Propuesta sobre el uso de un software de matemáticas para potenciar el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Informe de avances

Bustos Gutiérrez, Laura – Vásquez De Alba, Jenny Katherine

xlaurita@hotmail.com – jeka_vd@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Se presenta una propuesta enfocada al diseño de situaciones adidácticas, usando un software de geometría dinámica como medio para generar relaciones que den sentido a estrategias de solución de problemas propios del cálculo diferencial. Nos encontramos en la primera fase de ingeniería didáctica: análisis preliminares, revisando estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, para identificar el carácter geométrico de las mismas, las familias de problemas en las cuales adquiere sentido y las demandas cognitivas que imponen a los estudiantes, así como los conocimientos previos necesarios para su comprensión.

Palabras clave: Situaciones adidácticas, geometría, CarMetal, nociones de cálculo.

1. Introducción

En la enseñanza del cálculo diferencial se han evidenciado decisiones metodológicas por parte del profesor que generan dificultades de aprendizaje; una de esas decisiones radica en querer enseñar definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la formalización. Teniendo en cuenta esta situación, se propone un trabajo de profundización que va enfocado al diseño de situaciones adidácticas desde la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986). Se espera que estas situaciones incorporen aspectos de la geometría para la enseñanza de nociones como límite y derivada, las cuales podrán ser utilizadas en la resolución de problemas sin acudir a expresiones o definiciones formales.

Para orientar la propuesta se toma como metodología la ingeniería didáctica abordando las fases de análisis preliminares y concepción y análisis *a priori* de las situaciones adidácticas. Para ello, las situaciones diseñadas serán desarrolladas en un software de geometría dinámica, el cual no se toma como un tipo de motivación sino como una herramienta que permite al estudiante resolver problemas de matemáticas. La pregunta que orienta ésta propuesta es: ¿Cómo utilizar un software de matemáticas para potenciar el aprendizaje de nociones de cálculo a partir de problemas geométricos, sin acudir a la formalización?

2. Marco de referencia

El cálculo diferencial e integral contiene elementos que son necesarios para resolver problemas donde se incorporen ideas como el *"cambio y la variación, la variación instantánea, los procesos infinitos y las situaciones límite"* (Cantoral, 1993. p. 4), lo cual puede ser aplicable en las ciencias y las ingenierías. Por lo tanto es un área importante en el currículo de matemáticas tanto en secundaria como en la universidad.

Entre las reflexiones alrededor de los temas de investigación en la educación matemática, Santos (2007) destaca:

> Aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios (…) durante el proceso de aprender matemáticas, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina. (p. 36).

Los conceptos como función, límite y derivada tienen un origen geométrico y muchos de los procedimientos del cálculo necesitan una interpretación geométrica. Como se evidencia en el estudio de Cantoral (1993) *"los* *problemas que dieron origen al cálculo se pueden encontrar desde la antigüedad clásica en aquellos de cuadratura, curbaturas (...) y las ya famosas paradojas sobre el infinito"* (p. 2). Sin embargo, la fundamentación formal de dichos conceptos y procedimientos se realizó principalmente desde la aritmética y el álgebra. Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (2004) afirman:

> Durante muchos siglos la geometría se constituyó en la base de toda ciencia, pero ante la necesidad de superar los obstáculos de la percepción y de la intuición para dar un fundamento exclusivamente racional a la ciencia, perdió su papel protagónico para cederlo al análisis y el álgebra. (p. 8).

Así mismo Lara (1997) plantea que:

> A pesar de las dificultades inherentes al concepto de límite, la enseñanza del mismo, tradicionalmente se ha realizado dentro de un sistema semiótico de representación algebraico que muy poco o nada ha contribuido a mejorar el entendimiento de la noción de límite. Este método de enseñanza basado en el manejo algebraico de límite, está profundamente enraizado en la mente de quienes tienen la tarea de enseñarlo. (p. 135).

La tendencia a enseñar los conceptos de cálculo desde su definición formal, genera dificultades ya que se pierde la relación de los conceptos con su epistemología. Un claro ejemplo de estas dificultades se ve en la noción de límite: "las dificultades en torno al límite son de muy diferente índole y van desde las dificultades propias de la definición (cuantificadores, notación, múltiples representaciones, entre otras) hasta dificultades relacionadas con el lenguaje del límite (como tendencia o aproximación)" (Claros, 2010, p. 4).

Diversas investigaciones han mostrado evidencias de que el software matemático puede contribuir a mejorar los procesos de comprensión de conceptos matemáticos complejos y el aprendizaje de los mismos. Santos (2007), ha encontrado en sus investigaciones que *"El uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema, que les permitan identificar relaciones matemáticas."* (p. 35).

De igual manera, el Ministerio de Educación de Francia (2011), considera que:

> La utilización de software (…) cambia profundamente la naturaleza de la enseñanza pues favorece la investigación. En particular, al resolver problemas, el uso de software de cálculo formal puede limitar el tiempo consagrado a cálculos técnicos para concentrarse en los razonamientos. (B. O., p. 1).

Una de las dificultades en la enseñanza del cálculo radica en querer enseñar definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la formalización. A raíz de esto se propone un trabajo de profundización que va enfocado al diseño de situaciones adidácticas usando un software de matemáticas como medio para generar relaciones significativas entre el contexto geométrico y el contexto algebraico, relaciones que permitan dar sentido a las estrategias de solución de problemas propias del cálculo diferencial.

3. Aspectos metodológicos

La metodología que se ajusta al diseño de situaciones adidácticas es la ingeniería didáctica dado que es una metodología para el diseño y análisis de secuencias de clase. Cabe aclarar que en esta propuesta, sólo se llevarán a cabo las dos primeras fases de esta metodología: análisis preliminares y concepción y análisis *a priori*, puesto que no se realizará implementación, solo se llevará a cabo el diseño de situaciones adidácticas; ubicando esta ingeniería didáctica en un nivel de *micro-ingeniería* (Artigue, 1995, p. 37).

Fase I: Análisis preliminares

Nos encontramos en esta fase analizando las estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, para identificar el carácter geométrico de las mismas, las familias de problemas en las cuales adquiere sentido y las demandas cognitivas que imponen a los estudiantes, así como los conocimientos previos necesarios para su comprensión. Estos análisis son necesarios para poder identificar cuáles son los prerrequisitos necesarios que deben tener los estudiantes y cuáles son las dificultades que presentan en el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Fase II: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones adidácticas

En esta fase se estudiará el potencial del software CarMetal para actuar como medio productor de aprendizaje y de sentido; es decir, identificar las posibles acciones de los estudiantes y las correspondientes retroacciones del software, las posibles tareas que desencadenen esas acciones y la secuencia de tareas que permitan la construcción de estrategias de solución correspondientes al saber en juego.

4. Desarrollo de la propuesta

Desde la metodología de ingeniería didáctica nos encontramos en la primera fase: *análisis preliminares*, revisando estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, aspectos cognitivos y epistemológicos que permitan determinar cuál es el origen de los conceptos que se van a abordar, conceptos como función, límite, máximos y mínimos; así como el sentido, las dificultades cognitivas para procesar esos conceptos, las características del saber y las dificultades que pueden tener los estudiantes. Estos análisis son indispensables para poder identificar cuáles son los prerrequisitos necesarios que deben tener los estudiantes y cuáles son las dificultades que presentan en el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Para trabajar sobre el aprendizaje de conceptos de cálculo desde la resolución de problemas, se escogen los problemas de optimización ya que son un tipo de problemas que resuelve el cálculo y además un tipo de problemas que tiene aplicaciones prácticas, fáciles de contextualizar en la vida de los estudiantes.

Una primera exploración del problema de la caja permitió identificar estrategias espontáneas de solución como identificar el valor máximo en una tabla o directamente en una gráfica, estrategias que será necesario invalidar (pues no garantizan exactitud) para poder plantear la necesidad del método de la derivada. Prevemos que el uso del software permitirá hacer esta invalidación, mostrando con el zoom que los valores mostrados en la tabla y en la gráfica no son todos los posibles.

Se estudió el método de maximización utilizando la derivada, que consiste en plantear la ecuación de la función, calcular la función derivada, encontrar los ceros de la función derivada y comprobar si en esos puntos la función es máxima. Al pensar en cuestionamientos como: ¿Por qué se debe buscar una ecuación?, ¿Por qué se debe derivar la ecuación?, ¿Por qué se debe igualar a cero?, sentimos que esa manera de proceder es mecánica, dado que se abordó el problema por medio de pasos que sabíamos se debían realizar porque fue lo que aprendimos cuando estudiamos cálculo, pero no fue posible dar una razón que justificara por qué se hace uso de la derivada.

En esta medida, se llevó a cabo una revisión histórica, epistemológica y cognitiva de los métodos de maximización/minimización del cálculo diferencial, para identificar su origen, su sentido y las posibles dificultades de comprensión para los alumnos; dicha revisión se realizó en un primer momento tomando dos libros de texto de cálculo. En ellos se evidencia un método poco descriptivo pero muy metodológico: no se explica cuál es el sentido de ese método, un por qué y para qué de cada paso; por el contrario, se encuentran definiciones formales de la derivada.

Analizando los trabajos de Fermat en torno a problemas de maximización, encontramos que su técnica está basada en el concepto que para calcular la altura de una curva hay que colocar una tangente que sea paralela al eje de las abscisas. Es así como llegamos a identificar que vamos a trabajar en dos problemas diferentes: 1). Lograr que los estudiantes identifiquen que para calcular la altura de una curva es necesario encontrar los puntos donde la tangente es horizontal o paralela al eje de las abscisas. 2) Lograr que el estudiante tome conciencia de que no es posible calcular directamente la pendiente de la tangente a una curva en un punto, y comprenda el uso de funciones como lugares geométricos para hacer ese cálculo (sin utilizar el concepto de límite).

El trabajo realizado en las asesorías colaborativas permite pensar en cuáles son las situaciones que se analizarán cognitiva y epistemológicamente, lo que da paso a la construcción de unas categorías de análisis donde se logre: identificar los pre-requisitos para resolver problemas de cálculo diferencial (calcular la pendiente de una recta, resolver ecuaciones, a partir de un punto y un valor de pendiente, calcular un nuevo punto para trazar una recta, etc.) y pasar a la identificación de las dificultades cognitivas (tomar conciencia de la tangencia y del paralelismo al eje de las abscisas para poder medir de manera indirecta, etc.).

5. Conclusiones

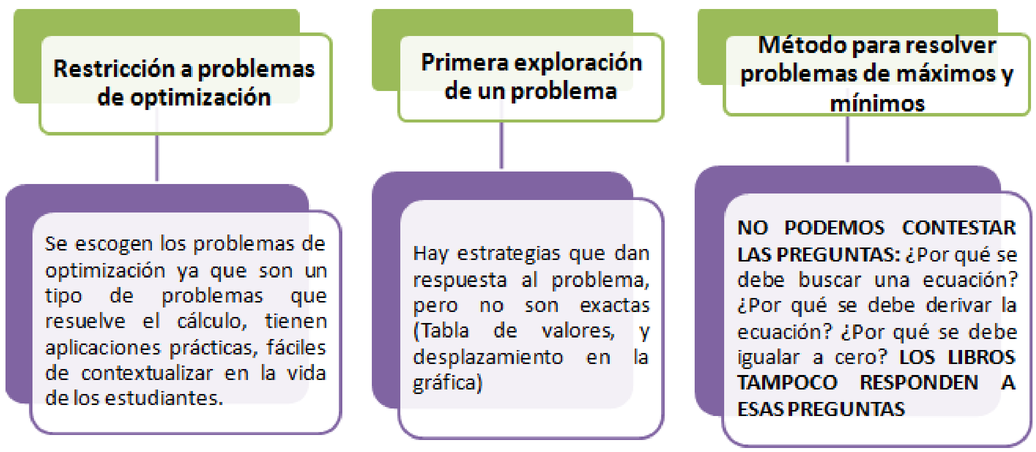

Figura 1. Avances referentes al objeto matemático.

Los avances referentes al objeto matemático que se muestran en la figura 1, permitieron reflexionar acerca de la forma como estamos enseñando ciertos contenidos matemáticos, ya que en varias ocasiones sólo se enseñan métodos y técnicas sin un sentido para el estudiante, y para justificar su enseñanza se empleaba la frase “este tema es necesario para comprender el siguiente tema que se va a ver”.

De esta manera, la forma de concebir la enseñanza ha cambiado en muchos aspectos como producto de esta investigación, uno de ellos al reconocer que no se poseía claridad para dar cuenta del sentido de aplicar un método para encontrar máximos y mínimos. Es en este aspecto donde más se ha tenido que hacer énfasis y aceptar que se debían entender bien los problemas matemáticos para poder enseñarlos a los estudiantes, pensando en cómo deben interactuar con el software, qué ideas pueden tener los estudiantes, qué dificultades van a enfrentar y cómo el docente debe intervenir en esas dificultades.

Referencias bibliográficas

- Acosta, M., Camargo L., Castiblanco, A. & Urquina, H. (2004). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Edición Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. ISBN: 958 – 97413, p. 4 - 7. Bogotá, D.C.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue (ed.) Ingeniería Didáctica En Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (p. 33-60) Cap. 4. Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- B.O. (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de Mathématiques Classe terminale de la série scientifique. Bulletin officiel spécial N° 8 du 13 octobre 2011.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7/2 pp. 33-115.
- Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. Publicaciones Centroamericanas Cinvestav. ISBN 9977-64-769-0. México. Recuperado de: http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf
- Claros, F. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada. España.
- Cuevas, C. & Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. El Cálculo y su Enseñanza. DME-Cinvestav-IPN & IREM de Strasbourg México – Francia. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf
- Howson, G. (ed). (1973). Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge U. Press: Cambridge.
- Lara, C. (1997). La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática, p. 127-132, Sonora. Recuperado de http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/lara/lara.htm
- Santos, L. (2007). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, celebrada en Querétaro, México. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número 8. p. 35-54. Recuperado el 29 de Octubre de 2013 en http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6949/6635