DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo Fin de Máster

PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE 6° DE EDUCACIÓN PRIMARIA: RESPUESTAS INADECUADAS, INTERVENCIONES Y EFECTOS

Presentado por

Dª Diana Hidalgo Moncada

Granada, 2018

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Trabajo Fin de Máster

PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE ESTUDIANTES DE 6° DE EDUCACIÓN PRIMARIA: RESPUESTAS INADECUADAS, INTERVENCIONES Y EFECTOS

Presentado por

Dª Diana Hidalgo Moncada

Dirigido por

Dª María C. Cañadas Santiago

Granada, 2018

Resumen

En este trabajo describimos el proceso de generalización de ocho estudiantes de sexto de Educación Primaria en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntuales, presentada durante una entrevista. El estudio sigue un enfoque mixto de naturaleza descriptiva y exploratoria. Dentro del proceso de generalización, nos centramos en las respuestas inadecuadas de los estudiantes, las intervenciones del entrevistador ante este tipo de respuestas, los efectos luego de las intervenciones y el tipo de generalización que logran los estudiantes. Evidenciamos mayor presencia de respuestas inadecuadas debidas a error de procedimiento, intervención centrada en la repetición de la pregunta, el efecto de reconocer la respuesta inadecuada y la generalización factual.

Summary

In this study we describe the generalization process of 8 sixth grade students of elementary education in a task that implies a functional relationship with point configurations, presented during an interview. The study follows a mixed approach of descriptive and exploratory nature. Within the process of generalization, we focus on the students' inadequate responses, the interviewer's interventions to such responses, the effects after the interventions and the type of generalization that the students performed. We evidence higher frequencies of inadequate answers due to procedure errors, interventions focused on repeating the question, the effect of recognizing the inadequate answer and the factual generalization.

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granda, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A mi esposo por su comprensión e inmenso amor

A mi madre y hermanos por su apoyo incondicional

y por enseñarme a avanzar en la adversidad

Agradecimientos

Doy gracias en primer lugar a la vida y a Dios por esta experiencia, que me ha permitido crecer en el ámbito profesional y personal.

Agradezco a mi tutora María C. Cañadas por guiarme en este proceso con comprensión y sabiduría. Por su amabilidad, disposición y entusiasmo y, por apoyar mis ideas y unirlas a las suyas.

A cada uno de los profesores del máster por compartir sus conocimientos y formar parte de mi aprendizaje.

Agradezco al grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM-193) por permitirme ser parte de los proyectos dentro de los cuales se enmarca este estudio (EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P).

Gracias al Programa de Formación de Capital Humano Avanzado y a la Comisión Internacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), por darme la oportunidad de estudiar con su financiamiento a través de la Beca de Magister en el extranjero con folio N° 73170173.

Agradezco a mis compañeros presenciales del máster, por ser un buen grupo dentro y fuera del aula. También a los compañeros de doctorado Eder Pinto y Rodolfo Morales por su disposición a compartir sus conocimientos.

Gracias a María Fernanda Vargas y Jason Ureña por su linda amistad, compañía y apoyo.

Agradezco a mi familia que a la distancia me entregó todo su cariño y apoyo y, no dejaron que bajara los brazos.

Especialmente agradezco a mi esposo que cada día me entregó su tranquilidad, comprensión y amor.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Presentación

El presente estudio corresponde al Trabajo de Fin de Máster (TFM) realizado por la alumna Diana Hidalgo Moncada, dentro del programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, durante el curso académico 2016-2017 y dirigido por la Doctora María C. Cañadas Santiago.

El trabajo se enmarca dentro de dos proyectos de investigación centrados en el pensamiento funcional de estudiantes de Educación Primaria como aproximación al pensamiento algebraico (EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P) y en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granda.

Nuestro foco principal en este TFM es analizar el proceso de generalización que llevan a cabo ocho estudiantes de sexto de Educación Primaria en el desarrollo de una tarea que implica relaciones funcionales del tipo directa e inversa, utilizando configuraciones puntuales. El trabajo de los estudiantes tiene lugar durante entrevistas semiestructuradas realizadas a cada uno de ellos. En particular atendemos a cuatro aspectos específicos en la investigación: (a) respuestas inadecuadas de los estudiantes, (b) intervenciones del entrevistador, (c) efectos en las respuestas de los estudiantes luego de las intervenciones y (d) tipo de generalización que logran los estudiantes en el desarrollo de la tarea propuesta. Para dar respuesta a nuestros intereses investigadores, transcribimos y analizamos todas las entrevistas, las cuales fueron grabadas con video cámara.

Esta memoria de investigación consta de seis capítulos. En el primero de ellos planteamos el problema de investigación y su justificación mostrando la pertinencia y necesidad desde tres ámbitos, el personal, el curricular y el ámbito investigativo.

En el segundo capítulo presentamos los principales elementos teóricos en los que se sustenta nuestra investigación y los antecedentes existentes sobre el tema de estudio a nivel nacional e internacional.

Considerando la problemática planteada y con base en los elementos teóricos presentados, en el tercer capítulo definimos nuestros objetivos de investigación. Estos se componen de un objetivo general y cuatro objetivos específicos.

En el cuarto capítulo describimos la metodología utilizada para desarrollar el estudio. Explicamos la naturaleza y el enfoque de la investigación, los sujetos participantes, el método utilizado para la recogida de los datos, las categorías de análisis y el método de análisis.

En el capítulo quinto presentamos el análisis de los datos y resultados de acuerdo a los objetivos de investigación planteados.

Por último, en el sexto capítulo describimos las conclusiones del estudio en cuanto a logro de objetivos, otros aportes de la investigación, limitaciones con las que nos encontramos en el desarrollo del trabajo y planteamos posibles líneas de continuación del tema tratado.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

En el capítulo 1 presentamos el problema de investigación, dando a conocer el motivo que nos lleva a plantearlo y justificando su interés a través de tres ámbitos, personal, curricular e investigador.

1.1 Definición del problema

Estudios como los de Billings, Tiedt y Slater (2008); Cañadas y Fuentes (2015); Castro, Cañadas y Molina (2017); Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016); Martínez y Brizuela (2006); Merino, Cañadas y Molina (2013); o Stephens et al. (2012), entre otros, buscan evidenciar el pensamiento funcional de niños en edades tempranas (Educación Infantil y Educación Primaria). Estos autores exploran cómo los estudiantes expresan relaciones funcionales, qué estrategias utilizan o qué representaciones emplean, entre otros aspectos. Hasta ahora, la mayoría de las investigaciones se han centrado en los logros de los estudiantes y cómo lo consiguen. Asumimos los logros de los estudiantes desde edades tempranas en tareas vinculadas al contexto funcional. Sin embargo, también reconocemos que los estudiantes presentan dificultades, algunas de las cuales se evidencian a través de errores (Morales y Cañadas, 2017; Hidalgo y Cañadas, 2017). Las intervenciones del docente y los efectos que producen cobran especial relevancia principalmente en ocasiones en las que se observan errores o momentos en los que los estudiantes no saben cómo continuar su trabajo. Echamos en falta disponer de información acerca de los errores de los estudiantes y cómo influye la intervención del docente en la actuación del estudiante cuando se le presentan tareas que implican relaciones funcionales, particularmente cuando el estudiante incurre en algún error o no sabe cómo continuar.

En este trabajo analizamos el proceso de generalización que llevan a cabo estudiantes de 6° de Educación Primaria en una tarea que implica una relación funcional. Dentro de este proceso indagamos en las intervenciones del entrevistador frente a respuestas inadecuadas que entregan los estudiantes y sus posibles efectos.

1.2 Justificación

En este apartado justificamos el problema de investigación desde los ámbitos personal, curricular e investigador.

1.2.1 Justificación personal

Mi interés por la Didáctica de la Matemática nació durante mis estudios universitarios de cinco años para profesora de matemáticas en Chile, debido a las asignaturas cursadas y prácticas en las instituciones educativas, tanto para Educación Primaria como para Educación Secundaria. Desde entonces comencé a observar la introducción del álgebra que se lleva a cabo en las aulas, específicamente lo relativo al trabajo con patrones, identificación de relaciones entre cantidades y con la generalización; aspectos que se vinculan al pensamiento funcional. Entre las problemáticas, observé que a los estudiantes les dificulta comprender el trabajo algebraico, realizar conjeturas de patrones y trabajar y representar en simbolismo algebraico relaciones funcionales. Los estudiantes ven el álgebra como un tema aislado de las matemáticas, ya que los docentes presentan el álgebra de forma general y, particularmente el trabajo con relaciones funcionales, como un contenido matemático sin conexión con conceptos ya conocidos. Esta situación genera dificultades en los estudiantes, las cuales se evidencian a través de errores en los que incurren en el desarrollo de tareas algebraicas. Como docente, ante esta situación me planteaba cuál es el rol que yo podría jugar ahí para guiar a los estudiantes a fomentar su conocimiento algebraico en los primeros niveles educativos.

Estas son algunas de las inquietudes que me llevaron a venir desde Chile a cursar el Máster de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, el cual cuenta con una línea especializada en el ámbito del álgebra en el contexto del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática Pensamiento Numérico", lo que hizo aumentar mi interés por investigar en esta área y llevar a cabo el presente trabajo. Dentro de esta línea, existe un proyecto de investigación centrado en el pensamiento funcional, liderado por las Dras. María C. Cañadas y Marta Molina, con el que colaboro desde mí llegada a Granada.

1.2.2 Justificación curricular

Desde el punto de vista curricular, diferentes países como Australia, China, Corea, Canadá, Japón, Portugal o Estados Unidos han incorporado en sus documentos curriculares elementos de álgebra desde los primeros niveles, considerando la importancia del pensamiento algebraico y, concretamente, el pensamiento funcional en Educación Primaria (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

Partiendo de los documentos curriculares de Estados Unidos, como referente internacional para otros países. En 2009, los líderes estatales a través de la *National Governors Association Center for Best Practices* (NGA Center) y el, *Council of Chief State School Officers* (CCSSO), desarrollaron los *Common core* como estándares estatales comunes. Actualmente la mayor parte de los estados de Estados Unidos se rigen por ellos, superando a los estándares tradicionales del *National Council of Teacher of Mathematic*s (NCTM). Dentro de las nuevas competencias planteadas, se estipula que la enseñanza del pensamiento algebraico debe realizarse desde *Kindergarten* (Educación Infantil). Se observa además que durante toda la etapa de primaria introducen conceptos tales como número desconocido, relación entre cantidades, relación entre operaciones, patrones, secuencias (NGA and CCSSO, 2010).

Dada mi procedencia chilena, me interesa dar a conocer el tratamiento de documentos curriculares de mi país al pensamiento algebraico y, particularmente, al pensamiento funcional. Estos evidencian grandes cambios respecto al trabajo algebraico en primaria. Desde 2012 se incorporaron nuevos ejes temáticos en Educación Básica (6-13 años) entre ellos el eje “Patrones y álgebra”, desde primero. Este eje pretende que el estudiante “busque relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, permitiéndoles observar cambios de una cantidad en relación a otra” (Ministerio de Educación, 2013, p. 33). Además el documento recoge que una base sólida en patrones facilita el desarrollo de pensamiento algebraico.

Por otra parte, considerando que la investigación se desarrolla en el contexto español, destacamos que en la última actualización del currículo de Educación Primaria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) muestra la incorporación del desarrollo del pensamiento funcional. Esto se puede apreciar en el primero de los cinco bloques que componen la organización del currículo de primaria en el área matemática “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”. Este bloque es considerado como el pilar fundamental para el desarrollo de los estudiantes en los demás bloques. Además se explicita que el estudiante al término de esta etapa debe ser capaz de “describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” (p. 19387).

1.2.3 Justificación investigadora

Este trabajo se enmarca dentro de la propuesta reconocida a nivel internacional como *early algebra.* Esta propuesta propone y justifica que el álgebra puede ser abordada desde los primeros cursos de primaria, con la intención de que los estudiantes desarrollen modos de pensamiento algebraico (Molina, 2009). Una de las formas de abordar e introducir el álgebra es a través de la actividad con patrones (Raford, 2010).

Hasta la fecha variadas investigaciones han abordado el pensamiento funcional. Cañadas y Fuentes (2015) muestran los sistemas de representación y las estrategias que utilizan estudiantes de primero de primaria en una tarea que involucra una relación funcional. Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) describen las relaciones funcionales que identifican estudiantes de tercero de primaria y, de un modo más general, los logros de los estudiantes. Otro foco de investigación es referido al docente, específicamente las intervenciones que realiza cuando el estudiante presenta alguna dificultad en el proceso de generalización. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) observan que la intervención del profesor ayuda a los estudiantes a interpretar el problema en términos de relación entre variables. Warren (2006) indica que determinadas acciones de los docentes ayudan a los estudiantes a identificar la generalización y a expresarla mediante simbolismo algebraico, además permiten a los estudiantes llevar a cabo una reflexión más adecuada en el proceso de generalización. La autora afirma que son escasas las investigaciones centradas en las acciones que puede realizar el maestro para guiar al estudiante a identificar y expresar la generalización.

Una de las intervenciones que realiza el docente es cuando observa errores en los estudiantes. Existen estudios que informan sobre el uso que el docente le da a los errores en los que incurren los estudiantes (González, Gómez y Restrepo, 2015; Heinze y Reiss, 2007; Santagata, 2005; Son y Crespo, 2009). Estos autores muestran la importancia que se le debe dar a los errores y consideran que el docente debe llevar a cabo su enseñanza considerando los posibles errores en los que podrían incurrir los estudiantes. Para ellos, el docente puede diseñar tareas de aprendizaje que brinden oportunidades a los estudiantes para lograr sus expectativas como también poder superar sus limitaciones (Gómez y Mora, 2016).

Santagata (2005) propone que los profesores tengan previstas intervenciones adecuadas y en algunos casos espontáneas para el momento en que los estudiantes incurren en algún error. Esto implica que en la interacción profesor-alumno debe existir la confianza y la fluidez, permitiendo tanto al docente intervenir en el momento y la forma adecuada, como en la comprensión y superación de los errores de parte de los estudiantes. Santagata considera que los errores se pueden presentar durante el desarrollo de alguna actividad en el aula, por lo que el docente debe ser capaz de intervenir de forma espontánea ante un error y las estrategias que utilice podrían ser múltiples. La interacción profesor-alumno, el manejo de errores y las intervenciones del docente son fundamentales en el proceso enseñanza- aprendizaje.

No hemos encontrado investigaciones que aborden la naturaleza y los efectos de las intervenciones del docente frente a los errores que los estudiantes puedan presentar durante el trabajo con tareas que abordan el pensamiento funcional.

Con base en lo descrito hasta el momento, destacamos que aún quedan aspectos por estudiar dentro del ámbito del pensamiento funcional en Educación Primaria. Uno de ellos son los tipos de errores que presentan los estudiantes. Otro aspecto es la intervención del docente, particularmente las acciones que este realiza para que los estudiantes superen dichos errores.

Capítulo 2. Fundamentación teórica y antecedentes

En este capítulo precisamos los aspectos teóricos implicados en nuestro trabajo, y antecedentes que se relacionan con nuestro problema de investigación, en concreto lo relativo a: pensamiento algebraico y funcional, razonamiento inductivo, generalización y patrones, sistemas de representación, dificultades y errores e intervención docente ante errores de los estudiantes.

2.1 Pensamiento algebraico y pensamiento funcional

El álgebra causa numerosas dificultades en los estudiantes de Educación Secundaria, nivel educativo en el que se suele introducir el álgebra formalmente en diferentes países. Pruebas internacionales como PISA (OECD, 2016); y estudios como los de Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2015) o San José, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés (2007), entre otros, evidencian algunas de las dificultades de los estudiantes de secundaria. Warren (2006) señala que la introducción del álgebra desde los primeros cursos de primaria puede mitigar algunas dificultades de los estudiantes en cursos superiores. La propuesta *early algebra* promueve la integración del pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos, de forma que el aprendizaje del álgebra no se considere apartado de la aritmética (Kaput 1998, 2000). Kaput (2000) lo define como “algebrización del currículo”.

La propuesta *early algebra* contempla diferentes modos de pensamiento algebraico, que pueden emerger con naturalidad de las matemáticas que se desarrollan en Educación Primaria. Los diferentes modos de pensamiento algebraico tienen potencial para enriquecer la actividad matemática escolar (Molina, 2009). Esta integración del algebra en los niveles de primaria no es abrupta, si no que se entreteje con contenidos tradicionales del currículo de ese nivel educativo, introduciendo la notación algebraica gradualmente (Carraher, Schliemann, y Schwartz, 2007). La iniciación temprana en el pensamiento algebraico permitirá a los estudiantes una mejor comprensión, considerando que los tiempos para el aprendizaje del álgebra son prolongados (Kaput, 2008; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2007). Esta incorporación es posible incluso desde Educación Infantil (NGA y CCSSO, 2010).

Desde la perspectiva del *early algebra,* el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos, está relacionado con la introducción de ciertos elementos algebraicos, que den la oportunidad a los estudiantes de establecer relaciones y generalizar propiedades matemáticas. Kaput (2008) menciona que el pensamiento algebraico considera las formas de hacer, pensar y hablar sobre el álgebra como contenido matemático, tal y como lo promueve la *early algebra*. Esta propuesta está relacionada con el desarrollo y manipulación del simbolismo algebraico, con el estudio de la generalización de patrones y relaciones numéricas, además del estudio de estructuras abstraídas de cálculo y el estudio de las relaciones funcionales (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth y Peled, 2003).

Se habla de pensamiento funcional cuando el foco matemático del pensamiento algebraico son las funciones (Cañadas y Molina, 2016). Para Doorman y Drijvers (2011) "el trabajo con funciones depende (de) y promueve la comprensión de variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre representaciones tales como tablas, gráficos y fórmulas" (p. 119). Este tipo de trabajo permite que los estudiantes desarrollen el pensamiento funcional, que implica generalizar las relaciones entre cantidades co-variables, representar y justificar estas relaciones a través del lenguaje natural, tablas, gráficos, entre otras y razonar con fluidez ante estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman, 2015).

Para Smith (2008) el pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas, la cual se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían. Cañadas y Molina, (2016) añaden que este enfoque permite trabajar contenidos como el concepto de función, relación y variación entre cantidades, contenidos fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otro lado Rico (2006) considera el pensamiento funcional como una forma de "pensar en términos de y acerca de relaciones" (p. 56). Además, este autor señala que es una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. El pensamiento funcional, además, promueve la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales, fomentando el razonamiento inductivo y facilitando de este modo herramientas a los estudiantes para adquirir conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

De acuerdo con lo señalado por Cañadas y Molina (2016), el pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen.

En consecuencia, la noción de función es clave en el pensamiento funcional. Blanton et al. (2011) definen función como "una relación especial entre dos conjuntos, en la cual cada elemento de un conjunto, llamado dominio, está asociado únicamente a un elemento del segundo conjunto, llamado codominio" (p.48). Además, en una función los valores de una variable varían según los valores de la otra, siendo la primera la variable dependiente y la segunda la independiente. Merino, Cañadas y Molina (2013) distinguen dos tipos de relaciones entre variables, relación directa y relación inversa. Será directa si se conoce el valor de la variable independiente y será inversa si el valor conocido es de la variable dependiente. Por tanto, las relaciones directa e inversa dependen del rol que tengan las variables en la situación planteada. Estos autores plantean una relación entre número de mesas y número de niños que se pueden sentar alrededor de ellas con unas condiciones dadas, siendo el número de mesas la variable independiente y el número de niños la variable dependiente. Cuando en las preguntas planteadas se da a conocer el número de mesas y se pretende saber el número de niños, se está tratando de una relación directa. En cambio, cuando se da a conocer el número de niños y se pregunta por la cantidad de mesas, se trata de una relación inversa.

Por otra parte, la forma en que las cantidades varían en una relación entre conjuntos, se pueden clasificar en tres tipos de relaciones funcionales: recursividad, covariación y correspondencia (Smith, 2008). La recursividad es la variación que se da sólo en una de las secuencias de valores que se relacionan, los valores que se van obteniendo surgen de los obtenidos previamente sin considerar la variable independiente. La correspondencia es la correlación que se da entre las cantidades y es expresada por medio de una regla o simbolismo algebraico que establece de forma generalizada la relación entre las dos cantidades. Por último, la covariación implica el análisis de cómo dos cantidades cambian entre sí, observando cómo el cambio de una afecta a la otra cantidad (Blanton et al., 2011).

El enfoque funcional permite el desarrollo del pensamiento algebraico desde Educación Primaria y trabajar con los distintos sistemas de representación, lo que eleva la posibilidad a los estudiantes de desarrollar habilidades que les permitan enfrentarse al álgebra con éxito en cursos superiores. Schliemann, Carraher y Brizuela (2012) comprueban este hecho en un estudio sobre la introducción del álgebra a través del pensamiento funcional con estudiantes de tercero, cuarto y quinto de Educación Primaria, a los cuales se les realizó un seguimiento de su rendimiento académico en Educación Secundaria. Los autores muestran que los estudiantes a los cuales se les introdujo el álgebra a través del pensamiento funcional lograron desenvolverse de mejor manera en álgebra en Educación Secundaria.

Son variadas las investigaciones que se han desarrollado sobre el pensamiento funcional y abordan diferentes aspectos. A continuación presentamos algunas de ellas.

Uno de los aspectos abordados son las relaciones funcionales. Blanton y Kaput (2004) indagan sobre el pensamiento funcional que evidencian estudiantes de los grados elementales al desarrollar y expresar relaciones funcionales. Los autores analizan las formas de representación, la progresión en el lenguaje matemático, las operaciones que utilizan y como atienden a una o más cantidades variables. Sus resultados muestran que los estudiantes evidencian pensamiento funcional en cursos anteriores a los esperados, por ejemplo, en Educación Infantil se evidencia pensamiento covariacional y desde primer grado los estudiantes son capaces describir cómo las cantidades se corresponden.

Centrados también en las relaciones funcionales Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) describen a algunos alumnos de tercero de Educación Primaria que identifican relaciones funcionales en la resolución de un problema de generalización que involucra un ejemplo genérico. Los autores describen los sistemas de representación que emplean los estudiantes que identifican relaciones funcionales. Los resultados evidencian relaciones funcionales de correspondencia y covariación destacadas por los estudiantes, predominando la primera. En cuanto a los sistemas de representación utilizan con mayor frecuencia el numérico y el verbal y, en menor medida, el manipulativo y pictórico.

Por otra parte Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez (2016) llevan a cabo una investigación con 30 alumnos de primero de Educación Primaria en la que identifican los tipos de relaciones funcionales que evidencian los estudiantes al enfrentarse a un problema que involucra una relación funcional lineal. Los autores señalan que la mayoría de los alumnos son capaces de establecer relaciones entre variables, particularmente identifican relaciones de correspondencia y algunos de ellos fueron capaces de identificar además la relación de covariación.

Otro de los aspectos que abordan las investigaciones sobre pensamiento funcional en los primeros niveles son las estrategias utilizadas por los estudiantes. Merino, Cañadas y Molina (2013) indagan sobre las estrategias que utilizan 20 alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Los estudiantes utilizan variadas estrategias, dentro de las cuales el uso de patrones es la más destacada. Se observa además que el uso de patrones en preguntas relativas a números pequeños permitió un mayor éxito al abordar preguntas con números más grandes e incluso para la expresión general.

Cañadas y Fuentes (2015) presentan parte de los resultados de un estudio exploratorio desarrollado con estudiantes de primero de Educación Primaria. Su foco está en mostrar las estrategias que utilizan los estudiantes en el desarrollo de una tarea que involucra la relación funcional $f(x)=5x$. De los resultados, destacamos que los estudiantes utilizan tres tipos de estrategias: (a) conteo de dibujos, (b) respuesta directa y (c) asociación de elementos en grupos de cinco, de las cuales la respuesta directa es la más frecuente.

El uso de patrones es otro aspecto indagado del pensamiento funcional. Warren y Cooper (2006) desarrollan una serie de lecciones, las cuales tiene por objetivo utilizar patrones repetitivos para indagar en el pensamiento funcional. Las lecciones propuestas se presentaron a un grupo de 25 estudiantes con una edad promedio de 9 años. Los autores destacan que los niños pequeños no solo manifiestan pensamiento funcional sino también, lo representan de formas inesperadas para su edad.

Como se puede ver, en los estudios citados anteriormente, el foco de atención es mostrar evidencias y describir el pensamiento funcional en los estudiantes de primaria, ya sea identificando las estrategias y sistemas de representación que utilizan o las relaciones funcionales que evidencian e incluso comprobar lo efectivo de introducir este pensamiento a través de un trabajo con patrones. Pero también en algunos de los estudios citados se observan dificultades sobre las que no se ha indagado por el momento. Por ejemplo, queda pendiente indagar sobre las dificultades al identificar o representar relaciones funcionales. Por otra parte la mayoría de los aspectos que se abordan en estudios sobre pensamiento funcional están centrados en describir el trabajo de los estudiantes. También nos parece interesante y necesario indagar además en la intervención del docente para promover de manera exitosa este tipo de pensamiento.

2.2 Patrones y generalización

Asumimos los patrones y la generalización como parte importante del razonamiento inductivo, por lo que comenzamos por describir este tipo de razonamiento.

El razonamiento inductivo es generador de conocimiento matemático y científico. En él se trabaja con casos particulares, observando regularidades y obteniendo conjeturas, para luego comprobarlas con nuevos casos particulares, llegando de este modo a descubrir leyes generales (Pólya, 1990).

Castro, Cañadas y Molina (2010) definen el razonamiento inductivo como un proceso cognitivo que permite obtener reglas a partir de un comportamiento común observado en algunos casos particulares y concretos. A partir de esto las autoras plantean que el razonamiento inductivo posee dos funciones, la primera corresponde a la adquisición de conocimiento matemático a través de la formulación de conjeturas elaboradas al trabajar con casos particulares, hasta llegar a la generalización. La segunda función es la comprobación de las conjeturas con nuevos casos particulares como tipo de justificación informal. A esto agregan que es recomendable trabajar el razonamiento previamente a las demostraciones formales, ya que facilitaría la transición a estas como forma de justificación formal.

Cañadas y Castro (2004) caracterizan el razonamiento inductivo de 12 estudiantes de secundaria durante el desarrollo de un problema geométrico. Con base a lo obtenido en el estudio, al trabajo de Pólya y otras investigaciones, las autoras definen un modelo de siete pasos para llevar a cabo el razonamiento inductivo. Cabe considerar que solo algunos de los pasos en el proceso son imprescindibles, además el esfuerzo que requiere para la aplicación de cada uno varía (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Nuestro trabajo se basa en el modelo de razonamiento inductivo descrito por Cañadas y Castro (2007).

2.2.1 Patrones

Encontrar y usar patrones es una estrategia importante para resolver problemas matemáticos (Stacey, 1989). El patrón se suele formar partiendo de un núcleo que lo genera, en algunos casos el núcleo crece de forma regular (Castro, 1994). Castro (1995) define patrón como todo lo que se repite con cierta regularidad.

Existen distintas clasificaciones sobre tipos de patrones. Zazquis y Liljedahl (2002) distinguen entre patrones numéricos, pictóricos, geométricos, patrones en los procedimientos computacionales, modelos lineales y cuadráticos, y patrones repetitivos. Owen (1995) diferencia tres tipos de patrones: patrones de repetición, patrones estructurales y secuencias numéricas. En nuestro estudio analizamos los patrones numéricos representados mediante configuraciones puntuales.

Por otra parte Pegg (1990; citado en Durán Ponce, 1999), señala que descubrir patrones implica tres procesos: trabajar en tareas con patrones numéricos; expresar reglas que caractericen ciertos patrones numéricos particulares, y que estas reglas sean expresadas de manera abreviada. Además recomienda que para la introducción del álgebra se trabaje con patrones numéricos hasta que los estudiantes logren expresarlos de forma algebraica. Warren y Cooper (2006) afirman que la repetición de patrones y patrones de crecimiento pueden conducir al desarrollo temprano del pensamiento funcional, llevando a cabo relaciones entre dos conjuntos de datos.

Un estudio de relevancia en Didáctica de la Matemática sobre patrones es el de Castro (1995). Esta investigación indaga en la comprensión que manifiestan estudiantes de 12 a 14 años al establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones numéricos y proponer una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia representada mediante configuraciones puntuales. Busca delimitar las potencialidades de la representación simbólica utilizada para expresar aspectos conceptuales y procedimentales de los números naturales, que no se observan con las representaciones simbólicas usuales. La autora explicita las actividades cognitivas que surgen al trabajar con configuraciones puntuales y muestra los contextos en los que la representación simbólica trabaja de manera significativa. Sus resultados muestran la efectividad de la enseñanza en el reconocimiento de patrones a través de las configuraciones puntuales. Da a conocer cómo esta enseñanza facilita la comprensión de las nociones de estructura de un número, término general, patrones y relaciones numéricas, entre otras. Concluye que de los sistemas empleados por los estudiantes, la configuración puntual es más intuitiva debido a su carácter gráfico.

2.2.2 Generalización

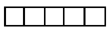
Uno de los pasos clave del razonamiento inductivo es la generalización (Cañadas, 2007). Considerando lo anterior la generalización es también generadora de conocimiento matemático. Mason (1996) considera que la generalización “es el latido del corazón de las matemáticas” (p. 65).

Para Pólya (1990) “la generalización consiste en pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (p. 97).

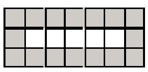
Según Merino, Cañadas y Molina (2013) trabajar con tareas de generalización implica “la búsqueda de patrones, lo cual pretende hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos” (p. 27). Estas tareas conllevan generar, a partir de los casos particulares dados, nuevos casos particulares o la expresión del término general. Cuando se produce la generalización, esta puede expresarse mediante el lenguaje verbal, la representación simbólica algebraica o incluso mediante el lenguaje gestual (Radford, 2010).

Cañadas, Castro y Castro (2008) describen los tipos de patrones y la forma en que 359 estudiantes de entre 14 y 16 años (3° y 4° de ESO) expresan la generalización en la resolución del problema de las baldosas. Sus resultados evidencian una dependencia significativa entre la identificación del patrón y la generalización. Se observa que los alumnos que no identifican el patrón no logran expresar la generalización y quienes llegan a generalizar lo hacen en su mayoría de forma verbal y con un previo trabajo en el sistema de representación numérico. La figura 1 muestra el problema de las baldosas utilizado en este estudio.

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:



- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?

- Justifica tu respuesta.

Figura 1. Problema de las baldosas (p. 141)

Otra investigación que aborda el estudio sobre cómo los estudiantes generalizan es la de Carraher, Martínez y Schliemann (2008). Estos autores analizan la capacidad de generalizar de 15 estudiantes de 8 años en tareas con funciones lineales que involucran distribución de asientos en una mesa. A medida que los estudiantes avanzan hacia la generalización con expresiones algebraicas convencionales, necesitan representar explícitamente las variables independientes y dependientes en sus declaraciones. En el caso de funciones lineales, se ven en la necesidad de reemplazar adiciones sucesivas con una sola multiplicación. Por otro lado, los autores observan que la intervención del profesor ayuda a los estudiantes a interpretar el problema en términos de relación entre variables. Permitiendo además que ciertos estudiantes abandonen modelos inadecuados y se acerquen a las relaciones y representaciones matemáticas que se pretenden.

2.2.3 Tipos de generalización

Son variados los aspectos en los que investigadores se han centrado para analizar los modos en que generalizan los estudiantes. Esto ha permitido estudiar y comprender las formas en que los estudiantes construyen y utilizan reglas generales para adaptarse a casos particulares. Diversas investigaciones describen distintas formas de generalización.

Stacey (1989) describe dos tipos de generalización, cercana y lejana. La generalización cercana está referida a preguntas que requieren encontrar un patrón y este puede ser hallado mediante un dibujo, por conteo o elaborando una tabla. En cambio, en la generalización lejana para encontrar un patrón ya no es práctico utilizar las técnicas anteriores y para dar respuesta a preguntas de este tipo se requiere identificar una regla general.

Por otro lado, Ellis (2007) presenta una categorización de tipos de generalización que construyen los estudiantes cuando razonan matemáticamente. La autora distingue entre la actividad de los estudiantes a medida que generalizan o generalizan las acciones y las declaraciones finales de generalización o generalizaciones de reflexión. La taxonomía propuesta identifica niveles evolutivos de sofisticación en la actividad generalizadora. Esta taxonomía presenta tres categorías, (a) relacionar: forma de asociar dos o más problemas u objetos, (b) buscar: repetir una acción para localizar un elemento de similitud y (c) extender: expandir un patrón o relación en una estructura más general.

Radford (2008) distingue entre generalización aritmética y algebraica de patrones con base en el sistema de representación empleado. Por una parte define generalización algebraica de patrones como la generalización que sigue aspectos tales como: (a) la toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir de un trabajo con casos particulares, (b) la generalización de dicha propiedad a los términos subsiguientes de la secuencia y por último (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor para cualquier término de la secuencia. Por otra parte cuando la generalización realizada no puede cumplir con el tercer aspecto mencionado la generalización será aritmética.

Radford (2003, 2010) propone un sistema de categorías, las cuales hemos considerado para nuestro estudio. Este autor señala cuatro tipos de generalización, de los cuales tres corresponden a generalización algebraica y una es considera como generalización aritmética. En esta última la generalidad es una similitud observada en algunas cifras, lo cual no permite proporcionar una expresión para cualquier término de la secuencia. Dentro de la generalización algebraica se encuentran la generalización factual, la generalización contextual y la generalización simbólica. La generalización factual se basa en acciones realizadas sobre números; las actuaciones constan aquí de palabras, gestos y de actividad perceptual. Es una generalización de acciones en forma de un esquema operativo, el cual permite abordar cualquier caso particular, es decir, permanece siempre unido al nivel concreto y la indeterminación permanece sin nombre. En cuanto a la generalización contextual, es la abstracción de acciones concretas en forma de esquema operativo, sin embargo la diferencia con la generalización fáctica es que este esquema no opera con números concretos. Dicho de otro modo la generalización contextual es la descripción del término general. Este puede ser nombrado como “la figura siguiente”, “la siguiente columna”, etc.

Por último la generalización simbólica es la representación de secuencias a través del sistema de representación alfanumérico del álgebra. En este tipo de generalización los estudiantes deben distanciar los términos de la secuencia, temporal y espacialmente.

2.3 Sistemas de representación

Las representaciones son notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes” (Castro y Castro, 1997, p. 66). Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998).

Castro, Rico y Romero (1996) distinguen dos tipos de representaciones: las internas y las externas. Las internas, también llamadas objetos del pensamiento, están ubicadas en la mente de cada sujeto, mientras que las externas son de carácter semiótico y están dadas por signos, símbolos o gráficos. En nuestro trabajo consideramos las representaciones externas debido a las formas en que se presenta y se desarrolla la tarea planteada a los estudiantes.

Por otra parte Rico (2009) señala que una representación por sí sola y de forma aislada no cobra sentido, sino que debe contemplarse dentro de un sistema de significados y relaciones. Es por esto que abordamos la definición de sistemas de representación. Gómez (2007) define los sistemas de representación como “los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto” (p. 41). Según sus características y propiedades las representaciones pueden organizarse en distintos sistemas de representación. Para Lupiáñez (2016) cada sistema constituye “un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de una serie de regalas y convenios los cuales permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto matemático” (p. 102).

Duval (2004) reconoce que el uso de más de un sistema de representación y la posibilidad de realizar transformaciones entre los diferentes sistemas resulta ser fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático. Por su parte el pensamiento funcional con foco en el concepto de función implica trabajar con distintos sistemas de representación, donde el sistema permitirá observar de distinto modo este contenido y así lograr su mejor comprensión. En este estudio abordamos sistemas de representación tales como: pictórico, específicamente las configuraciones puntuales; tabular; simbólico numérico y algebraico; y verbal, los cuales definimos a continuación.

Lo que aquí hemos definido y reconocemos como sistemas de representación, en algunos momentos del texto aludiremos a ellos como representaciones para facilitar el lenguaje, la redacción y la lectura.

2.3.1 Sistema de representación pictórico

El sistema de representación pictórico utiliza un dibujo o imagen para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de una tarea, no posee ninguna notación de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Dentro de este sistema de representación se encuentran las configuraciones puntuales.

Castro, Rico y Romero (1997) señalan que “las configuraciones puntuales se basan en un único símbolo: el punto; el cual es un espacio estructurado de representación, usualmente se utiliza la trama cuadrada o la trama isométrica cuando se trabaja en el plano" (p. 367). Es también un modo de organización de una cantidad de puntos que satisface criterios de simetría o regularidad. Las configuraciones puntuales permiten observar una gran variedad de modelos gráficos de un mismo número, permitiendo hacer una valoración visual y un análisis de las estructuras aritméticas de aquel número (Castro, 1995). Esta autora muestra la efectividad de la enseñanza en el reconocimiento de patrones a través de las configuraciones puntuales en su estudio realizado con estudiantes de 12 a 14 años. En las actividades que Castro plantea a los estudiantes, utiliza configuraciones puntuales como las mostradas en la figura 2:

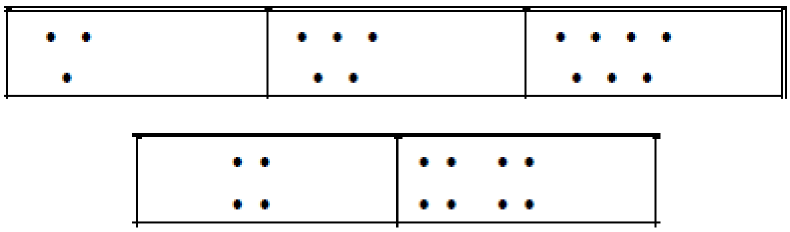


Figura 2. Configuraciones puntuales en Castro (1995)

2.3.2 Sistema de representación tabular

El sistema de representación tabular hace uso de las tablas para ordenar información y relacionar variables. En funciones con dos variables, las tablas permiten relacionar los valores de las variables involucradas (Fuentes, 2014). En diversas investigaciones (Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens, y Sawrey, 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, y Gardiner, 2015; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000) se puede observar el uso de la representación tabular como representación principal y fundamental para que los estudiantes organicen la información y relacionen los valores de las variables involucradas, de modo que realicen conjeturas y den respuestas a preguntas realizadas sobre alguna situación planteada.

2.3.3 Sistema de representación verbal

Este sistema de representación utiliza el lenguaje natural para expresar ideas matemáticas, el cual puede ser abordado de forma oral o escrita. El sistema de representación verbal escrita lo encontramos normalmente en enunciados de tareas utilizando el lenguaje natural. Cañadas y Figueiras (2011) se refieren a este sistema de representación como representaciones textuales, las cuales "se sirven del lenguaje natural de manera oral o escrita para exponer la información de forma cohesionada" (p. 413).

2.3.4 Sistema de representación simbólico

Rico (2009) define las representaciones simbólicas como “aquellas de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento” (p. 8). Dentro de este sistema se puede distinguir entre la representación simbólica numérica y simbólica algebraica. La primera alude al uso de números para expresar operaciones o resultados matemáticos. La segunda se caracteriza por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Estas representaciones implican un mayor grado de abstracción en los estudiantes (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

2.4 Dificultades y errores

La literatura de investigación indica que el aprendizaje de las matemáticas trae consigo la generación de una serie de dificultades en los estudiantes y estas dificultades se exteriorizan a través errores. Un núcleo de investigaciones sobre errores ha sido durante años analizar de forma cuantitativa las respuestas incorrectas de los estudiantes ante diversas tareas y la correlación entre dichos errores, según las variables consideradas en las tareas (Rico y Castro, 1994). El origen de dichos errores también es un foco de investigación, es decir conocer las dificultades que llevan al alumno a incurrir en errores. Entendiéndose por dificultades a “factores que obstaculizan los procesos de comunicación entre el profesor y el alumno o la propia interacción del profesor con el conocimiento matemático, lo que puede repercutir directa o indirectamente en la relación del estudiante con el conocimiento matemático” (Fernández, 2016, p. 195).

Autores como Fernández (2016) y Socas (1997) entre otros, distinguen diferentes tipos de dificultades que presentan los estudiantes en las matemáticas, tales como, dificultades debidas a la complejidad de los objetos matemáticos, debidas a los procedimientos matemáticos, debidas a la presentación por el profesor del contenido, debidas a las condiciones cognitivas del alumno y dificultades debidas a las condiciones afectivas y emocionales del alumno.

Asumimos que las dificultades se expresan a través de una serie de errores en los que incurren los estudiantes y en algunas ocasiones se presenta y se observa la dificultad de no avanzar en el proceso, esta se puede observar cuando un estudiante se ve bloqueado, no comprende lo que se le está pidiendo o simplemente no responde a lo que se le pregunta.

Matz (1980) señala que, “los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94). Para Fernández (2016) “los errores son síntomas mediante los cuales un alumno manifiesta sus conflictos y problemas de aprendizaje relativos a un determinado contenido matemático escolar” (p. 195). Los errores de los estudiantes son una parte inevitable y necesaria del proceso de aprendizaje. Por su parte Socas (2007) define el error como “la presencia en un alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste” (p. 31). Son datos objetivos que se encuentran en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y constituyen un elemento estable de dichos procesos (Rico, 1995). Este autor señala que diversos investigadores y especialistas concuerdan que los errores poseen las siguientes características generales:

- Los errores son sorprendentes. Son aquellos que se han mantenidos ocultos para el profesor y emergen en determinados momentos.
- Son extremadamente persistentes. Se resisten a cambiar ya que para corregir los errores se puede necesitar de una reorganización del conocimiento del alumno.
- Pueden ser sistemáticos o por azar. Los primeros se pueden tomar como síntomas de un método o comprensión equivocada que el estudiante utiliza como correcto. Los segundos reflejan falta de cuidado, estos tienen poca importancia.
- Ignoran el significado. Las respuestas erróneas del alumno no se cuestionan. El alumno no considera el significado de los símbolos y conceptos con los que trabaja.

Considerando estas características y dado que en nuestro estudio es difícil corroborar que los errores que cometen los estudiantes son sistemáticos debido a que se trata de una entrevista breve, lo que observamos en los estudiantes son posibles errores a los que llamaremos respuestas inadecuadas.

Por otra parte, desde la teoría tecnológica del aprendizaje, Kuhn (1962) señala que la preocupación por el aprendizaje de los estudiantes no debe ser siempre los éxitos o que no se incurra en errores, sino más bien considerar los errores como una oportunidad de aprendizaje. La visión constructivista permite que el docente induzca a los estudiantes a cometer un error, que estos mismos lo constaten y de este modo generar un conflicto cognitivo que les lleve a modificar alguna concepción inadecuada (Horner, Bellamy y Colvin, 1984).

En esta investigación asumimos esta postura, observando los errores (respuestas inadecuadas) de los estudiantes y ciertas intervenciones del entrevistador que permiten a los estudiantes reconocer su error y avanzar en el proceso de aprendizaje.

Diferentes autores han clasificado los errores que se manifiestan en el aprendizaje de las matemáticas (Fernández, 2016; Socas, 2007). Algunos estudios han sido específicos en clasificar los errores generados en el álgebra. Santagata (2005) es una de las autoras que da a conocer la naturaleza de una serie de errores en los que incurren los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del álgebra y la geometría en el aula. La autora propone la siguiente clasificación de errores según su naturaleza:

- Conceptual: conexiones erróneas entre conceptos matemáticos.
- Procesal: error en la ejecución de procedimientos, por ejemplo, algoritmos algebraicos, aplicación de fórmulas geométricas.
- Dibujo: error al dibujar una figura.
- Computacional: error aritmético.
- Distracción: error debido a la distracción del estudiante. El estudiante a menudo responde correctamente al maestro justo después de que identifique un error.
- Principio, propiedad y definición: no se reconoce un principio matemático o una propiedad por su nombre, o se define un concepto matemático o una propiedad incorrectamente.
- Otro: todos los errores diferentes a los anteriores.

Presentamos a continuación algunas investigaciones centradas en las dificultades y errores que evidencian los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra.

Ruano, Socas y Palarea, (2008) se centraron en describir los errores de estudiantes de secundaria en la sustitución formal, la generalización y la modelización del lenguaje algebraico. Basados en el marco teórico abordado en Socas (1997), consideran los tres orígenes de los errores que cometen los estudiantes: (a) los causados por un obstáculo, (b) los originados por la ausencia de sentido y (c) los relacionados con actitudes afectivas y emocionales. Los autores muestran que los estudiantes comenten frecuentemente errores tales como la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. La mayoría de los errores se debe a la ausencia de sentido, provocada en ocasiones por dificultades con la aritmética.

Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2015) describen las dificultades que presentan estudiantes de educación secundaria en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal manifestadas a través de errores. Las autoras identificaron y clasificaron los errores en los que incurrieron los estudiantes en tres grandes categorías: los relativos a la completitud del enunciado, derivados de la aritmética y derivados de las características propias del simbolismo algebraico, los dos últimos tomados de la clasificación propuesta por Socas (1997). Sus resultados arrojan que la mayor dificultad se presenta en las traducciones que realizan los estudiantes desde el lenguaje verbal al simbólico. En cuanto a las traducciones desde el lenguaje simbólico al verbal fueron de menor dificultad para los estudiantes, presentando principalmente dificultades debidas a errores del tipo potenciación-multiplicación. Por otra parte las autoras señalan que los errores más frecuentes son aquellos originados por la ausencia de sentido, como los derivados de las características propias del simbolismo algebraico, los derivados de la aritmética y en menor medida los de completitud del enunciado.

En un estudio reciente Morales y Cañadas (2017) describen los errores en los que incurren 8 estudiantes de primero de primaria (6 a 7 años) en el desarrollo de una tarea de pensamiento funcional. Entre los errores distinguen los siguientes: (E1) sumar la cantidad de la variable independiente con la última cantidad de la variable dependiente; (E2) respuesta sin sentido; (E3) suma cinco a la última cantidad de la variable dependiente; (E4) no considera la cantidad constante de la función; (E5) error de cálculo; y (E6) No responde; (E7) sumar cantidad de domingos y cantidad de euros sin cantidad constante. Sus resultados evidencian que los ocho estudiantes cometen el error E1, mientras que los demás errores se evidencian en algunos estudiantes, como E2 que lo presentan cinco de los ocho estudiantes.

2.5 Intervención docente

El docente es uno de los protagonistas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo cual es importante conocer el rol del profesor en distintos momentos del aprendizaje del alumno y en las distintas situaciones que se generan y observar los resultados de cada intervención. De este modo estamos contribuyendo al conocimiento sobre la incidencia del docente en el aprendizaje de los estudiantes.

Concretamente en el contexto del pensamiento algebraico y funcional, Warren (2006) además de centrarse en las acciones del estudiante se enfoca en las acciones del docente. Sus objetivos de investigación son (a) determinar si los estudiantes de 5º de Educación Primaria pueden escribir una generalización en palabras y en símbolos y, (b) identificar las acciones del maestro que ayudan a establecer vínculos entre descripciones verbales y simbólicas de generalización. El patrón mostrado a los estudiantes se observa en la figura 3:

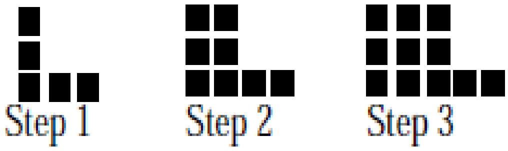


Figura 3. Patrón de azulejos

Los resultados determinan que entre 6 y 10 estudiantes de 27 identifican una relación entre la posición del patrón de azulejos y la cantidad de ellos, mientras que entre 16 y 21 estudiantes no lo hacen. Además la autora observó que después de la intervención del docente con determinadas acciones, una quinta parte de estos estudiantes expresó generalizaciones tanto en lenguaje natural como de forma simbólica algebraica. Las acciones que se identificaron fueron: (a) introducción por parte del docente de un lenguaje específico para ayudar a describir el patrón visual en términos generales y (b) pedir frecuentemente a los estudiantes que expresen de forma simbólica algebraica sus descripciones verbales. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) también ponen su foco en la acción del docente afirmando que ciertas intervenciones del profesor ayudan a los estudiantes a interpretar un problema en términos de relación entre variables.

Por otra parte asumimos que la intervención docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje no es unidireccional, sino que se genera una interacción entre profesor y estudiante. Soller (2001) habla de la importancia de la interacción entre personas, específicamente señala que la capacidad para comunicarse en el ámbito de la enseñanza contribuye en el proceso de aprendizaje. En su estudio propone un modelo de aprendizaje colaborativo, para el cual adapta la taxonomía propuesta por McManus y Aiken (1995) donde se muestran tres grandes habilidades (conflicto creativo, aprendizaje activo y conversación) con subhabilidades (mediar, discutir, motivar, informar, solicitar, reconocer, mantener y tarea) y una serie de acciones para cada una de ellas, que se generan durante la interacción entre estudiantes y que resultan ser efectivas para el aprendizaje. A continuación se muestran estas acciones según cada subhabilidad.

- ✓ Mediar: esta subhabilidad propone una mediación docente.
- ✓ Discutir: se llevan a cabo acciones como, conciliar, estar de acuerdo, ofrecer alternativas, inferir, suponer, proponer excepciones, dudar.
- ✓ Motivar: se pretende que quienes interactúan se animen entre ellos y que se refuercen.
- ✓ Informar: parafrasear, liderar, sugerir, elaborar, clarificar, justificar, afirmar.
- ✓ Solicitar: información, elaboración, clarificación, justificación, opinión e ilustración.
- ✓ Reconocer: apreciar, aceptar o confirmar y rechazar.
- ✓ Mantener: solicitar atención, sugerir acción y solicitar confirmación.
- ✓ Tarea: coordinar un proceso de grupo, solicitar cambio de énfasis, resumir información, finalizar participación.

Estas acciones fueron observadas durante la interacción entre estudiantes. Partimos de estas ideas para analizar acciones entre profesor y estudiante, que es en lo que se centra nuestro estudio. En particular, nuestro interés está en las intervenciones que realiza el entrevistador ante respuestas inadecuadas que entregan los estudiantes.

Estudios como los de Ames y Archer, (1988) y Nicholls, (1984) muestran que las interacciones profesor-alumno con motivo de errores, afectan la motivación y el rendimiento del aprendizaje de los estudiantes.

Aunque algunos investigadores han indagado sobre el uso que el profesorado hace del error en su práctica (Gómez y Mora, 2016; González, Gómez y Restrepo, 2015; Heinze y Reiss, 2007; Son y Crespo, 2009), la literatura es escasa. Estos trabajos estudian los errores en los que incurren los estudiantes en contenidos matemáticos y las tareas de aprendizaje que propone el docente para que los estudiantes superen sus limitaciones y dificultades de aprendizaje.

Santagata (2005) señala que pocos estudios han analizado las interacciones profesor-alumno que rodean los errores de los estudiantes y que ocurren en los entornos reales del aula. En ocasiones los errores no podrán ser previstos por el docente, por lo cual la intervención que realiza el profesor debe ser espontánea y efectiva para que el estudiante avance en el proceso de aprendizaje. La autora compara las lecciones de un grupo de profesores estadounidenses con un grupo de profesores italianos, analizando los errores en los que incurren los estudiantes y la primera respuesta del docente ante los errores.

Uno de los resultados de su estudio es una categorización de las respuestas de los docentes ante los errores de los estudiantes, la cual presentamos a continuación:

- ✓ Da corrección: el maestro corrige el error proporcionando la respuesta correcta.
- ✓ Sugerencia al mismo estudiante: el maestro refina la pregunta, agregando una pista para ayudar al estudiante que cometió el error para llegar a la respuesta correcta.
- ✓ Repite la pregunta al mismo estudiante: el maestro repite la pregunta o menciona al estudiante que cometió el error que su respuesta no es correcta.
- ✓ Por qué: el maestro pide al estudiante que cometió el error que le explique cómo llegó a esa respuesta.
- ✓ Sugerencia para otro estudiante: el profesor refina la pregunta añadiendo una pista y abriendo la pregunta a otros estudiantes o redirigiendo la pregunta a otro estudiante en particular.
- ✓ Redirecciona la pregunta: el maestro dirige la pregunta a otro estudiante.
- ✓ Selecciona la respuesta correcta: los estudiantes dan respuestas múltiples y el maestro escoge la correcta y no agrega ningún comentario. Luego pasa a la siguiente pregunta.
- ✓ Pregunta clase: el profesor pide a los estudiantes que identifiquen el error cometido por un compañero de clase, o que evalúen la corrección de algo que fue hecho o dicho por un compañero de clase.
- ✓ Iniciativa estudiantil: el error es corregido por otro estudiante antes de que el profesor haga su comentario.
- ✓ Otro: todas las respuestas no incluidas en las categorías anteriores.

Por otra parte, bajo la teoría tecnológica del aprendizaje, Horner, Bellamy y Colvin (1984) consideran que si un comportamiento no se da o no se logra, es debido a que no se han entregado los estímulos suficientes o adecuados. En este sentido, asumimos que ciertas acciones del profesor son claves para que el estudiante generalice. En nuestra investigación el papel del docente lo desarrolla el entrevistador, que es quien lleva a cabo ciertas acciones, las cuales consideramos como medio para guiar a los estudiantes en el proceso de generalización.

Presentamos a continuación dos estudios recientes centrados en la intervención docente. Por un lado Morales y Cañadas (2017) describen las acciones que un entrevistador-docente realiza para guiar a los estudiantes cuando estos incurren en ciertos errores en el desarrollo de una tarea de pensamiento funcional. La muestra corresponde a ocho estudiantes de los primeros cursos (6 a 7 años) de un establecimiento de Granada. Los autores describen las siguientes acciones del entrevistador: (A1) pregunta recordatoria sobre elementos del problema: (a) cantidad constante o (b) relación entre cantidad de domingo y dinero; (A2) recurrir a casos consecutivos o no consecutivos trabajados o nuevos casos; (A3) Recurrir a representaciones: (a) concretas o (b) simbólicas; (A4) recurrir a la regla de correspondencia; (A5) retirar representaciones simbólicas (registros escritos); (A6) reemplazar el caso por el que se pregunta por otro cuyo número es menor que el número preguntado. Sus resultados muestran que a todos los estudiantes se les planteo las acciones A2 y A3, mientras que A1 se le planteo a 7 de los 8 estudiantes y las demás acciones a un estudiante cada una. Los autores señalan que estas acciones fueron realizadas cuando los estudiantes evidenciaban un error en el desarrollo de la tarea.

Por otro lado Ureña, Molina y Ramírez (2017) describen los estímulos efectuados a los alumnos por parte de una entrevistadora. Estos estímulos se llevan a cabo durante el desarrollo de una tarea que implica una relación funcional, con la cual el autor busca analizar los niveles de generalización que manifiestan 8 estudiantes de cuarto curso de primaria. Los estímulos que se describen son: (I1) de confianza; (I2) de reafirmación; (I3) de corrección; (I4) de cambio de intención; (I5) de repetición de información; (I6) de sugerencia de proceso e (I7) de aclaración. Los resultados muestran la influencia de los estímulos en el proceso de generalización de los estudiantes, por ejemplo, el estímulo de sugerencia de proceso (I6) ha permitido al estudiante consolidar ideas sobre la forma de la relación funcional y la operación involucrada, por otra parte el estímulo de cambio de intención (I4) ha promovido un mayor trabajo por parte de los estudiantes y una mayor argumentación, resaltando características matemáticas de la relación funcional.

Capítulo 3. Objetivos de investigación

A partir del planteamiento del problema y con base en lo expuesto en el apartado anterior planteamos nuestro objetivo general y cuatro objetivos específicos.

3.1 Objetivo general

OG. Analizar el proceso de generalización de estudiantes de sexto de Educación Primaria, en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntuales.

3.2 Objetivos específicos

El objetivo general propuesto lo desglosamos en los siguientes objetivos específicos.

OE1. Identificar las respuestas inadecuadas que presentan los estudiantes en el proceso de generalización.

OE2. Describir las intervenciones del entrevistador ante las respuestas inadecuadas de los estudiantes.

OE3. Identificar y describir los efectos que producen las intervenciones del entrevistador en el trabajo de los estudiantes.

OE4. Describir el tipo de generalización que logran los estudiantes.

Capítulo 4. Metodología de investigación

En este capítulo presentamos el marco metodológico de la investigación. Caracterizamos el tipo de investigación, describimos los participantes del estudio, el diseño y realización de la recogida de información, definimos las categorías con las que abordamos el análisis de datos y, por último damos a conocer el método de análisis de datos.

4.1 Tipo de investigación

Esta investigación sigue un enfoque mixto, el cual “representa un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos, así como su integración y discusión conjunta” (Hernández Sampieri y Mendoza, 2008 citado en Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 546). Si bien el enfoque es principalmente cualitativo lo complementamos con algunos aspectos cuantitativos.

Como hemos planteado en los objetivos de investigación, nuestro propósito es describir el proceso de generalización que llevan a cabo estudiantes de sexto de Educación Primaria en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntales. Por tanto esta investigación posee una naturaleza descriptiva. Sobre el proceso de generalización, nos hemos centrado en estudiar las respuestas inadecuadas de los estudiantes, las intervenciones del entrevistador y los efectos de las intervenciones. Las investigaciones sobre estos aspectos son escasas, por lo que, nuestro trabajo es de tipo exploratorio. Además, es un estudio transversal ya que se recogen datos de un grupo de sujetos en un momento único (Hernández, et al., 2010). En nuestro caso los datos son recogidos de un grupo de estudiantes de sexto de Educación Primaria, a los cuales se les realiza una entrevista individual semiestructurada.

4.2 Sujetos

La selección del centro y la muestra fue intencional. El centro educativo es privado de línea 1, de Educación Infantil y Educación Primaria y está ubicado en los alrededores de Granada. Participaron ocho estudiantes (6 niños y 2 niñas) que cursaban 6° de Educación Primaria (11-12 años de edad) durante el curso académico 2015-2016. Los estudiantes fueron seleccionados de entre un grupo que el curso anterior había participado en cuatro sesiones de un experimento de enseñanza en el que se trabajó con problemas que involucraban funciones lineales, dentro de una investigación más amplia centrada en el pensamiento funcional. El objetivo del curso previo fue describir el pensamiento funcional de un grupo de estudiantes de quinto de educación primaria. Se les propuso trabajar con tareas contextualizadas que implicaban funciones del tipo $ax + b$, con a y b números naturales o cero. Además, estos problemas se presentaron en el sistema de representación verbal escrito, apoyándose en representaciones manipulativas y pictóricas. Por tanto, los estudiantes para nuestro estudio ya tenían alguna experiencia con problemas que pretendían promover el pensamiento funcional, pero no habían trabajado con configuraciones puntuales, que como detallaremos más adelante, utilizamos para este estudio.

Los estudiantes fueron seleccionados por su tutora, a quien dimos los criterios que los estudiantes debían tener: buena disposición a participar y comunicarse, y que tuvieran diferentes resultados académicos respecto a su mismo grupo (alto-medio-bajo).

4.3 Recogida de información

Realizamos la recogida de información a través de entrevistas semiestructuradas, definidas como "guía de asuntos o preguntas, donde el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados" (Hernández, et al., 2010, p. 418). En nuestro caso el entrevistador es parte del equipo de investigación (entrevistador y encargado de videograbaciones). Grabamos las entrevistas con videocámara y recogimos lo escrito por los estudiantes en un folio. Diseñamos la entrevista para aplicarla durante el tiempo que necesitara cada estudiante. Todas las entrevistas tuvieron una duración menor a 30 minutos y se llevaron a cabo en horario habitual de clases, en un espacio habilitado por el centro escolar.

Por ser una entrevista semiestructurada, había un guion con preguntas y otras surgieron en el momento, en función de las respuestas que ofrecía cada estudiante. Todas las preguntas siguieron un proceso de razonamiento inductivo según el modelo de Cañadas y Castro (2007), partiendo de preguntas relacionadas con casos particulares, que van aumentando hasta llegar al caso general. Más adelante mostramos algunas de las preguntas que planteamos a los estudiantes.

Durante la entrevista, presentamos a los estudiantes un problema que involucra la función lineal $4x + 1$ mediante el uso de las configuraciones puntuales. En el contexto del problema la variable independiente es el número de minutos y la variable dependiente el número de puntos. De esta forma, conforme pasan los minutos, el número de puntos que constituyen una configuración puntual aumenta. Al comienzo de la entrevista, se presentó un folio en blanco al estudiante en el que el entrevistador plantea la tarea de la siguiente manera:

"Tenemos un punto (se dibuja el punto para cero minutos), cuando ha pasado un minuto al punto le ocurre esto (se dibujan los puntos para un minuto), luego cuando pasan dos minutos ocurre lo siguiente (se dibujan los puntos para dos minutos)…"

La introducción de la tarea queda presentada como se muestra en la figura 4.

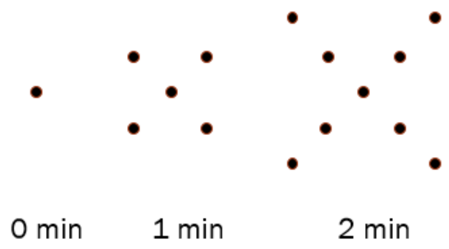


Figura 4. Tarea planteada hasta los dos minutos

Desde ese momento comenzó la intervención del estudiante respondiendo a preguntas como:

- ✓ ¿Podrías dibujar lo que ocurre con los puntos a los 3 minutos?
- ✓ ¿Podrías dibujar lo que ocurre con los puntos a los 4 minutos?
- ✓ ¿Si yo te diera los puntos, podrías saber cuántos minutos han pasado?
- ✓ ¿Si pasaran 10 minutos, cuántos puntos tendría el dibujo?
- ✓ ¿Si pasaran 100 minutos, cuántos puntos tendría el dibujo?
- ✓ ¿Si tenemos 21 puntos, cuántos minutos han pasado?
- ✓ Para cualquier número de minutos, ¿cómo calcularías la cantidad de puntos?
- ✓ Si utilizaras una letra que represente la cantidad de minutos, ¿podrías expresar cómo se calcula el número de puntos?

Algunas de las preguntas que se realizan responden a una relación funcional directa, cuando se sabe el número de minutos (variable independiente) y se quiere conocer la cantidad de puntos (variable dependiente) y otras preguntas responden a una relación inversa, cuando la cantidad de puntos es la que se conoce y el número de minutos es lo que se busca. A cada estudiante se le plantean un total de entre 6 y 11 preguntas, entre 4 y 9 corresponden a preguntas de relación directa y entre 1 y 4 a preguntas de relación inversa.

Para cada una de las preguntas anteriores, el entrevistador pidió a los estudiantes que explicaran cómo habían llegado a sus respuestas. Adicionalmente, el entrevistador intervino mediante preguntas o aclaraciones cuando identificó una respuesta inadecuada por parte de los estudiantes, o bien cuando no sabían cómo responder. En este sentido, se considera que el entrevistador está realizando algún tipo de intervención para permitir avanzar al estudiante.

Tras observar las grabaciones de las entrevistas elaboramos un esquema que nos permitió organizar la información. Ver figura 5.

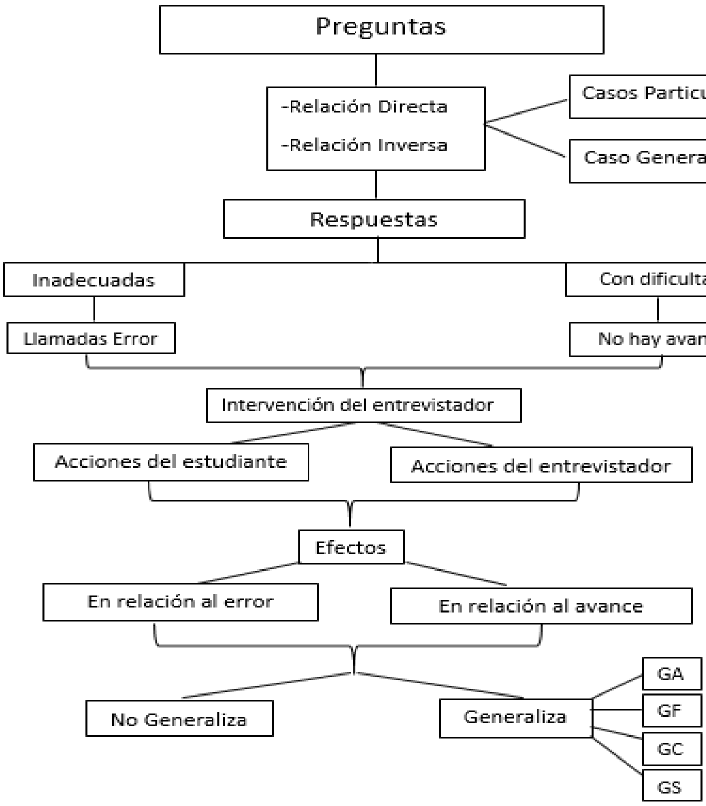


Figura 5. Esquema de análisis de datos

4.4 Categorías de análisis

Para la definición de las categorías de análisis hemos considerado elementos teóricos de investigaciones como las de Cañadas y Castro (2007), Radford (2003, 2010) y Santagata (2005); más adelante describiremos en detalle en qué sentido se han considerado. Realizamos además, un análisis preliminar de los datos recogidos, el cual, en conjunto con los elementos teóricos nos permitió diseñar una primera aproximación de las categorías las cuales fueron refinadas ya sea ampliándolas o ajustándolas según lo observado en las respuestas de los estudiantes. Por tanto, nuestro estudio se apoya en la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), la cual se caracteriza por disponer de procedimientos rigurosos de recogida y análisis de datos. Esta teoría permite que los conceptos se fundamenten desde la propia investigación, con los datos obtenidos.

De acuerdo a nuestros objetivos de investigación, las categorías que hemos determinado para nuestro estudio son las siguientes: (a) respuestas inadecuadas de los estudiantes, (b) intervenciones del entrevistador, (c) efectos de las intervenciones y (d) tipo de generalización. A partir de estas categorías definimos subcategorías y sus posibles valores para analizar la información recogida. A continuación describimos cada una de las categorías y subcategorías con sus posibles valores.

4.4.1 Respuestas inadecuadas

Nos referimos a una respuesta inadecuada cuando el estudiante responde algo incorrecto, o incurre en un posible error. Para efecto de redacción de este apartado a los tipos de respuestas inadecuadas les llamaremos errores, aunque no podamos corroborar si son o no persistentes.

Hemos partido de los trabajos de algunos autores mencionados en el marco teórico para la elaboración de nuestras categorías. Santagata (2005) aborda los errores que cometen los estudiantes y las estrategias que utiliza el docente ante los errores. Describimos la categorización de los errores de esta autora en el marco teórico. En la tabla 1 mostramos la relación entre algunas de las categorías que propone la autora y las propuestas en nuestro estudio.

Tabla 1. *Relación categorías de Santagata (2005) y estudio actual*

Santagata (2005)	Estudio actual
Procesal: se pidió al estudiante que resolviera una tarea matemática o respondiera a una pregunta que requiera la ejecución de procedimientos, p. Algoritmos algebraicos, aplicación de fórmulas geométricas	De procedimiento: el estudiante utiliza o expresa un patrón incorrecto en el desarrollo de su respuesta.
Dibujo: el estudiante comete un error al dibujar una figura.	Respuesta sobre un caso distinto al que se pide: responde por otro caso o procede sobre otro caso (principalmente dibujando).

Con base en un análisis preliminar de los datos como parte de aplicación de la teoría fundamentada, añadimos algunas otras categorías que se adaptan a nuestros datos.

Además de las respuestas inadecuadas, hemos identificado una dificultad en los estudiantes la cual observamos cuando el estudiante no avanza, ya sea por no comprender o verse confundido y no saber cómo seguir avanzando. En este sentido decimos que el estudiante presenta una dificultad. A esta respuesta le hemos llamado no hay avance (D).

Distinguimos finalmente cinco posibles tipos de errores mutuamente excluyentes y la dificultad mencionada anteriormente de no hay avance. A continuación presentamos y describimos las categorías:

- *Error de conteo* (R1): el estudiante realiza un conteo de forma errónea.
- *Error de cálculo* (R2): el estudiante realiza una operación errónea.
- *Respuesta sobre un caso distinto al que se pide* (R3): el estudiante responde por otro caso o procede sobre otro caso al que se está preguntando (principalmente dibujando).
- *Resultado numérico erróneo* (R4): el estudiante solo entrega un resultado numérico erróneo. No se sabe cómo procedió.
- *Error de procedimiento* (R5): el estudiante utiliza o expresa un patrón incorrecto en el desarrollo de su respuesta.
- *No hay avance* (D): se observa al estudiante confundido tratando de explicar algún procedimiento, mencionando variadas estrategias, pero sin concretar algo. También puede manifestar que no entiende la pregunta o no sabe cómo proceder.

4.4.2 Intervenciones del entrevistador

El entrevistador realizó intervenciones cuando los estudiantes presentaron respuestas inadecuadas o la dificultad de no avanzar. Todas ellas tienen la intención de guiar al estudiante para continuar en el proceso. El entrevistador intervino a través de diferentes acciones a un mismo estudiante y también en diferentes momentos.

Partiendo de las ideas de Santagata (2005) diseñamos un sistema de categorías referido a la intervención del entrevistador. En la tabla 2 relacionamos las categorías propuestas por la autora con algunas de las que incluimos en nuestro estudio.

Tabla 2. *Relación categorías de Santagata (2005) y estudio actual*

Santagata (2005)	Estudio actual
Sugerencia para el mismo estudiante: el maestro refina la pregunta, agregando una pista para ayudar al estudiante que cometió el error a llegar a la respuesta correcta.	Reformular la pregunta: el entrevistador plantea de otra manera una misma pregunta ya realizada.
Repite la pregunta al mismo estudiante: el maestro da al estudiante otra oportunidad de dar la respuesta correcta simplemente diciendo que la respuesta no es correcta y espera que el estudiante se corrija, o repitiendo la pregunta.	Repetir la pregunta: el entrevistador repite la respuesta errada del estudiante, sin mencionar que ha incurrido en error.

Por otro lado, considerando que en nuestro estudio se genera una interacción entre el entrevistador y el estudiante, también consideramos el trabajo de Soller (2001). En la tabla 3 mostramos una adaptación de las categorías propuestas por la autora a nuestro estudio. Hemos considerado solo algunas de las categorías de Soller, debido a que las demás no se ajustan a nuestros objetivos de investigación.

Tabla 3. *Adaptación de categorías de Soller (2001) al estudio actual*

Soller (2001)	Estudio actual
Ofrecer alternativa Proponer una excepción Guiar Sugerir	Volver al caso particular inicial (I1); Volver al caso particular anterior (I2); Volver a un caso particular (I3)
Inferir Informar	Verbalizar el argumento o la reflexión del estudiante (I5)
Informar	Repetir la pregunta (I6)
Ofrecer alternativa Suponer Parafrasear Clarificar	Reformular la pregunta (I7)
Conciliar	Calmar (I8)
Dudar Clarificar Justificar	Repetir respuesta y pedir argumento (I9)

A partir de los elementos teóricos de Santagata (2005) y Soller (2001) y tras un análisis preliminar de los datos recogidos, consideramos las siguientes subcategorías de intervenciones y sus posibles valores. Estas permitirán analizar los datos y abordar los objetivos propuestos. Identificamos que el entrevistador intervino de dos modos: (a) a través de acciones a realizar por el estudiante y (b) a través de acciones a realizar por el entrevistador.

Acciones a realizar por el estudiante

En las intervenciones que requieren acciones del estudiante, el entrevistador pide al estudiante que ejecute alguna acción. Consideramos cuatro tipos de acciones mutuamente excluyentes.

- *Volver al caso particular inicial* (I1): el entrevistador sugiere al estudiante volver a revisar el proceso desde el inicio.
- *Volver al caso particular anterior* (I2): el entrevistador sugiere al estudiante volver al caso particular anterior trabajado, siendo este distinto del inicial.
- *Volver a un caso particular* (I3): el entrevistador sugiere al estudiante volver a un caso particular cualquiera, pero distinto del anterior y del inicial.
- *Volver sobre el mismo caso particular* (I4): el entrevistador sugiere al estudiante pensar nuevamente en el caso por el cual se está preguntando.

Acciones a realizar por el entrevistador

Nos referimos a esta categoría cuando la intervención es una acción solo del entrevistador pero dirigida al estudiante. En cualquier caso el entrevistador no le informa al estudiante que su respuesta o argumento es inadecuado, desde una visión constructivista del aprendizaje, pretendemos que sea el estudiante quien, identifique su error y se autocorrija. Esta categoría posee cinco posibles valores mutuamente excluyentes.

- *Verbalizar el argumento o reflexión del estudiante* (I5): el entrevistador repite verbalmente un argumento o una reflexión realizada anteriormente por el estudiante.
- *Repetir la pregunta* (I6): el entrevistador repite la pregunta realizada.
- *Reformular la pregunta* (I7): el entrevistador plantea una pregunta, ya realizada, de otra manera.
- *Calmar* (I8): el entrevistador calma al estudiante mencionando por ejemplo, que hay tiempo suficiente o que no hay prisa.
- *Repetir respuesta y pedir argumento* (I9): el entrevistador repite la respuesta inadecuada del estudiante, sin mencionar que su respuesta no ha sido correcta y

realiza una pregunta de indagación de procedimiento. Por ejemplo se pregunta, “¿por qué?” o “¿cómo obtuviste ese resultado?”

4.4.3 Efectos de las intervenciones

Observamos que las intervenciones realizadas por el entrevistador producen ciertos efectos en las respuestas de los estudiantes. Con base en un análisis preliminar de los datos recogidos identificamos dos tipos de efectos, (a) efectos de las intervenciones ante una respuesta inadecuada y (b) efectos de las intervenciones ante una dificultad. Cada efecto presenta diferentes valores, que describimos a continuación.

Efectos de las intervenciones ante una respuesta inadecuada

Distinguimos los siguientes tres tipos de efectos de las intervenciones ante una respuesta inadecuada.

- *Reconoce y corrige la respuesta inadecuada* (E1): el estudiante es capaz de reconocer que ha entregado una respuesta inadecuada, la corrige y entrega una respuesta correcta.
- *Reconoce y no corrige la respuesta inadecuada* (E2): el estudiante es capaz de reconocer que ha entregado una respuesta inadecuada, pero no la corrige, ya que es posible que no sepa cómo hacerlo.
- *No reconoce la respuesta inadecuada* (E3): el estudiante no logra reconocer que ha entregado una respuesta inadecuada.

Efectos de las intervenciones ante una dificultad

Distinguimos los siguientes tres tipos de efectos de las intervenciones ante una dificultad.

- *Avanza y da respuesta* (E4): el estudiante avanza en el proceso, buscando nuevas estrategias y dando una respuesta.
- *Avanza y no da respuesta* (E5): el estudiante avanza en el proceso, mencionando nuevas estrategias pero sin entregar una respuesta a la pregunta planteada.
- *No avanza* (E6): el estudiante no avanza.

4.4.4 Tipo de generalización

En esta última categoría identificamos si el alumno generaliza. Nos basamos en la clasificación de Radford (2010), considerando los siguientes tipos de generalización.

- *Generalización aritmética* (GA): el estudiante observa una similitud local.
- *Generalización factual* (GF): el estudiante generaliza para casos particulares.
- *Generalización contextual* (GC): el estudiante generaliza para cualquier caso.
- *Generalización simbólica* (GS): el estudiante generaliza para cualquier caso mediante simbolismo algebraico.

En el anexo A presentamos una tabla en la cual recogemos todas las categorías y valores aquí definidos, los cuales serán utilizados para el análisis de los datos de nuestro estudio.

4.5 Método de análisis de datos

Para el análisis de los datos, transcribimos las ocho entrevistas realizadas a los estudiantes (ver anexo B). Con base en las categorías descritas organizamos las respuestas de los estudiantes a todas las preguntas. De las preguntas e intervenciones realizadas por el entrevistador, analizamos las acciones que permitían al estudiante avanzar en el proceso y de las respuestas de los estudiantes identificamos las respuestas inadecuadas, los efectos y los tipos de generalización que cada alumno lograba.

Realizamos un análisis grupal respecto a cada una de las categorías definidas, resaltando algunos resultados individuales para ejemplificar los análisis. Describimos los resultados de forma cuantitativa y cualitativa. Por un lado presentamos y describimos las frecuencias de los valores de las categorías en el grupo de estudiantes. Por otro lado, nos centramos en las frecuencias de cada estudiante, lo que permitirá abordar nuestros objetivos específicos. Para registrar frecuencias, marcamos los valores en cada categoría una vez observada.

Considerando que las preguntas que realiza el entrevistador, se distinguen en dos tipos, las que implican una relación directa y las que implican una relación inversa. En los resultados distinguimos los dos tipos de relaciones en una misma tabla, por cada categoría.

Capítulo 5. Análisis de datos y resultados

En este capítulo damos a conocer el análisis de datos y los resultados obtenidos. Teniendo en cuenta nuestros objetivos de investigación, presentamos los resultados relativos a: (a) tipo de respuestas inadecuadas y dificultad que presentan los estudiantes, (b) intervenciones realizadas por el entrevistador, (c) efectos provocados por las intervenciones y (d) tipo de generalización que logran los estudiantes.

A continuación describimos lo observado en las entrevistas del grupo de estudiantes. Por cada categoría mostramos una tabla, la cual contiene los resultados de cada estudiante ante preguntas que consideran una relación directa y los resultados ante preguntas que consideran una relación inversa.

Para preservar la identidad de los estudiantes que participaron de este estudio, les asignamos una codificación numérica de 1 a 8, acompañado de la letra A (ej. A1, A2, A3, etc.).

5.1 Respuestas inadecuadas y dificultad de los estudiantes

Las respuestas inadecuadas que identificamos en los estudiantes durante la entrevista son de cinco tipos: (a) error de conteo (R1), (b) error de cálculo (R2), (c) respuesta sobre un caso distinto al que se pide (R3), (d) resultado numérico erróneo (R4), (e) error de procedimiento (R5) e identificamos una dificultad, la de no hay avance.

En la tabla 4 mostramos las frecuencias con la que los estudiantes presentaron diferentes respuestas inadecuadas y en la tabla 5 la frecuencia con la que presentaron la dificultad de no avanzar. Para respuestas relativas a la relación directa, el valor se muestra sin paréntesis y para la inversa dentro del paréntesis. Por ejemplo, en la tabla 4 se observa que cuando se trata de preguntas que implican una relación directa, la respuesta inadecuada R1 la presentan tres estudiantes (A2, A4 y A8), y se manifestó en seis ocasiones. En cambio cuando se trata de una relación inversa, la respuesta inadecuada R1 la presenta un estudiante (A2) y la manifestó en una ocasión. Respecto a los estudiantes, podemos observar que, A3 se le realizaron seis preguntas de relación directa y manifestó las respuestas inadecuadas R2, R3, R5 en siete ocasiones y la dificultad de no avanzar en dos ocasiones (ver tabla 5). Al mismo estudiante se le presentaron cuatro preguntas de relación inversa y evidenció las respuestas inadecuadas R2 y R5 en tres ocasiones en total y en una ocasión la dificultad de no avanzar.

Tabla 4. *Resumen de respuestas inadecuadas en los estudiantes*

		Respuesta inadecuada					
A	N° preguntas relación D(I)	R1	R2	R3	R4	R5	Total
1	9(1)		1			3	4
2	4(2)	2(1)			(1)	1(1)	3(3)
3	6(4)		3(1)	1		3(2)	7(3)
4	8(3)	1		1	2	2(1)	6(1)
5	5(3)				1(1)		1(1)
6	6(3)				1	2	3
7	5(2)					2	2
8	5(3)	3		1		1(3)	5(3)
Total	48(21)	6(1)	4(1)	3	4(2)	14(7)	31(11)

Nota. A = alumno; D = relación directa; I = relación inversa; R1 = error de conteo; R2 = error de cálculo; R3 = respuesta sobre un caso distinto al que se pide; R4 = resultado numérico erróneo; R5 = error de procedimiento.

Tabla 5. *Resumen de dificultades en los estudiantes*

A	N° preguntas relación D(I)	Dificultad
1	9(1)	3
2	4(2)	1(1)
3	6(4)	2(1)
4	8(3)	2(2)
5	5(3)	
6	6(3)	1
7	5(2)	
8	5(3)	1(2)
Total	48(21)	10(6)

Nota. A = alumno; D = relación directa; I = relación inversa

5.1.1 Relación directa

De la tabla 4 se desprende que el grupo de estudiantes ante preguntas sobre una relación directa (48 en total en el grupo de estudiantes) entregan mayormente la respuesta inadecuada del tipo error de procedimiento (R5) y la dificultad no hay avance (observada en la tabla 5), con frecuencias de 14 y 10 respectivamente. De modo global, R5 se observa en siete de los ocho estudiantes y la dificultad de no avanzar en seis de los ocho estudiantes. Las demás respuestas inadecuadas se presentan entre tres y seis ocasiones en el grupo de estudiantes. La respuesta inadecuada de menor presencia es responder sobre un caso distinto al que se pide (R3), la cual se evidencia en tres estudiantes (A3, A4 y A8).

En general, el grupo de alumnos presentan entre una y siete respuestas inadecuadas y entre cero y tres la dificultad de no avanzar, tratándose siempre de respuestas ante preguntas de relación directa (valores fuera de los paréntesis).

Observamos algunas diferencias notables entre algunos estudiantes. Por ejemplo, A4 a quien se le plantearon ocho preguntas de relación directa, incurre en todos los tipos de respuestas inadecuadas y la dificultad de no avanzar (ocho ocasiones), excepto en el error de cálculo (R2), por lo que observamos que el estudiante respondió de manera inadecuada a todas las preguntas. Mientras que A5 a quien se le plantearon cinco preguntas de relación directa incurre solo en la respuesta inadecuada (R4) y en solo una ocasión.

Particularmente entre los estudiantes que solo presentaron inconvenientes al responder preguntas de relación directa (A1, A6 y A7), a A1 se le plantearon nueve preguntas de relación directa y respondió inadecuadamente en cuatro ocasiones (R2 y R5) y la dificultad de no avanzar la evidenció en tres ocasiones. Ante preguntas de relación directa con valores menores que 100 (1, 2, 3, 4, o 10 minutos), A1 reconoció el patrón de multiplicar el número de minutos por cuatro y sumar uno. En cambio, ante la pregunta "¿cuántos puntos habrá a los 100 minutos? se da la conversación que mostramos en el siguiente fragmento.

> Entrevistador: *Si yo te dijera aquí (indicando en la tabla la columna de los minutos) 100*
> A1*: (la alumna realiza cálculos mentales y completa la tabla con 410) creo que es esto.*
> Entrevistador: *¿Por qué?*
> A1: *Porque he multiplicado 100 por 41, yo no sé.*

En el fragmento se observa una respuesta inadecuada de error de procedimiento (R5) de A1 (tres ocasiones) porque multiplica por 100 el término encontrado anteriormente para los 10 minutos (41). Además, se observa un error de cálculo (R2), ante una pregunta de relación directa.

5.1.2 Relación inversa

Ante preguntas de relación inversa (21 en total en el grupo de estudiantes), de la tabla 4 se desprende que los estudiantes presentaron con mayor frecuencia la respuesta inadecuada error de procedimiento (R5) (siete ocasiones), seguido por la dificultad de no avance (D) en seis ocasiones. En términos de frecuencia, en el otro extremo está dar una respuesta sobre un caso distinto al que se pide (R3) que no se presentó. De modo global, R5 se observa en cuatro de los ocho estudiantes, al igual que la dificultad de no avanzar. Mientras que las demás respuestas inadecuadas se dieron en uno o dos estudiantes.

En general el grupo de alumnos presentó entre uno y tres respuestas inadecuadas y entre cero y dos la dificultad de no avanzar, tratándose siempre de respuestas ante preguntas de relación inversa (valor dentro del paréntesis).

Entre los estudiantes que presentaron mayor cantidad de respuestas inadecuadas se encuentra A8, quien presentó tres respuestas inadecuadas con error de procedimiento (R5) y en dos ocasiones no avanzó (D). A este estudiante se le plantearon tres preguntas de relación inversa, dando más de una respuesta inadecuada en alguna pregunta.

En el siguiente fragmento se evidencia un error de procedimiento (R5) de A8, ante una pregunta de relación inversa.

> Entrevistador*: Ahora vamos a pensarlo al revés, imagínate que tengo 21 puntos, ¿sabes cuánto tiempo ha pasado?*
>
> A8: *Pues, 21 por cuatro es 84, más el del centro 85*

Observamos que el estudiante utilizó el mismo procedimiento para preguntas de relación directa, lo que es inadecuado considerando que es una pregunta de relación inversa.

En general el error de procedimiento (R5) y la dificultad de no poder avanzar (R6) se evidenciaron como los más frecuentes tanto en preguntas que implicaban una relación directa como inversa.

5.2 Intervenciones del entrevistador

Identificamos nueve tipos de intervenciones por parte del entrevistador: volver al caso particular inicial (I1), volver al caso particular anterior (I2), volver a un caso particular (I3), volver sobre el mismo caso particular (I4), verbalizar el argumento o la reflexión del estudiante (I5), repetir la pregunta (I6), reformular la pregunta (I7), calmar (I8) y repetir respuesta y pedir argumento (I9). Hubo estudiantes que no requirieron intervención debido a que no mostraron ningún error o dificultad. En cambio otros requirieron una o más de una, de igual o distinto tipo. En lo que sigue, nos referimos al número y tipo de intervenciones que recibe cada estudiante, como la cantidad de ocasiones en que el entrevistador interviene en el grupo.

En la tabla 6 mostramos los resultados sobre las intervenciones y el número de veces que el entrevistador las realizó. Los valores que se encuentran entre paréntesis corresponden a los resultados ante preguntas de relación inversa y los valores fuera de los paréntesis corresponden a resultados ante preguntas de relación directa. Por ejemplo, en la tabla 6 se observa que, cuando se trata de una relación directa, la intervención repetir respuesta y pedir argumento (I9) se le realizó a cuatro estudiantes y se evidenció en cuatro ocasiones. Un caso concreto es que a A2 se le intervino en una ocasión de este modo. Respecto a los estudiantes, a A1 se le plantearon nueve preguntas de relación directa y se le intervino ante respuestas inadecuadas en siete ocasiones durante su entrevista, las intervenciones fueron de cinco tipos distintos (I1, I3, I5, I7 y I8).

Tabla 6. *Resumen de intervenciones en los estudiantes*

		Intervenciones									
		Acciones del estudiante				Acciones del entrevistador					
A	N° preguntas relación D(I)	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	Total
1	9(1)	2		2		1		1	1		7
2	4(2)	2(1)	1	2(3)	(1)	(1)	1	(1)		1(1)	7(8)
3	6(4)	(1)		2	1	2(2)	2(1)				7(4)
4	8(3)	1(1)		1			4(1)	1			7(2)
5	5(3)							(1)		1	1(1)
6	6(3)	1		2		2	2	2			9
7	5(2)					1				1	2
8	5(3)	(1)		3		(1)	(2)	2	(1)	1	6(5)
Total	48(21)	6(4)	1	12(3)	1(1)	6(4)	9(4)	6(2)	1(1)	4(1)	46(20)

Nota. A = alumno; D = relación directa; I = relación inversa; I1 = volver al caso particular inicial; I2 = volver al caso particular anterior; I3 = volver a un caso particular; I4 = volver sobre el mismo caso; I5 = verbalizar argumento o reflexión del estudiante; I6 = repetir la pregunta; I7 = reformular la pregunta; I8 = calmar; I9 = repetir respuesta y pedir argumento.

5.2.1 Relación directa

De la tabla 6 se desprende que el grupo de estudiantes ante preguntas sobre una relación directa (48 en total en el grupo de estudiantes) el entrevistador intervino entre dos y siete ocasiones. La intervención que realizó con mayor frecuencia (12 ocasiones) fue recomendar al estudiante volver a un caso particular (I3), intervención que requería acciones del estudiante. La siguiente intervención por orden decreciente de frecuencia (9 ocasiones) fue repetir la pregunta (I6), correspondiente a una acción del entrevistador. También con una alta frecuencia (6 ocasiones) el entrevistador intervino verbalizando el argumento o reflexión del estudiante (I5), recomendando al estudiante volver al caso inicial (I1) o reformulando la pregunta (I7).

A continuación mostramos un ejemplo de la intervención que se presentó con mayor frecuencia (I3). Una de las estudiantes que recibió esta intervención, anteriormente había trabajado con los valores 1, 2, 3, 4 y 10 para el número de minutos y había reconocido el patrón de multiplicar el número de minutos por cuatro y sumar uno. Al responder la pregunta ¿cuántos puntos habrá a los 100 minutos? la estudiante evidencia un error de procedimiento (R5). Considerando lo anterior el entrevistador interviene como mostramos en el siguiente fragmento.

> Entrevistador*: Si yo te dijera aquí (indicando en la tabla en la columna de los minutos) 100*
> A: *(la alumna realiza cálculos mentales y completa la tabla con 410) creo que es esto.*
> Entrevistador*: ¿Por qué?*
> A: *Porque he multiplicado 100 por 41, yo no sé.*
> Entrevistador: *Entonces, ¿con ese criterio tú podría haber calculado por ejemplo el 10?*

En el diálogo se observa la intervención (I3). El entrevistador pregunta a la estudiante si el procedimiento que está utilizando para la actual pregunta (número de puntos a los 100 minutos) lo utilizó también para calcular el número de puntos a los 10 minutos. Esto le permitió a la estudiante recordar procedimientos anteriores y compararlos con el actual y así razonar respecto a la relación funcional que está involucrada.

Las intervenciones menos frecuentes fueron recomendar al estudiante volver al caso anterior (I2), volver sobre el mismo caso (I4) y calmar al estudiante (I8), evidenciándose en una ocasión cada una.

Observamos diferencias entre los alumnos en términos de las intervenciones que realizó el entrevistador en un contexto de relación directa. A6 es quien recibió la mayor cantidad de intervenciones (9 ocasiones), estas fueron del tipo I1, I3, I5, I6 e I7, donde la mayoría correspondían a acciones a realizar por el entrevistador. Considerando que a este estudiante se le plantearon seis preguntas de relación directa y el entrevistador intervino en nueve ocasiones, nos da a entender que en una o varias preguntas requirió más de una intervención. La situación anterior se evidencia en cuatro de los ocho estudiantes. Además A6 solo requirió intervención en preguntas de relación directa. En el otro extremo a A5 el entrevistador intervino en una ocasión, repitiendo la respuesta del estudiante y pidiéndole argumento (I9). A este alumno se le plantearon cinco preguntas de relación directa y requirió intervención en una ocasión. En general observamos que el entrevistador realizó 46 intervenciones cuando las preguntas implicaban una relación directa.

5.2.2 Relación inversa

Cuando las respuestas inadecuadas o dificultades de los estudiantes se presentaron ante preguntas de relación inversa (21 en total en el grupo de estudiantes) el entrevistador intervino entre una y ocho ocasiones. Las intervenciones que mayormente se presentaron son I1, I5 e I6 (4 ocasiones cada una), de las cuales dos corresponden a intervenciones que requerían acciones del entrevistador. Las intervenciones del tipo I4, I8 e I9 se presentaron con una baja frecuencia (1 ocasión cada una), mientras que la intervención volver al caso particular anterior (I3) no se evidenció.

A continuación mostramos un ejemplo de intervención que se presentó con mayor frecuencia (I5), correspondiente a verbalizar argumento o reflexión del estudiante y que pertenece al grupo de acciones a realizar por el entrevistador.

> Entrevistador*: Si te doy 21 puntos*
> A*: ¿Totales?*
> Entrevistador*: Si*
> A*: Serían, 21 menos 5… a ver 21 menos 5 sería el primer minuto y entonces serían 16 puntos y si aquí lo hago por cuatro ahora sería 16 entre 4, entonces sería lo mismo solo que en vez de multiplicando es dividiendo, tengo 16 puntos entre cuatro para cuatro esquinas y luego eso más cinco. Entonces, sería 16 entre cuatro es 4 (realiza la operación en la hoja)… más cinco es nueve, habrían pasado nueve minutos.*
> Entrevistador*: ¿Pero los cinco no eran puntos?*
> A*: Ah! espera es verdad, serían cuatro más cinco nueve puntos. A ver espera que hay algo que fallo.*
> Entrevistador*: Te di 21 puntos, a esos puntos le has quitado los cinco del primer minuto…*
> A*: Sí*
> Entrevistador: *Ahora los 16 puntos que te han quedado lo has dividido entre cuatro…*

En el ejemplo se observa que el entrevistador repite en dos ocasiones el argumento dicho por el estudiante anteriormente, pero con menos palabras. Observamos que esta intervención permitió al estudiante ordenar sus ideas y seguir argumentando, reflexionar lo que había hecho anteriormente y decidir si es o no la respuesta adecuada y, en caso de no serlo, si debería modificarla.

Algunas diferencias entre los estudiantes en términos de las intervenciones que hace el entrevistador en un contexto de relación inversa. A2 es quien recibió la mayor cantidad de intervenciones (8 ocasiones), estas fueron del tipo I1, I3, I4, I5, I7 e I9, algunas correspondientes a acciones del estudiante y otras a acciones del entrevistador. Considerando que a este estudiante se le plantearon dos preguntas de relación inversa observamos que requirió más de una intervención por cada pregunta. Por otro lado no hubo intervención por parte del entrevistador a los estudiantes A1, A6 y A7, debido a que no presentaron respuestas inadecuadas o dificultad al plantearles preguntas de relación inversa. En general al grupo de estudiantes se le intervino en 20 ocasiones en contexto de relación inversa.

5.3 Efectos producidos en los estudiantes

Después de que el entrevistador interviniera ante respuestas inadecuadas o dificultades observamos seis tipos de efectos en los estudiantes: reconoce y corrige la respuesta inadecuada (E1), reconoce y no corrige la respuesta inadecuada (E2), no reconoce la respuesta inadecuada (E3), avanza y da respuesta (E4), avanza y no da respuesta (E5) y no avanza (E6). Agrupamos estos efectos en dos tipos: (a) efectos de las intervenciones ante respuestas inadecuadas (E1, E2 y E3) y (b) efectos de las intervenciones ante la dificultad de no hay avance (E4, E5, E6).

A modo general, observamos que hubo estudiantes que no presentaron ningún efecto debido a que no presentaron ninguna respuesta inadecuada o dificultad por lo que no fue necesario alguna intervención. En cambio otros estudiantes mostraron uno o más efectos ante las intervenciones. Además frente a una misma intervención realizada en más de una ocasión a un estudiante, se observan efectos distintos. Detallaremos estos puntos más adelante.

En la tabla 7 recogemos los resultados obtenidos del grupo de estudiantes en relación a cuántos y qué tipos de efectos presentaron. Entre paréntesis se encuentran los resultados ante preguntas de relación inversa y fuera del paréntesis los resultados ante preguntas de relación directa. Por ejemplo, uno de los efectos que se presentó en contexto de relación directa fue no reconocer la respuesta inadecuada (E3) el cual se manifestó en seis ocasiones en cinco estudiantes. Un caso concreto es que a A3 se le plantearon seis preguntas de relación directa y evidenció cuatro tipos de efectos (E1, E2, E3 y E5) en siete ocasiones ante ciertas intervenciones, lo que nos da a entender que en una o varias preguntas el estudiante necesitó más de una intervención, observando así un efecto.

Tabla 7. *Resumen de efectos en los estudiantes*

A	N° preguntas relación D(I)	Efectos						Total
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	
1	9(1)		4	1	1		1	7
2	4(2)	2(2)	2(3)	1(2)	1	1(1)		7(8)
3	6(4)	2	3(3)	1	(1)	1		7(4)
4	8(3)	3	2(1)	(1)	1	1		7(2)
5	5(3)	1(1)						1(1)
6	6(3)	2	2	1		2		7
7	5(2)		2					2
8	5(3)	1(1)	2(1)	2(1)	(1)	1(1)		6(5)
Total	48(21)	11(4)	17(8)	6(4)	3(2)	6(2)	1	44(20)

Nota. A = alumno; D = relación directa; I = relación inversa; E1 = Reconoce y corrige la respuesta inadecuada; E2 = Reconoce y no corrige la respuesta inadecuada; E3 = No reconoce la respuesta inadecuada; E4 = Avanza y da respuesta; E5 = Avanza y no da respuesta; E6 = No avanza

5.3.1 Relación directa

De la tabla 7, en un contexto de relación directa, se desprende que todos los estudiantes presentaron algún tipo de efecto, los cuales se manifestaron después de alguna intervención. Las frecuencias de los efectos son muy variadas, desde 1 para el efecto no avanza (E6) hasta 17 para el efecto reconoce y no corrige la respuesta inadecuada (E2). El efecto reconoce y no corrige la respuesta inadecuada (E2) se presentó en todos los alumnos menos en uno (A5). Este efecto, además, es el de mayor frecuencia en el grupo (17 ocasiones). El siguiente efecto por orden decreciente de frecuencia es reconoce y corrige la respuesta inadecuada (E1), el cual detectamos en 11 ocasiones. Tanto E1 como E2 corresponden a efectos de las intervenciones ante la presencia de alguna respuesta inadecuada. Ambos efectos los podemos considerar como un resultado positivo de las intervenciones, ya que en estos casos el estudiante reconoce que ha entregado una respuesta inadecuada, aunque no siempre sabe cómo corregirla, aun así permite avanzar en su proceso. Además, en el caso de que el estudiante no logre corregir su respuesta, el entrevistador interviene nuevamente, con el propósito de que el estudiante logre avanzar.

A continuación mostramos un ejemplo del efecto más frecuente (E2), en el cual el estudiante reconoce pero no corrige su respuesta inadecuada. El ejemplo corresponde a una parte de la entrevista de A3.

> Entrevistador: *Bueno tu ahora olvídate de todos los anteriores, yo te doy un número cualquiera, si yo te doy un número cualquiera, tú ¿cómo calcularías el número de puntos? si yo te digo por ejemplo 200 minutos, tú cómo sabrías…*
>
> A: *Pues de acuerdo, un minuto son cinco puntos, sería el número por cinco, de los cinco puntos, entonces serían 200 por cinco y yo lo que espero hacer es 2 por 5, 10 y luego le pongo el cero, entonces 2 por 5, 10, más el cero de unidad... decenas, serían 100 puntos, en 200 minutos.*
>
> Entrevistador: *Esa teoría te sirve también en esos puntos (muestra caso anteriores) ¿lo has comprobado?... para tres minutos.*
>
> A: *Sí, a ver…*
>
> Entrevistador*: Has multiplicado por cinco antes ¿no?*
>
> A: *3 por 5, 15, sería (el alumno recurre a mirar la tabla y la configuración puntual y se da cuenta de un error)… no, aquí hay algo que he hecho mal.*

En el ejemplo observamos que el estudiante tras ciertas intervenciones del entrevistador reconoció haber cometido un error en la estrategia que había utilizado y que la respuesta a la pregunta no era la adecuada.

El siguiente efecto que menos se evidenció, después de E6 (una ocasión en un estudiante) fue avanza y da respuesta (E4), que se presentó en tres ocasiones por tres estudiantes. En cambio, los efectos no reconoce la respuesta inadecuada (E3) y avanza y no da respuesta (E5) se evidenciaron en cinco ocasiones cada uno.

Referido a los estudiantes, entre los que presentaron mayor cantidad de efectos se encuentra A2, que evidenció efectos en siete ocasiones, presentando cinco de los seis tipos de efectos (E1, E2, E3, E4, y E5). En dos ocasiones presentó el efecto reconoce y corrige la respuesta inadecuada (E1), en otras dos ocasiones presentó el efecto reconoce y no corrige la respuesta inadecuada (E2), mientras que los efectos E3, E4 y E5 los manifestó en una ocasión cada uno. Se observa además que A4 en cinco de siete ocasiones que manifestó algún efecto fue eran referidos a que reconocía haber entregado una respuesta inadecuada, tres de ellas las corrigió, lo que podría ser consecuencia de las intervenciones que se le realizó. En general el grupo de estudiantes manifestó efectos en 44 ocasiones en el contexto de relación directa.

5.3.2 Relación inversa

Por otro lado en preguntas de relación inversa se observaron efectos en 20 ocasiones. Los estudiantes manifestaron algún efecto entre dos y ocho ocasiones. El efecto con mayor frecuencia fue reconoce y no corrige la respuesta inadecuada (E2) (8 ocasiones) y lo presentaron cuatro de los ocho estudiantes, seguido en frecuencia por el efecto no reconoce la respuesta inadecuada (E3), que se evidenció en cuatro ocasiones por tres estudiantes (A2, A4 y A8). Concretamente A2 es quien presentó la mayor frecuencia de efectos en un contexto de relación inversa, presentando efectos en ocho ocasiones (E1, E2, E3 y E5), cinco de los cuales referidos a que reconoció la respuesta inadecuada (E1 y E2) y en dos de ellas las corrigió (E1). Además en dos ocasiones no logró reconocer la respuesta inadecuada que entregó (E3). A continuación mostramos un fragmento de entrevista de A2, quien presentó más efectos en el grupo de estudiantes, en el fragmento se observa el efecto no reconoce la respuesta inadecuada.

> Entrevistador: *Muy bien, y si yo te diera un dibujo ¿tu sabrías cuánto tiempo ha pasado?*
> A2*: Sí*
> Entrevistador: *A ver, te doy un dibujo (configuración puntual con 29 puntos)*
> A2*: (el alumno cuenta los puntos y reflexiona)… tendría que ser uno menos, porque 30, cuatro por algo es 30.*
> Entrevistador*: ¿Aquí hay 30 puntos? (indicando el dibujo de la configuración puntual)*
> A2: *Sí*
> Entrevistador*: Vamos a contarlos…15 (el entrevistador cuenta solo una parte de los puntos para que el estudiante continúe)*
> A2*: Por 2, 30.*
> Entrevistador: *Pero has contado este (indicando el punto del centro), lo has contado dos veces.*
> A2*: Y ¿no se puede?*

En el ejemplo observamos que a pesar de que el entrevistador intervino, el estudiante no reconoció su respuesta inadecuada, en la que había incurrido en un error de conteo.

5.4 Generalización

Durante el transcurso de la entrevista se pregunta a los estudiantes por la generalización de forma directa e indirecta. Observamos que todos ellos generalizaron en algún momento de alguna forma. Sus respuestas las hemos categorizado según los tipos de generalización propuestos por Radford (2010): generalización aritmética (GA), generalización factual (GF), generalización contextual (GC) y generalización simbólica (GS).

En la tabla 8 presentamos los resultados del grupo de estudiantes sobre el tipo de generalización detectada y su frecuencia. Cada tipo de generalización presenta la frecuencia con que cada alumno generalizó. Un mismo alumno podía generalizar de diferentes formas durante la entrevista. Los valores que se encuentran entre paréntesis corresponden a los resultados ante preguntas de relación inversa y fuera del paréntesis los resultados ante preguntas de relación directa. Por ejemplo, ante preguntas de relación directa cuatro estudiantes (A1, A4, A5 y A7) manifestaron la generalización contextual (GC) en cinco ocasiones. Un caso concreto es A5, el cual generaliza de las cuatro formas (GA, GF, GC, GS) y alguna de ellas en más de una ocasión (GA en una ocasión, GF en dos ocasiones, GC en una ocasión y GS en una ocasión).

Tabla 8. *Resumen de generalización en los estudiantes*

		Generalización				
A	N° preguntas relación D(I)	GA	GF	GC	GS	Total
1	9(1)	3(1)	1	2		6(1)
2	4(2)	2	2(2)			4(2)
3	6(4)	2(3)	2(1)			4(4)
4	8(3)	2		1		3
5	5(3)	1(1)	2	1(2)	1	5(3)
6	6(3)	2(1)	2(2)			4(3)
7	5(2)	1	2(2)	1	1	5(2)
8	5(3)	(1)	4(1)			3(2)
Total	48(21)	13(7)	15(8)	5(2)	2	34(17)

Nota. A = alumno; D = relación directa; I = relación inversa; GA = generalización aritmética; GF = generalización factual; GC = generalización contextual; GS = generalización simbólica.

5.4.1 Relación directa

De la tabla 8, ante preguntas sobre una relación directa, se observa que todos los estudiantes generalizaron y que hubo al menos un estudiante que mostró los cuatro tipos de generalización que considera Radford (2010). Los estudiantes generalizaron entre tres y seis ocasiones durante la entrevista. El tipo de generalización que evidenciaron mayormente es la generalización factual (GF), presentada en 15 ocasiones y lograda por todos los estudiantes menos uno (A4). Este tipo de generalización da cuenta de que el estudiante identificó un patrón para casos particulares. Mostramos a continuación un ejemplo de generalización factual de A7, quien evidenció en dos ocasiones este tipo de generalización. Cabe considerar que este alumno anteriormente observó que en la figura para tres minutos cada parte de la figura tenía tres puntos y le agrega el del centro. Al preguntarle ¿cuántos puntos habrá a los cuatro minutos? observamos el siguiente fragmento de entrevista:

> Entrevistador: *Si pasan cuatro minutos ¿cuántos puntos tendrías?*
> A*: (el alumno dibuja los puntos y responde de forma correcta) 17*
> Entrevistador*: 17, ¿cómo lo sabes? ¿cómo lo has hecho?*
> A*: Porque si directamente salen cuatro, puedes sumar, cuatro, cuatro, cuatro y cuatro y luego el uno (dibujando e indicando los brazos de la x y el punto del centro)*

Observamos que el alumno utiliza, la misma estrategia de los tres minutos para dar respuesta a esta pregunta (cada parte tendría cuatro puntos y le agrega el del centro). Reconoció una generalidad pero esta es solo para el caso concreto de cuatro minutos, ya que necesitó observar la configuración puntual para tres minutos y dibujar la configuración para cuatro minutos y señalar que debía sumar cuatro de cada parte de la figura y agregar uno indicando el punto del centro.

Por otra parte, la generalización aritmética (GA) también se presentó con alta frecuencia (13 ocasiones) y se evidenció en todos los estudiantes, menos en A8. Mostramos a continuación un ejemplo de generalización aritmética de A1, quien generalizó en más ocasiones (3) de esta forma:

> Entrevistador*: Cuando pasa un minuto, ¿qué ocurre?*
> A: *Que hay cuatro puntos más*
> Entrevistador: *Cuando pasan dos minutos ¿qué ocurre?*
> A*: Que vuelve a haber cuatro más*

En este ejemplo, A1 da cuenta de una similitud local, la cual aumenta cuatro puntos al pasar cada minuto, pero esto no le permite encontrar la cantidad de puntos para cualquier número de minutos.

En tanto que la generalización contextual (GC) la evidenciaron cuatro estudiantes (A1, A4, A5 y A7), uno de los cuales (A1) generalizó en dos ocasiones de forma contextual. Además, este estudiante fue quien generalizó en más ocasiones durante la entrevista: de las nueve preguntas de relación directa que se le plantearon, generalizó en seis de ellas de diferentes formas. Mostramos a continuación un fragmento de la entrevista de A1, donde observamos que generalizó de forma contextual:

> Entrevistador*: Ahora vamos a intentar que lo puedas explicar mejor ¿cómo se calcularía el número de puntos para cualquier tiempo que yo te diera?*
> A: *Yo lo haría quitando el punto inicial, luego sumándoselo. Haber… multiplicado el tiempo por los puntos que se aumentan*
> Entrevistador: *¿Que son cuántos?*
> A: *Cuatro, y luego sumándoles el punto inicial, al resultado.*

En el fragmento se observa que el estudiante se abstrae de los casos particulares y generaliza para cualquier número de minutos. Además encuentra la relación entre el número de minutos y la cantidad de puntos.

En cuanto a la generalización simbólica (GS), es el tipo de generalización menos observada, dos estudiantes la evidenciaron (A5 y A7) y en una oportunidad cada uno. Estos alumnos coinciden en ser dos de los que generalizaron en más ocasiones (5 veces cada uno) y de las cuatro formas. A5 es uno de los estudiantes que generalizó de forma simbólica. Mostramos a continuación un fragmento de su entrevista que evidencia este tipo de generalización:

> Entrevistador: *Vamos a suponer que yo llamo x al número de minutos que haya pasado… ¿vale?.. ¿con x sabrías escribir lo que tú me has comentado ahora mismo?*
> A: *¿Cómo?*
> Entrevistador: *Que si x es el número de puntos, no no, el número de minutos…*
> A*: Si ya sé, x por 4 más uno*
> Entrevistador: *Vale, puedes escribirlo*
> A: *¿Cómo?*
> Entrevistador: *Como tú quieras, como tu sepas*
> A*: (el alumno escribe en el folio x*4+1)*

El alumno utiliza x con el significado de número de minutos y a la expresión completa el número de puntos que tendría la configuración puntual para x número de minutos.

Debemos aclarar que hubo un estudiante al que el entrevistador no le preguntó por el caso general, por lo que puede ser causa de que no generalizara de manera contextual y/o simbólica.

En general observamos que en el grupo de estudiantes hubo 34 generalizaciones ante preguntas de relación directa.

5.4.2 Relación inversa

Ante preguntas de relación inversa los estudiantes generalizaron entre una y cuatro ocasiones. La generalización factual (GF) es la de mayor frecuencia, presentándose en ocho ocasiones por cinco de los ocho estudiantes. Le sigue en frecuencia decreciente la generalización aritmética (GA), presentada en siete ocasiones por cinco de los ocho estudiantes. La generalización contextual (GC) se evidenció en dos ocasiones por el mismo estudiante (A5), mientras que la generalización simbólica (GS) no se evidenció.

A continuación mostramos un fragmento de entrevista de A8, quien generalizó de forma factual ante preguntas de relación inversa.

Entrevistador*: Luego si yo te doy un número, por ejemplo, el 81, 81 puntos, ¿tu sabrías cuánto tiempo ha pasado? Puedes escribir lo que tú quieras, te doy 81 puntos.*
A: *20 minutos*
Entrevistador: *¿Cómo lo has hecho?*
A: *Quitando el centro y suponiendo que 81 le quitas el del centro, se quedan 80 y como es un cuadrado tienes que tener 4 diagonales, entonces 80 entre 4 es 20 (marca el dibujo haciendo cuadrados con los puntos y líneas, en el dibujo de los 3 minutos) no se me había ocurrido antes.*

En el ejemplo observamos que el alumno generalizó pero solo para un valor particular, además para dar respuesta necesitó hacer uso de la configuración puntual, por lo que no generalizó para cualquier número de puntos.

En cuanto a los alumnos, se observa que seis de los ocho estudiantes (A1, A2, A3, A5, A6 y A7) generalizaron ante todas las preguntas que se le plantearon de relación inversa. Mientras que A4 no generalizó para ninguna pregunta de relación inversa.

A continuación mostramos un fragmento de la entrevista a A5, a quien se le plantearon tres preguntas de relación inversa, de las cuales generalizó en las tres ocasiones, en dos lo hizo de forma contextual y en una de forma aritmética.

Entrevistador*: Si yo te doy 21 puntos ¿sabes decirme cuántos minutos han pasado?*
A*: 85*
Entrevistador*: 21 puntos, te doy 21 puntos, un dibujo que tiene 21 puntos*
A*: Espera, 21 puntos… 5*
Entrevistador: *¿Por qué?*
A: *Porque menos uno es 20 entre 4 es 5*
Entrevistador: *Muy bien, vamos te lo voy a dar más difícil, y si te digo 81 puntos*
A*: 20*
Entrevistador: *20, si ¿por qué?*
A: *Porque menos un punto que es el del centro es 80 entre 4 es 20*

En el ejemplo observamos como el estudiante generalizó de forma contextual, encontró el número de minutos para la cantidad de puntos que se le preguntó. Para corroborar que el estudiante generalizó para cualquier número de puntos, el entrevistador volvió a preguntar por otra cantidad cualquiera de puntos, donde confirmó la generalización contextual. Además el estudiante no necesitó de la configuración puntual para dar respuesta a la pregunta, por lo que había encontrado la relación entre los minutos y el número de puntos.

En general en un contexto de relación inversa el grupo de estudiantes generalizó en 17 ocasiones y principalmente de forma factual.

Capítulo 6. Conclusiones

En este último capítulo presentamos las conclusiones a las que hemos llegado tras la realización de nuestra investigación. Estructuramos este capítulo en cuatro partes: (a) logro de objetivos, (b) otros aportes, (c) limitaciones de la investigación y (d) líneas abiertas que deja el estudio.

6.1 Logro de objetivos

El objetivo general de investigación que nos planteamos fue "analizar el proceso de generalización de estudiantes de sexto de Educación Primaria, en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntuales". Este objetivo lo hemos abordado a través de cuatro objetivos específicos establecidos. La información recogida de las entrevistas realizadas a los estudiantes, nos permitió dar respuestas a los objetivos de investigación. A modo general hemos analizado el proceso de generalización que llevó a cabo cada estudiante durante la realización de una tarea que implicaba una relación funcional presentada a través de una configuración puntual. En este análisis hemos descrito las dificultades que presentaron los estudiantes, las intervenciones del entrevistador a través de ciertas acciones cuando observó alguna dificultad en las respuestas de los alumnos y, a continuación de cada intervención, identificamos los efectos en las nuevas respuestas de los estudiantes. Finalmente durante toda la entrevista observamos si los estudiantes lograban generalizar y de qué forma lo hacían.

6.1.1 Primer objetivo específico

Nuestro primer objetivo específico consistió en "identificar las respuestas inadecuadas que presentan los estudiantes en el proceso de generalización". Con base en nuestro marco teórico y el análisis de las entrevistas, hemos identificado cinco tipos de respuestas inadecuadas en las que incurren estos ocho estudiantes al enfrentarse a la tarea que implica una relación funcional presentada con configuraciones puntuales: (a) error de conteo, (b) error de cálculo, (c) respuesta sobre un caso distinto al que se pide, (d) resultado numérico erróneo y (e) error de procedimiento. Estos tipos de respuestas las hemos descrito en el capítulo 4. Para una mejor comprensión de los resultados obtenidos hemos separado los datos en dos grupos, los referidos a respuestas ante preguntas de relación directa y respuestas ante preguntas de relación inversa. Ante preguntas que implicaban una relación directa observamos que los estudiantes incurren principalmente en la respuesta inadecuada del tipo error de procedimiento, lo que deja ver que los estudiantes utilizan un patrón inadecuado en el desarrollo de sus respuestas. Por otro lado ante preguntas que implicaban una relación inversa los estudiantes de igual modo presentaban frecuentemente respuestas inadecuadas del tipo error de procedimiento. Este hecho coincide con uno de los resultados de Santagata (2005), quien señala que en las clases de álgebra el error de mayor presencia es el de procedimiento. Consideramos algunos de los errores que esta autora ha identificado en su estudio, pero además contribuimos con otros (considerados por nosotras como respuestas inadecuadas), los cuales se adaptan a la tarea y contexto utilizado. Cabe destacar que a pesar de que la experiencia de estos estudiantes con respecto a trabajar con tareas que implicaban una relación funcional era escasa, hubo estudiantes que casi no presentaron respuestas inadecuadas en el desarrollo de la tarea. Lo que nos deja ver que alumnos de estos grados son capaces de comprender y desarrollar el pensamiento funcional trabajando con tareas de patrones que impliquen relaciones funcionales.

Relacionado con este objetivo encontramos una nueva información. Identificamos una dificultad en los estudiantes, la de no avanzar, esta la observamos cuando un estudiante se vio perturbado, no comprendía lo que se le estaba pidiendo o simplemente no respondía a lo que se le preguntaba. Consideramos esta dificultad como un factor que obstaculiza el avance en el proceso de generalización. Con recurrencia los estudiantes presentaron esta dificultad durante el desarrollo de la tarea tanto en preguntas de relación directa como inversa. Creemos que esto se puede deber a variados factores, pero uno de ellos podría ser la manera en que se formularon ciertas preguntas. Relacionamos el hallazgo con este objetivo ya que en nuestro marco teórico los errores están vinculados a las dificultades.

6.1.2 Segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico fue "describir las intervenciones del entrevistador ante las respuestas inadecuadas de los estudiantes", el cual consideramos que lo hemos logrado. Apoyados de diferentes autores (Soller, 2001; Santagata, 2005) y la información recogida de los datos, hemos descrito cada intervención realizada a los estudiantes a través de ciertas acciones, las cuales podían requerir alguna acción del estudiante o solo del entrevistador. Describimos nueve tipos de intervenciones que se pueden observan en el capítulo 4. Acciones como volver al caso particular inicial, al caso particular anterior, a un caso particular cualquiera o volver sobre el mismo caso, son intervenciones que requerían que el estudiante manipulara o reflexionara sobre la tarea para dar una respuesta correcta a las preguntas planteadas. Por otro lado acciones tales como verbalizar el argumento o reflexión del estudiante, repetir o reformular la pregunta, dar calma al estudiante o repetir la respuesta del estudiante, correspondían a intervenciones que implicaban solo una acción del entrevistador, las cuales permitían al estudiante avanzar en el desarrollo de la tarea. Por ejemplo, el estudiante, al escuchar su propia reflexión o respuesta mira desde otra perspectiva su forma de proceder o comprender. En ocasiones simplemente reformular la pregunta ayudaba al estudiante a responder, ya que es probable que las palabras utilizadas no fueran de su completa comprensión o la forma en que estas son expresadas hacia el estudiante.

Ante preguntas de relación directa, con mayor frecuencia se intervino a los estudiantes haciendo que estos volvieran a mirar como habían trabajado un caso particular cualquiera distinto del anterior y del inicial, generalmente se les pedía volver a un caso en el cual los estudiantes habían trabajado con mayor seguridad o que habían mostrado comprender. Repetir o reformular la pregunta igualmente fueron acciones de alta frecuencia. Esta información se relaciona con los resultados de la investigación de Santagata (2005) quien menciona que dentro de las estrategias (intervenciones) más utilizadas por el docente se encuentra la "sugerencia para el mismo estudiante" (definida como "refinar la pregunta") en nuestro caso se refiere a reformular la pregunta al estudiante, la cual es utilizada en 6 de 8 estudiantes y en más de una ocasión en alguno de ellos. Ante preguntas de relación inversa las acciones que primaron fueron, hacer que el estudiante volviera a trabajar con el caso inicial, verbalizar el argumento o reflexión del estudiante y repetir la pregunta. Creemos que estas acciones permitieron al estudiante cambiar su estrategia o la forma inadecuada en la que estaba entendiendo el patrón y la relación entre las variables implicadas en la tarea.

En contextos parecidos al de este estudio, los trabajos de Morales y Cañadas (2017) y Ureña, Molina y Ramírez (2017) dan a conocer una serie de intervenciones a los estudiantes para ayudarlos a avanzar en el proceso de generalización. Morales y Cañadas, se refieren a las intervenciones como ayudas al estudiante en el momento que este presenta errores en el desarrollo de una tarea que implica relaciones funcionales. Por otra parte Ureña, Molina y Ramírez se refieren a las intervenciones como estímulos a los estudiantes para que estos avancen en los niveles de generalización. Creemos que estas investigaciones junto con el trabajo que aquí presentamos forman parte de estudios exploratorios en el tema de intervenciones que se puedan realizar a los estudiantes cuando desarrollan tareas que implican relaciones funcionales. Estas intervenciones pueden permitir a los estudiantes comprender la relación existente entre las variables y desarrollar el pensamiento funcional, el cual contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico.

6.1.3 Tercer objetivo específico

En relación al tercer objetivo específico “identificar y describir los efectos que producen las intervenciones del entrevistador en el trabajo de los estudiantes”, lo hemos logrado identificando y describiendo una serie de efectos los cuales fueron observados en análisis previos de los datos. Detectamos seis tipos de efectos, de los cuales tres hacían referencia a lo que ocurría con las respuestas inadecuadas luego de las intervenciones y otros tres hacían referencia a lo ocurrido con la dificultad que presentaban los estudiantes también luego de alguna intervención.

En un contexto de relación directa se evidenció con mayor frecuencia el efecto de reconocer y no corregir la respuesta inadecuada, pero también con alta frecuencia se observó el efecto reconocer y corregir la respuesta inadecuada. En ambos casos observamos que los estudiantes logran reconocer que han entregado una respuesta inadecuada. En ocasiones, los estudiantes reparaban la respuesta inadecuada y avanzaban en el proceso, respondiendo a nuevas preguntas. En el caso de un contexto de relación inversa el efecto de reconocer y no corregir la respuesta inadecuada se evidenció con mayor frecuencia. Si bien hubo estudiantes que además de reconocer lo inadecuado de su respuesta lo corregían, también hubo estudiantes que no lograban reconocer que entregaban una respuesta inadecuada a pesar de las intervenciones, aunque este hecho se observó en pocas ocasiones.

6.1.4 Cuarto objetivo específico

Nuestro último objetivo específico “describir el tipo de generalización que logran los estudiantes”, lo hemos llevado a cabo observando durante el desarrollo de cada una de las entrevistas cómo los estudiantes generalizaban de diferentes formas, tales como: de forma aritmética, factual, contextual y simbólica, en términos de Radford (2010).

Tanto en un contexto de relación directa como inversa los estudiantes generalizaron mayormente de forma factual, lo que nos deja ver que estos alumnos de sexto de

Educación Primaria son capaces de generalizar de forma algebraica, si bien generalizan para algunos casos particulares, comprenden que existe una relación entre las variables. En el caso de nuestra investigación que utilizó las configuraciones puntuales, permitió a los estudiantes comprender la relación entre las variables manipulando la tarea presentada de forma pictórica. Por otra parte, cuatro de los ocho estudiantes fueron capaces de generalizar de forma contextual y dos de ellos lo hacen de forma simbólica, es decir, estos estudiantes no solo comprendieron la relación entre las variables, sino también encontraron una expresión para cualquier valor de las variables.

Considerando que los estudiantes generalizaron habiendo recibido alguna intervención, esto podría reafirmar lo observado por Warren (2006), quien señala que determinadas acciones de los docentes ayudan a los estudiantes a identificar la generalización y a expresarla mediante simbolismo algebraico, además permiten a los estudiantes llevar a cabo una reflexión más adecuada en el proceso de generalización. Consideramos que hay evidencia de pensamiento funcional en este grupo de estudiantes, lo que se podría desarrollar aún más con un trabajo constante en el aula de tareas que impliquen relaciones funcionales. Estos hallazgos confirman una vez más los resultados de investigaciones como las de Blanton y Kaput (2004) quienes muestran que estudiantes de los primeros niveles pueden trabajar y describir situaciones de pensamiento funcional y la relación entre variables.

A partir de lo expuesto, referido al logro de los cuatro objetivos específicos, creemos que el objetivo general de esta investigación “analizar el proceso de generalización de estudiantes de sexto de Educación Primaria, en una tarea que implica una relación funcional con configuraciones puntuales” se ha cumplido. Este estudio muestra una vez más el potencial algebraico que tienen los estudiantes de primaria, quienes logran distintas formas de generalización. Además, considerando que la comprensión de estudiantes respecto a conceptos asociados a las funciones aún no está ampliamente documentada, este estudio contribuye y busca ampliar un poco más la investigación con respecto al pensamiento funcional en estos estudiantes. Asimismo, respalda una vez más la incorporación del pensamiento funcional desde los primeros cursos de primaria en la enseñanza de las matemáticas, ya que contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico. Por otra parte destacamos la intervención del entrevistador, el cual a través de acciones contribuye en el proceso de generalización de los estudiantes. En otros estudios el entrevistador pudiera corresponder al docente a cargo del grupo de estudiantes.

6.2 Otros aportes

Además de los análisis que hemos realizado de forma detallada, los cuales han arrojado los resultados antes mencionados relativos a los objetivos de investigación, nos hemos encontrado con ciertos comportamientos al observar algunas relaciones entre los aspectos que cada objetivo plantea. Por ejemplo, observamos relaciones entre las respuestas inadecuadas de los estudiantes y las intervenciones del entrevistador. Cuando los estudiantes presentaban la respuesta inadecuada error de procedimiento, principalmente se les intervino verbalizando el argumento o reflexión del alumno dicho anteriormente. Cuando se intervenía de esta manera, se evidenció mayormente el efecto de reconocer y no corregir la respuesta inadecuada. Por lo que creemos que para el estudiante fue útil escuchar lo que él mismo había reflexionado para aclarar o ajustar sus ideas y para la comprensión de la tarea, principalmente cuando presentaba dificultades con el procedimiento.

Por otro lado observamos que cuando se intervenía a los estudiantes, estos generalizaban principalmente de forma factual en términos de Radford (2010). Y la intervención que más resaltó tras este tipo de generalización fue recomendar al estudiante volver a un caso particular cualquiera ya trabajado.

Otro aporte que identificamos con nuestro estudio es sobre las configuraciones puntuales utilizadas en la presentación y desarrollo de la tarea. Los estudiantes debían identificar el patrón que seguían las configuraciones puntuales, para ello se les mostró lo que ocurría con los puntos de la configuración cuando transcurrían cero, uno y dos minutos. A continuación ellos debían encontrar el número de puntos para distintas cantidades de minutos y lograr identificar un patrón y expresarlo de manera verbal y/o simbólica (numérica o algebraica). Observamos que los estudiantes no trabajaron únicamente con simbolismo numérico, sino también hicieron uso de la configuración puntual en gran parte del desarrollo de la tarea. De esta manera obtuvieron conjeturas respecto al patrón que seguían los puntos al transcurrir el tiempo. Creemos que el hecho de utilizar el sistema de representación pictórico (configuraciones puntuales) permitió a los estudiantes interactuar con la tarea de mejor forma. Podían combinar el simbolismo numérico con lo pictórico y, en ocasiones, obtener conjeturas adecuadas.

Esto coincide con lo señalado por Castro (1995). La autora muestra en su estudio la efectividad de la enseñanza en el reconocimiento de patrones a través de las configuraciones puntuales. Además, da a conocer cómo esta enseñanza facilita la comprensión de las nociones de estructura de un número, término general, patrones y relaciones numéricas, entre otras.

Por último esta investigación puede ser un útil para el ámbito docente, porque el papel del entrevistador está próximo al del docente en nuestro contexto. Estas intervenciones permiten tener una noción de cómo actuar ante posibles errores en que incurran los alumnos al trabajar con tareas que implican relaciones funcionales.

6.3 Limitaciones de la investigación

Una primera limitación del estudio fue a la extensión permitida para el desarrollo de la investigación. Hemos pensado en otros tipos de análisis con la información recabada, como establecer relaciones entre los aspectos presentados, que dejaremos pendiente para profundizar.

Otra de las limitaciones fue que algunas de las entrevistas se desarrollaron en espacios del centro educativo donde se producía ruido ambiental, lo que dificultó la realización de las transcripciones de algunas de las entrevistas.

Por último, debido a que la entrevista que se llevó a cabo para este estudio fue semiestructurada y, por tanto, dependía de las respuestas de los estudiantes, el número y tipo de preguntas planteadas no fue el mismo. En particular, echamos en falta haber incluido más preguntas sobre la relación inversa para haber podido profundizar más sobre ella.

6.4 Líneas abiertas

Una primera línea abierta que nos arroja esta investigación, es referida a las preguntas sobre relación directa e inversa. En un estudio con una muestra más amplia y un mismo número de preguntas tanto de relación directa como inversa permitiría llevar a cabo una comparación de aspectos tales como los errores de los estudiantes y las intervenciones ante estos errores.

Otra línea abierta que deja este estudio, es considerar las intervenciones que aquí hemos identificado y descrito y aplicarlas en una nueva investigación que se lleve a cabo en un contexto de aula y poder observar sus efectos en el trabajo de los estudiantes.

Por otro lado investigaciones futuras podrían centrarse en establecer relaciones entre los aspectos descritos en cada uno de los objetivos específicos de esta investigación. Por ejemplo, (a) observar frente a que dificultades se realizaron ciertas intervenciones; (b) frente a qué tipo de preguntas los estudiantes presentaron las dificultades; (c) los efectos de acuerdo a los tipos de intervención; o (d) como generalizan los estudiantes de acuerdo a los tipos de intervenciones.

Por último, resultaría interesante observar si los errores, las intervenciones y efectos identificados y descritos en este estudio son o no similares en otros cursos de primaria. Esto permitiría complementar los resultados obtenidos y dar información general sobre los estudiantes de Educación Primaria.

Referencias

Ames, C. y Archer, J. (1988). Achievement goals in the classroom: Students' learning strategies and motivation processes. *Journal of Educational Psychology*, *80*, 260-267.

Billings, E. M., Tiedt, T. L. y Slater, L. H. (2008). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, *14*(5), 302-308.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation/Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, *36*(1), 138-165.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34-63.

Brousseau, G., Davis, R. B. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En B. Cristiansen, A. G. Howson y M. Otte. (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 205-241). Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

Callejo, M. J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Cañadas, M. C. y Castro E. (2004). Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII*. (pp. 173-182). La Coruña, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth, Reino Unido: Heinemann.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM -Mathematics Education*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en the *Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. En J. Kaput. D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: E Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. (Tesis Doctoral). Granada, España: Universidad de Granada.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54,* 55-67.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for function: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp.57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). A tierra la teoría de la investigación: procedimiento, cánones y criterios de evaluación. *Sociología Cualitativa, 13*(1), 3-21.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Durán Ponce, R. (1999). *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras por alumnos de sexto grado de primaria* (Tesis de Maestría). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Duval R. (2004). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Ellis, A. (2007), A Taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Fernández, A. (2016). Errores y dificultades. En Rico, L. y Moreno A. (Coords.), *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Madrid, España: Pirámide.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Gobierno de España (2013). Ley Orgánica para la mejora de la calidad educativa. *BOE, 295*, (97858-97921).

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Gómez, P. y Mora, M. (2016). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD 4.* Documento no publicado (Documentación). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

González, M., Gómez, P. y Restrepo, A. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, *370,* 71-95.

Hartnett, P. y Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and instruction*, *8*(4), 341-374.

Heinze, A. y Reiss, K. (2007). Mistake-handling Activities in the Mathematics Classroom: Effects of an In-service Teacher Training on Students' Performance in Geometry. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 31, pp. 9-16). Seoul, Corea: PME.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5a ed.). México, DF: McGraw-Hill.

Hidalgo, D. y Cañadas, M. C. (2017). Generalización de estudiantes de 6° de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos. Trabajo presentado en grupo de

Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Zaragoza, España.

Horner, R. H., Bellamy, G. T. y Colvin, G. T. (1984). Responding in the presence of nontrained stimuli: Implications of generalization error patterns. *Journal of the Association for Persons with Severe Handicaps, 9*(4), 287-295.

Kaput, J. J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Darmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and science.

Kaput. J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Darmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.

Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En Rico, L. y Moreno A. (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Madrid, España: Pirámide.

McManus, M. y Aiken, R. (1995). Monitoring computer-based problem solving. *Journal of Artificial Intelligence in Education, 6*(4), 307-336.

Martínez, M. y Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 285-298.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y l. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. London: Kluwer Academic Publishers.* (pp. 65-86).

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, (19349-19420).

Ministerio de Educación y Ciencia (2015). Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *BOE, 25, 6986-7003*.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Morales, R. y Cañadas, M. C. (2017). Acciones que ayudan a alumnos de segundo de Educación Primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional. Trabajo presentado en grupo de Pensamiento Numérico y

Algebraico de la SEIEM. En *XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM*. Zaragoza, España.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.

Nicholls, J. G. (1984). Conceptions of ability and achievement motivation. En R. Ames, y C. Ames (Eds.), *Research on motivation in education*: *Student motivation* (Vol. 1, pp. 39-73). New York, NY: Academic Press.

OECD (2016). *Excellence and Equity in Education PISA 2015* results, vol. 1. Paris, Francia: *OECD.*

Owen, A. (1995). In search of the unknouwn: a review of primary algebra. En J. Anghileri (Ed.), *Children's mathematical thinking in the primary years* (pp. 124-148). London, Reino Unido: Cassell.

Pegg, J. y Redden, E. (1990). From number patterns to algebra: The important link. *Australian Mathematics Teacher, 46*(2), 19-22.

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga, España: SEIEM.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM-Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. y Castro, E. (1994). Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico. Documento no publicado (Informe). Granada, España: Universidad de Granada.

Rivera, F. (2006). Sixth Graders' ability to generalize patterns in algebra: issues and insights. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, p. 320). Praga, República Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9(*4), 273-293.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En Gallego, Adriana Patricia (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 760-766). Barranquilla, Colombia: Universidad Distrial.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C. y Solaz-Portoles, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 6*(3), 538-561.

Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 491-508.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. *RDM, Vol. especial*, 107-122.

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S., et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 4, pp. 127-134). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.*)*, *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Socas, Martín (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 12*, 40-62.

Son, J. W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., Knuth, E. J. y Gardiner, A. M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), *34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Kalamazoo (pp. 821-828). MI: Western Michigan University.

Ureña, J., Molina, M. y Ramírez, R. (2017). *Manifestación de niveles de generalización en estudiantes de primaria durante la resolución de una tarea que involucra relaciones funcionales* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). Praga, República Checa: PME.

Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49(*3), 379-402.

Anexo A. Tabla categorías de análisis

A continuación presentamos una tabla en la cual se recogen todas las categorías y valores utilizados para el análisis de los datos de nuestro estudio.

Tabla. *Categorías de análisis*

Categorías	Subcategorías	Valores
Respuestas inadecuadas	R1: error de conteo R2: error de cálculo R3: respuesta sobre un caso distinto al que se pide R4: resultado numérico erróneo R5: error de procedimiento D: no hay avance	
Intervención del entrevistador	Acciones a realizar por el estudiante	I1: volver al caso particular inicial I2: volver al caso particular anterior I3: volver a un caso particular cualquiera I4: volver sobre el mismo caso
	Acciones a realizar por el entrevistador	I5: verbalizar el argumento o la reflexión del estudiante I6: repetir la pregunta I7: reformular la pregunta I8: calmar I9: repetir respuesta y pedir argumento
Efectos de las intervenciones	Efectos de las intervenciones ante una respuesta inadecuada.	E1: reconoce y corrige la respuesta inadecuada E2: reconoce y no corrige la respuesta inadecuada E3: no reconoce la respuesta inadecuada
	Efectos de las intervenciones ante una dificultad.	E4: avanza y da respuesta E5: avanza y no da respuesta E6: no avanza
Tipo de generalización	GA: generalización aritmética GF: generalización factual GC: generalización contextual GS: generalización simbólica	

Anexo B. Transcripción de entrevistas

El siguiente enlace dirige a la transcripción de las entrevistas.

https://www.dropbox.com/sh/i6hecik3b01kq5f/AAAtRzkQm1oXt-iuCo6YP_G6a?dl=0