el momento de elaborar demostraciones, ya que puede estructurar sus razonamientos creando formas generales; establece relaciones entre ideas y puede operar en un nivel de abstracción mayor. Esto le permite razonar de forma distinta, no sólo basándose en un conjunto particular de datos sino que incluso recurre a operaciones lógicas indirectas, para estructurar su razonamiento.

En este nivel es posible decir que ya es capaz de dar una estructura o un orden a sus demostraciones, es decir puede ver los distintos casos que sería necesario contemplar al hacer una demostración, como en el caso de la demostración del teorema de Rolle:

Teorema. Sea f una función que satisface las siguientes hipótesis:

i) f es continua en el intervalo cerrado [a,b].

ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a,b).

iii) f(a)=f(b)

Entonces existe un número c en (a,b) tal que f _(c)=0

Antes de hacer la demostración, analiza algunas funciones típicas en las cuales el teorema sería válido. Desprende de ello tres casos:

1) f (x) = k, donde k es una constante.

2) f (x) > f (a) para alguna x en (a,b)

3) f (x) < f (a) para alguna x en (a,b)

Esta nueva manera de exploración previa a la redacción de la demostración no se parece en nada a los primeros métodos en los que las hipótesis no decían más de aquello que en ellas estaba literalmente escrito.

Distingue con gran claridad entre las forma correctas e incorrectas,. por lo que detecta con mayor facilidad problemas relativos a la validez de sus argumentaciones.

Usa representaciones y hace generalizaciones con la misma facilidad con la que da ejemplos y encuentra aplicación a casos particulares. El individuo puede efectuar un proceso de generalización, seguido de un proceso en el cual sea necesario hacer alguna consideración para un caso particular sin que esto lo lleve a conclusiones equivocadas.

Las aspectos anteriores sirven de base para determinar las características de esta etapa.

1) Aparición aparentemente espontánea de ideas

Esto no quiere decir que sea hasta esta etapa cuando el individuo sea propositivo; antes también tenía ideas sólo que frecuentemente eran inspiradas por la experiencia inmediata anterior, es decir estaban relacionadas con la repetición de procedimientos, basadas en la memorización de planteamientos, y guiadas por la asociación entre reglas, operaciones o de problemas conocidos.

La diferencia observada en este nivel radica en el hecho de que ahora las ideas no están directamente relacionadas con los temas específicamente abordados en los enunciados de los problemas, ni estrictamente atadas a formatos ya estudiados, es decir son más originales, le permiten enfrentar con éxito un problema diferente a todo lo que hasta ese momento había visto mediante la propuesta de posibles mecanismos de solución. Puede hacer transferencias del conocimiento, lo que le permite aplicar, mezclar e integrar conocimientos ya estructurados en los nuevos planteamientos, aun cuando éstos parezcan no estar aparentemente relacionados con los anteriores.

Al hacer una demostración como la del lema siguiente:

Si a y b son enteros no ambos cero, entonces (a,b) (máximo común divisor de a y b) existe; se pueden encontrar enteros m_0 y n_0 tales que $(a,b) = m_0a+n_0b$.

Al término de la maestría uno de los estudiantes al intentar hacer esta demostración piensa en acudir a conceptos como Divisibilidad y Algoritmo de Euclides, debido a que el hacer referencia al Máximo Común Divisor, lo conduce a pensar en los conceptos mencionados, este mismo estudiante utilizó un procedimiento diferente al enfrentar esta demostración (planteada en una tarea de Álgebra de su primer semestre de la maestría), donde se limitó al concepto de máximo común divisor y no pudo demostrar el lema.

En este ejemplo se observa cómo el estudiante acude a los otros conceptos, pero no lo hace solamente porque estén en el mismo capítulo del libro, sino que ahora piensa en buscar en la teoría relacionada con máximo común divisor elementos que le permitan estructurar la demostración. Esto muestra que ya puede estructurar una secuencia de acciones ordenada y lógica para resolver un problema, para ello aísla la información útil, busca las relaciones conocidas e intenta plantear otras que le resultan convenientes, revisa la teoría básica y con ello modela sus acciones.

La aparición aparentemente espontánea de ideas puede ilustrarse con el siguiente ejercicio que forma parte de un examen de Álgebra Lineal, *no fue visto en clase* y en su desarrollo el estudiante hizo una parte de la demostración empleando contradicciones que tal vez vinieron a su mente después de un breve intento por seguir la demostración en forma directa.

Sean W_1, W_2 subespacios, $W_1 \cup W_2$ es un subespacio $\leftrightarrow W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$

El estudiante escribe así su demostración:

i) $W_1 \cup W_2$ es un subespacio $\leftarrow W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$, obvio ya que si $W_i \subset W_j$, entonces $W_i \subset W_j$, $W_i \cup W_j = W_j$

ii) $W_1 \cup W_2$ es un subespacio $\rightarrow W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$

Si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio entonces tomemos $V_1 \in W_1 \cup W_2$ por demostrar que $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$ después de escribir esto, el estudiante suspende la demostración (posiblemente al no lograr estructurarla con los elementos que tiene), deja un espacio e intenta posteriormente otra forma de hacerla.

La forma en que sigue después la demostración es más compleja, involucra negaciones.

Escribe: Supóngase que $W_1 \not\subset W_2$ y $W_2 \not\subset W_1$ por demostrar que $W_1 \cup W_2$ no es subespacio, sin embargo el hacerlo así le permite continuar y concluir la demostración.

Observando la demostración anterior, es posible pensar que el alumno detectó que el camino elegido en principio no lo llevaría a una solución, por ello hace la corrección casi al inicio y piensa en una técnica alternativa.

En este nivel el estudiante percibe cuándo un procedimiento no es el más adecuado, lo que le permite corregir cuando comete errores, esto constituye la segunda característica importante observada en este nivel, que se presenta a continuación:

2) Distingue fácilmente soluciones aparentemente lógicas de aquellas que no los son, existe la autocrítica.

Antes de este nivel el estudiante no detectaba errores, ahora percibe cuándo un procedimiento no lo conducirá a una solución coherente y lo abandona para buscar otro que le proporcione un resultado más lógico.

Por ejemplo en el desarrollo de la siguiente demostración ocurre algo similar a lo planteado en el caso anterior:

Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces W_1+W_2 es un subespacio de V.

El estudiante inicia escribiendo Si $\alpha \in W_1$, $\beta \in W_2$ entonces... pero inmediatamente cambia y escribe:

Si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in W_1 + W_2, \beta = \beta_1 + \beta_2 \in W_1 + W_2$ y $a,b \in F$, entonces $a\alpha + b\beta = a(\alpha_1 + \alpha_2) + b(\beta_1 + \beta_2) = (a\alpha_1 + b\beta_1) + (a\alpha_2 + b\beta_2) \in W_1 + W_2$.

Por tanto, $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

Además de detectar errores, puede visualizar más de una alternativa y es capaz de autocuestionarse sobre la conveniencia o inconveniencia de seguir una o la otra. Puede distinguir los procedimientos menos complicados.

3) Posibilidad de manejo abstracto.

No requiere apoyos objetivos. Tanto en los conceptos como en las generalizaciones que establece, puede operar con relaciones entre abstracciones, ya no depende de los datos mismos.

Es posible comparar esta posibilidad de manejo abstracto con lo que ocurre al inicio de la fase lógica abstracta del desarrollo cognoscitivo.[15]

En una tarea del curso de álgebra se pide al estudiante demostrar que:

La congruencia $ax \equiv b \pmod n$ tiene solución $\leftrightarrow (n, a) \mid b$

Para hacer la demostración solicitada, el estudiante redacta lo siguiente:

$\rightarrow$ Sea x_0 una solución, es decir $ax_0 \equiv b(n)$, es decir $n \mid ax_0 - b \therefore \exists m \in Z \ni nm = ax_0 - b \therefore b = x_0a + (-m)n \therefore b \in L_{a,n}$, dado que b es una combinación lineal de a y de n $\therefore (a, n) \mid b$

[15] Descrita por Ausubel (1983)

$\leftarrow$ Sea $d = (n,a)$ y $d \mid b$ es decir $\exists\delta \in Z \ni d\delta = b$, sean α y $\beta \in Z \ni$ $d = \alpha a + \beta n$
$b = \alpha\delta_a + \beta\delta n$

$(-\beta\delta)n = a(\alpha\delta) - b$ si llamamos $n \mid ax_0 - b \therefore ax_0 \equiv_n b$

En la demostración anterior se observa un mejor manejo de la teoría, no se recurre a apoyos externos como algún ejemplo numérico, sino que simplemente el estudiante va estructurando con la teoría de congruencias la demostración.

II. Influencia de la metodología empleada en las diferentes materias en la evolución del proceso de aprendizaje

Ambos estudiantes consideraron que las diferentes materias estudiadas durante la maestría fueron abordadas desde perspectivas diferentes en lo relativo a la metodología de enseñanza y también encontraron que su propia forma de estudio fue diferente. Uno de los estudiantes percibe tales diferencias aunque no puede explicar con claridad en qué consistieron, menciona que la forma de aproximación al objeto de estudio en geometría no parecía ser la misma que en cálculo, en cuanto al conocimiento acumulado que requería geometría, por ejemplo debían tener mayor número de teoremas en mente para estructurar una demostración en tanto que cálculo constituía una materia que parecía organizada en forma más integrada puesto que los nuevos conocimientos englobaban a los anteriores.

Al describir la forma de su aprendizaje en lo relativo al desarrollo de capacidades y habilidades, ambos coincidieron en que las distintas materias favorecieron el desarrollo de habilidades de pensamiento diferentes. Consideraron en particular el caso de Álgebra Lineal y Álgebra Moderna para la cual tuvieron que familiarizarse con lo abstracto, ambos consideran que fue Álgebra Moderna la que los obligó a tener una forma de pensamiento más abstracta y estructurada.

Uno de los estudiantes hace una reflexión más profunda sobre su aprendizaje y menciona que su forma de pensamiento en geometría le permitió: reconocer y representar formas, imaginar figuras, describir propiedades, jerarquizar, relacionar, ordenar, efectuar razonamientos hipotético-deductivos; mientras que en álgebra era fundamental el entender definiciones, simbolizar e interpretar símbolos, extraer relaciones y expresarlas con símbolos. Por otra parte en cálculo, necesitaba comprender enunciados y plantear problemas, mediante el uso de modelos, consideraba que las demostraciones en cálculo eran menos difíciles que en álgebra, en tanto que en geometría parecían irse dando en forma más natural.

Ambos individuos consideran que las diferencias poco a poco se fueron diluyendo dando paso a una forma más general de abordar los problemas.

III. Desarrollo no gradual del proceso de aprendizaje determinado por la existencia de un punto de corte que permite establecer etapas con diferencias cualitativas importantes.

Durante el período de estudios analizado, los estudiantes mostraron las características distintivas de formas de pensar y de hacer razonamientos, descritas en este trabajo, éstas permitieron ubicar etapas en la evolución de su proceso de aprendizaje.

Tales etapas no parecen constituir un continuo, es decir hay en ellas habilidades que no son resultado de otras habilidades, surgen apoyándose en habilidades anteriores pero permiten al individuo hacer algo diferente a lo que sería la simple suma de las anteriores habilidades.

El aprendizaje resultante tampoco está constituido por una superposición de aprendizajes; los conocimientos y las experiencias de aprendizaje se estructuran de tal manera que transforman el pensamiento del sujeto, esto se observa porque de momento él mismo siente que comprende o razona de diferente manera.

Aparentemente en ambos individuos el proceso no se da como una sucesión de etapas en donde se acumulen conocimientos y experiencias en forma gradual. Las habilidades adquiridas corresponden a distintos niveles de complejidad, pero esto no significa que el individuo haya ido de lo fácil a lo difícil, ni de lo concreto a lo abstracto, puesto que el nivel de dificultad de un problema de los cursos básicos podía ser tan alto como uno de los últimos cursos, y la necesidad de hacer abstracciones tuvo que enfrentarla desde su ingreso al programa de maestría. Las diferencias en el proceso están determinadas por la forma en la cual el individuo intenta resolver los problemas que se le presentan. Ésta da información sobre la forma en que piensa mientras busca respuestas o soluciones a los problemas.

Las formas de aproximación a los problemas que utiliza a lo largo del período de estudios muestran ciertas características *acumulables*, pero en ciertos momentos aparecen nuevas características, que poco a poco predominan sobre las anteriores, y dan lugar a una forma diametralmente diferente de enfrentar el problema.

La aparición de esas nuevas formas de resolver problemas o de elaborar sus razonamientos está enmarcada por la existencia de *saltos cualitativos*, antes y después de determinado momento la forma de aprendizaje está integrada por habilidades diferentes. Tales *saltos* parecen en alguna forma espontáneos y en cierta medida sorpresivos.

Bibliografía

AUSUBEL, M. David; NOVAK, J.;HANESIAN, H. (1983) Psicología Educativa. México: Editorial Trillas, 2a. Edición.

BIEHLER, Robert; Snowman, J. (1990) Psychology Applied to Teaching. USA: Houghton Mifflinh.

NESHER, Pearl; Kilpatrick J. (1993) Mathematics and Cognition. USA: ICM Study Series. Cambridge University

PIMM (1990) El lenguaje matemático en el aula. México: Ediciones Morata.

LAMBDIN; KLOOSTERMAN; JOHNSON (1994) "Mathematics Teaching in the Middle School", USA: National Council of Teachers of Mathematics, abril Vol. 1 Num. 1. pags. 38-43

GOFFREE, Fred; Freudenthal H.:(1992) Working on mathemathics education. Amsterdam National Institute for Curriculum Development, Enshede University of Amsterdam, (Trad. Jorge Martínez Sánchez).