REVISTA EMA
1996, VOL. 1, Nº 2, 83-96

REPRESENTACIONES CONCEPTUALES Y PROCESOS RECURSIVOS

DR. LUIS MORENO Y ANA ISABEL SACRISTÁN

La computadora es una herramienta muy adecuada para que los estudiantes se inicien en las tareas de interrelacionar las representaciones visuales y simbólicas. A continuación presentamos algunas ideas del marco teórico –teoría de las representaciones y una epistemología constructivista– y también de los resultados del trabajo de campo de un proyecto de investigación centrado en la idea de proceso infinito y encaje de una forma en sí misma (idea básica de los fractales y procesos recursivos), como nociones iniciales en la introducción del cálculo para estudiantes de primeros semestres de universidad. Consideramos esto último como una ventana desde la cual se puede intentar "ver" el infinito.

LAS REPRESENTACIONES Y EL CONOCIMIENTO

Para tratar de comprender el mundo de sus experiencias, las personas construyen representaciones. Las representaciones se basan en una función central del sistema cognitivo: la función simbólica. Simbolizar es estar en capacidad para concebir que algo tome el lugar de otra cosa. Podemos representar un objeto mediante un dibujo del mismo, hecho sobre una hoja de papel. Esta forma de representación suele llamarse icónica, es decir, cuando la representación del objeto sólo puede interpretarse como el objeto mismo. Las figuras de la geometría euclidiana, el triángulo, el círculo etc., son ejemplos de este tipo de representación. Como lo representado y su representante se confunden, es muy difícil hacer caso omiso de la figura en un razonamiento geométrico. Esto lo ha experimentado todo estudiante de geometría.

Desde luego, no todas las representaciones son icónicas. Cuando representamos mediante una letra x la variable independiente de una función, estamos utilizando una forma de representación que no es icónica, pues no está predeterminado el significado que daremos a la letra x. También hay representaciones gráficas que no son icónicas, por ejemplo, la gráfica de una función. Estos son ejemplos de representaciones simbólicas.

El conocimiento también se representa de otra forma: mediante las representaciones internas (o mentales) que son las formas que toman las intuiciones y las conceptualizaciones transitorias de un conocimiento que se está construyendo. Las representaciones internas están fuertemente vinculadas con las imágenes conceptuales. Estas representaciones internas difícilmente pueden ser comunicadas o desarrolladas sin un soporte externo (lenguaje, diagramas sobre papel, imagen visual sobre el monitor de la computadora, etc.). Es decir, se necesita el soporte semiótico que suministran las representaciones externas para que el proceso comunicativo, incluido el proceso social de negociación de significados, tenga lugar.

En las matemáticas, como actividad investigativa, es conocido lo difícil que resulta con frecuencia la comunicación de un resultado que el matemático *imagina* (la solución de un problema geométrico, por ejemplo), si no puede disponer de un soporte externo adecuado. Vale la pena mencionar aquí que estos soportes externos van acompañados con frecuencia de metáforas que son usadas como soportes semánticos. Recientemente, se ha puesto de manifiesto el papel de la metáfora como parte del proceso de construcción de los significados que pueden ser asignados a un término. Sfard (1994, p. 48) resalta este hecho cuando nos dice:

> *Para comprender un nuevo concepto debo crear una metáfora adecuada. Una personificación. O una metáfora espacial. Una metáfora estructural. Sólo entonces, estaré en condiciones de responder cuestionamientos y de resolver problemas. Y sólo en ese momento podré realizar algunas manipulaciones del concepto. Unicamente cuando tenga la metáfora. Sin ella, simplemente no podría hacerlo.*

Las representaciones en matemáticas van acompañadas casi siempre de un conjunto de instrucciones para operarlas, lo cual permite generar nuevo conocimiento. Por ejemplo, las representaciones icónicas de objetos físicos a través de figuras geométricas fueron muy importantes para desarrollar el método deductivo en las matemáticas. De hecho, en la medida en que el geómetra comprobaba la validez de sus deducciones en el mundo físico (después de un proceso teórico de deducción), crecía su confianza en el método de operar las representaciones como si ellas fueran los objetos representados. Hay ejemplos muy conocidos, tomados de la geometría elemental, que muestran el elevado grado de confianza que los geómetras tuvieron, desde épocas tempranas, en las deducciones teóricas: el método empleado por Eratóstenes para calcular el radio de la tierra; el método empleado para calcular la distancia de un barco a la costa, y muchos otros. Obsérvese que aquí, no sólo hay representación de los objetos, sino que las acciones sobre los objetos también están representadas, esta vez, mediante las operaciones sobre las representaciones.

La representación de acciones mediante operaciones conduce a la construcción de esquemas de acción y, eventualmente, a estructuras cognitivas. Una estructura cognitiva puede verse como un sistema organizado de representaciones mentales que se relacionan mediante una forma de operarlas. Las operaciones involucradas se generan a partir de las interiorizaciones de acciones sobre los objetos representados. Lo anterior sugiere que lo importante no es tanto la representación mental en sí misma, sino la acción (cognitiva) que se apoya en dicha representación mental. Una de las primeras tesis piagetianas ha sido que *la acción precede al conocimiento.* Podríamos afirmar, entonces, que a nivel cognitivo, la acción a que se refiere Piaget no es una acción “neutra” sino fuertemente condicionada por las formas de representación.

Para las teorías cognitivas se plantea aquí un problema de fondo: establecer la naturaleza de las interacciones entre las representaciones internas y externas. Desde esta perspectiva, podríamos decir que para la comprensión de la actividad cognitiva es necesario que comprendamos los instrumentos semióticos empleados para mediar tales acciones (Wertsch, 1991). La representación decimal de los números es uno de los mejores ejemplos de cómo una representación se convierte en un instrumento de exploración. La fuerza de los algoritmos se explica haciendo explícito que, en ellos, estamos trabajando con representaciones numéricas independientemente de los números representados. La capacidad operatoria permitida por la representación decimal elimina la separación que hay entre la categoría de lo continuo y la categoría de lo discreto: el número expresa lo que de cuantitativo tienen las cosas.

Los estudios realizados hasta ahora permiten afirmar que la generalización, la representación y la abstracción (que incluye a las dos primeras) son mecanismos comunes de construcción del conocimiento (Dreyfus, 1991; Sierpinska, 1994). La toma de conciencia sobre estos asuntos le permitiría a la didáctica tener ideas más claras sobre la naturaleza del pensamiento matemático.

El proceso que nos lleva de un referente conceptual hasta la definición formal de un concepto (Sfard, 1991, p. 3) permite condensar en una entidad, lo que, a nivel de las representaciones transitorias, estaba constituido por una representación y una forma de operar sobre ella. Este proceso de entificación puede ser responsable de la sensación de objetividad (*i.e*. independiente del sujeto cognoscente) que suele acompañar las reflexiones sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos. Digámoslo en términos de Piaget (1958, p. xi-xii): una vez que un concepto ha sido construido, es exteriorizado de tal forma que se le aparece al sujeto como una propiedad del objeto (de estudio), dado por la percepción e independiente de la actividad mental del sujeto. Debido a la tendencia que presentan las actividades mentales a automatizarse y a que sus resultados sean percibidos como exteriores al sujeto, se genera entonces la convicción de que existe una realidad independiente del pensamiento.

ENFOQUE COGNITIVO Y ENTORNO COMPUTACIONAL

Las representaciones visuales nos proporcionan, en general, un punto de vista global sobre la situación representada. Las representaciones analíticas (sentenciales), por su parte, involucran un acercamiento que va de lo global a lo local, vía un proceso de descomposición. Una representación analítica puede ser “recorrida linealmente” de forma similar a como se lee un texto. Un ejemplo de esto es una ecuación algebraica.

La computadora nos permite observar, visualmente, la evolución temporal de un proceso. Entonces, la dinámica y el comportamiento del proceso “a la larga” pueden ser percibidos y analizados, no mediante representaciones estáticas (en el mejor de los casos como una sucesión de representaciones estáticas) sino mediante “figuras que se mueven y se transforman”. Algunos ejemplos son el proceso de iterar la composición de una función consigo misma, las representaciones gráficas de sucesiones, la búsqueda de un punto fijo. Los diagramas de “tela de araña” y el diagrama de Feigenbaum empiezan ya a ser vistos como paradigmáticos de este tipo de situaciones.

Todo esto es de importancia central si nos planteamos la enseñanza del cálculo como la de una disciplina cuyos objetos centrales de estudio son el movimiento y los procesos infinitos (Artigue, 1995). Nos parece que así es como debe presentarse el cálculo en un nuevo currículo. Más adelante daremos ejemplos.

Muchos investigadores (Dreyfus & Eisenberg, 1991; Zimmerman & Cunningham, 1991) han señalado como centrales para la investigación educativa el estudio sobre las interpretaciones de los modelos visuales y la capacidad de traducir en imágenes información que ha sido dada en forma sentencial. Sin embargo, se ha observado que durante el aprendizaje del cálculo, en términos de la enseñanza tradicional, los nexos cognitivos entre las representaciones visuales y sentenciales son un lugar permanente de conflicto. Al parecer predomina una asimilación de carácter exclusivamente algorítmica, pero de una algoritmia “mecánica”. Por ejemplo, hay casos en que pueden observarse ciertas dificultades de los estudiantes para determinar si una gráfica representa la derivada de una función que ha sido presentada simbólicamente. Muchos otros trabajos, los de Dreyfus y Eisenberg (1991, p. 25-37) ilustran tales fenómenos cognitivos. Se ha señalado que la visualización es rara en los cursos de cálculo y, si ocurre, los estudiantes tienen grandes dificultades para establecer vínculos de orden cognitivo entre tales representaciones visuales y las correspondientes representaciones analíticas. Detrás de todo esto se encuentra la importancia que hemos dado al discurso literal. No cabe duda que hay razones para ello. La escritura fue la primera gran ruptura después del lenguaje hablado. Quizás entramos ahora a una época en donde, como lo ha expresado Mandelbrot (1992, p. 4), "el uso de las gráficas por computadora está cambiando el papel del ojo".

El desarrollo de las matemáticas se ha dado sobre muchas circunstancias. La experimentación, la observación y la inducción de resultados han jugado un papel significativo. Los criterios de justificación en cada etapa han estado orgánicamente vinculados a las concepciones sobre las nociones matemáticas involucradas (Piaget y García, 1983). Todo esto nos indica que, previamente al decantamiento de las estructuras sintácticas, los contenidos semánticos contextuales juegan un papel importante en el desarrollo de la operatividad asociada con las concepciones que se vayan generando en una situación de matematización (Sfard, 1991).

Por lo tanto, parece aconsejable en primera instancia el desarrollo de un "pensamiento concreto". Expliquemos esto. Es sabido que la epistemología genética ha suministrado los marcos generales sobre los cuales se han desarrollado las concepciones constructivistas del aprendizaje. Podríamos resumir estas posiciones diciendo que el conocimiento no es recibido por el estudiante de modo pasivo, sino construido activamente por el sujeto cognoscente. Esta tesis sirve como marco orientador cuando se investiga sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En efecto, una consecuencia de ella es la aceptación de que el conocimiento matemático no es un producto externo a los miembros de una sociedad, sino el resultado de su actividad cognitiva. Es decir, no existe una realidad matemática objetiva.

Este cambio de enfoque sobre la naturaleza del conocimiento es responsable de los cambios de estrategia a la hora de la enseñanza y del aprendizaje. En los últimos años, los sicólogos y los partidarios de los enfoques cognitivos han llegado a la conclusión de que el conocimiento es primero que todo conocimiento contextual. El interés creciente en la noción de conocimiento contextual, es decir, del conocimiento tal y como vive y se desarrolla en un contexto, ha llevado a muchos investigadores a estudiar las interacciones de los estudiantes con situaciones específicas, entre ellas, su interacción con las computadoras. Parece razonable suponer que el conocimiento que se produce en un contexto computacional es distinto al que se produce dentro de los contextos tradicionales que se caracterizan por ser más analíticos.

PROCESOS INFINITOS: DESCRIPCIÓN DE UNA EXPERIENCIA

Nuestro esfuerzo de implementación de un estudio sobre procesos infinitos mediante la computadora ha comenzado con el estudio visual de ciertas estructuras recursivas. Las estructuras fractales, por ejemplo, conllevan una estructura recursiva. La posibilidad de dibujar niveles sucesivos de la figura como aproximaciones al verdadero fractal puede ser interpretada como un proceso potencialmente infinito. Es importante entender ésta como una exploración, no sólo de un objeto geométrico ideal que vamos "construyendo" por aproximaciones sucesivas, sino también como una exploración mediante representaciones geométricas de una estructura definida mediante un código analítico. El carácter potencial de la exploración geométrica de los fractales es consustancial al modo de representación empleado. La representación analítica define de una vez el objeto completo.

Estamos tratando de diferenciar propiedades particulares de una forma de representación, es decir, las propiedades del objeto formal. Veamos otro ejemplo. Cuando un número racional se representa mediante la notación decimal, podemos afirmar que tal representación es periódica. La periodicidad es una propiedad de la representación. En cambio, cuando decimos que un número es primo, tal propiedad no se observa de modo claro en la representación decimal de los números naturales. De hecho, no es una propiedad de esa forma de representación. Sin embargo, ¿cómo llegar al concepto de número primo sino mediante las manipulaciones numéricas que se dan a través de la representación decimal? No podemos construir el concepto sin el soporte semiótico que nos suministra la representación decimal. Insistimos en hablar de representación decimal pues ésta ya forma parte de nuestra cultura. La representación decimal es una forma privilegiada de representación.

Las concepciones espontáneas que tienen las personas sobre los procesos infinitos y sobre los objetos matemáticos que de hecho son infinitos generan obstáculos para la apropiación de las versiones formalizadas de éstos. Debe tenerse mucho cuidado en distinguir las estructuras cognitivas de las estructuras formalizadas que están involucradas. Dichas estructuras formales no pueden construirse sino a través de un intenso trabajo a nivel de las estructuras cognitivas espontáneas, porque el infinito no puede ser extraído de una experiencia sensorial. Se necesita algo más: un proceso de abstracción reflexiva.

En una primera etapa de nuestro estudio, hemos tratado de aprovechar la capacidad numérica de la máquina para estudiar las reacciones de los estudiantes y profesores ante el comportamiento de sucesiones y series. El estudio de la serie armónica, por ejemplo, permitió llegar a la conclusión de que el infinito es diferente a "muy grande". Nos parece que esto es un paso significativo en la construcción del concepto de infinito. Esta toma de conciencia se hizo posible por la consideración cuidadosa de las sumas parciales de la serie que es lentamente divergente. Por ejemplo, la suma de los primeros tres millones de términos no logra rebasar al entero 16. En el caso de las sucesiones numéricas, hemos trabajado con calculadoras sencillas para estudiar sucesiones recursivas, tratando de calcular y de predecir su límite. La actividad físico/digital con la calculadora, controlada, desde luego, por una estructura cognitiva, puede ser de ayuda para construir una concepción de procedimiento iterativo: aquí hay una actividad que puede ser interiorizada.

En una segunda etapa del estudio trabajamos con un código escrito en Logo, el lenguaje de la "tortuga"[1]. Esperábamos que nuestros estudiantes pudiesen establecer un nexo entre las representaciones visuales, dinámicas y los códigos analíticos, es decir, las representaciones sentenciales de las situaciones gráficas que aparecerían en pantalla. La primera sesión de trabajo puso en contacto a los estudiantes con situaciones propicias para la construcción, al menos en grado incipiente, de la noción de recurrencia. Se les pidió que escribieran un programa para dibujar una espiral. Previamente, habían trabajado en la construcción de cajas, como parte del periodo instruccional. Pudieron resolver este problema, modificando el siguiente código:

```
TO CAJAS:L
FD:L RT 90
CAJAS:L
END
```

En lugar de la llamada recursiva "CAJAS:L", utilizaron "ESPIRAL:L/2" (el nombre del programa era ESPIRAL:L). Resultó muy interesante la discusión sobre cómo detener la ejecución del programa. ¿Era esto una característica de la recursividad? Decidimos mantener esta pregunta abierta.

Inmediatamente después, decidimos presentar el mismo fenómeno en un contexto simbólico. Para ello les pedimos a los estudiantes que trabajaran con el código:

```
TO LISTA:N
PR:N
LISTA:N+1
END
```

1. En este contexto de Logo, las instrucciones básicas del lenguaje son: FD y RT. Mediante FD: L, "instruimos" a la tortuga para avanzar una distancia de L pasos. Y a través de RT: A, le ordenamos girar un ángulo de A grados a su derecha.

Después de discutir este ejemplo, nos pareció que sería “asimilable” la noción de “condición de parada”. Enseguida centramos las actividades en la exploración de los códigos:

TO LISTA:N	TO NUEVALISTA:N
IF:N=0 [STOP]	IF:N=0 [STOP]
PR:N	NUEVALISTA:N-1
LISTA:N-1	PR:N
END	END

Lo primero que se hizo fue pedirle a los estudiantes que predijeran los resultados de los códigos. Desde luego que hubo sorpresas mayores cuando los resultados no fueron los esperados. Esta actividad tomó una sesión muy larga. Al final, *pareció* que los estudiantes tenían cierta noción sobre cómo funcionaba un procedimiento recursivo. Para explorar este conocimiento que parecía habían construido, propusimos la construcción de un árbol binario. Desde luego, lo dibujamos en el tablero. El reto nuevo era establecer una relación entre la recursividad y la auto-similaridad. Es decir, entre las versiones simbólica y visual de una estructura. Habíamos pedido a los estudiantes que registraran en un diario sus pensamientos sobre todas estas actividades. Es interesante transcribir una selección de sus pensamientos, pues nos muestran un poco cómo se va construyendo, a partir de las actividades cognitivas, la “computadora subjetiva” que todos llevamos dentro. Un estudiante manifestó:

> *Siento que cuando me pongo en contacto con la computadora, mi mente se convierte en un pizarrón sobre el que puedo dibujar... y aunque no puedo tocar un cuadrado, puedo verlo y construirlo* ***aunque sólo sea gráficamente*** *(énfasis nuestro).*

Parece que la computadora puede ayudar a construir una representación interna más estable. En este caso, el estudiante puede, además, transformarla. La posibilidad de operar tanto las representaciones internas como las externas en un contexto interactivo es importante para dar al estudiante esa sensación de concreción necesaria para captar los objetos abstractos. Es precisamente esta posibilidad la que, a juicio nuestro, capacita al estudiante para ir del proceso al objeto, entendiendo objeto en el sentido de entificación que propone Sfard (1991, 1994).

Otro estudiante, por su parte, centró sus comentarios en las dificultades que había percibido durante sus actividades:

> *¿Cómo detener la ejecución del dibujo que realiza un proceso recursivo? ¿Cómo "invertir" la dirección en la que avanza la tortuga para poder dibujar una espiral de adentro hacia afuera?*

Es de notar que en un primer y prolongado momento, los estudiantes no relacionaron la solución de este problema con el código "NuevaLista:N". Cuando se trata de problemas geométricos, parece ser necesario transitar hacia un nivel cognitivo superior: hay que decodificar el resultado geométrico.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN FINAL

Aunque no se pueda decir que esta fase preliminar de nuestro trabajo fue completamente satisfactoria, sí creemos que nos permitió ratificar ciertas hipótesis sobre la naturaleza del trabajo con la computadora. Por ejemplo, al igual que en el trabajo tradicional, debe haber una intervención de parte del profesor. La computadora por sí sola, aunque da al estudiante la posibilidad de explorar modificando los códigos, no suministra un marco con el suficiente grado de estructuración, que sirva de guía al estudiante. Otra conclusión posible es que la máquina puede ser empleada como una interfase para construir una experiencia ausente en el terreno cognitivo del estudiante. Veamos unos ejemplos.

Abstracción y demostración contextuales

En el contexto de la intervención del profesor, hemos explorado una actividad que podríamos llamar "pruebas didácticas". La presencia de la computadora nos obliga a modificar las formas de intervención del profesor. La computadora puede servir para reforzar la estructura de control presente en una estructura cognitiva. Esto es parte importante para la construcción de un puente que va de una estructura cognitiva hasta la conceptualización formalizada de la noción involucrada. Un ejemplo de ello es el ya comentado sobre la toma de conciencia por parte de los estudiantes, de la diferencia entre lo muy grande y el infinito.

Veamos otro ejemplo. Un hecho importante en el proceso de formalización (en el sentido de Weierstrass) del cálculo, lo constituyó el hallazgo de funciones continuas sin derivada. La demostración de este resultado, en el marco del contexto formal del análisis, dista mucho de ser sencilla. La presentación de este tipo de resultados es muy útil para que el estudiante construya una visión integral del dominio de problemas del análisis. ¿Hay alguna forma de discutirlo sin tener que entrar en los mecanismos validatorios del análisis? La respuesta, afortunadamente, es afirmativa. Después de describir su construcción en el pizarrón, puede presentarse el código:

```
TO KOCH:L:N
IF:N=0 [FD:L STOP]
KOCH:L/3:N-1
LT 60
KOCH:L/3:N-1
RT 120
KOCH:L/3:N-1
LT 60
KOCH:L/3:N-1
END
```

Hemos encontrado que es una verdadera recompensa para los estudiantes, para su comprensión del problema, el que intenten dibujar al menos los primeros niveles de la curva de Koch. Es, además, un buen ejemplo para relacionar la estructura recursiva con la auto-similaridad de la curva. Al final no habremos presentado una prueba en el sentido clásico, pero sí una prueba sobre el modelo discreto constituido por la pantalla de la computadora. El código es independiente del sustrato, discreto o continuo, sobre el cual puede llevarse a cabo el proceso de dibujar la curva. De allí que la prueba sobre el modelo discreto sirva. Y esto es lo más relevante, desde nuestro punto de vista, como una prueba didáctica, es decir, como un argumento que impulsa la construcción del contenido semántico del teorema. Inclusive, podemos encontrar la siguiente versión formal de la actividad desarrollada con el procedimiento computacional: dada una pantalla con cualquier resolución, podemos hallar un nivel (estrato) de graficación tal que llene la pantalla. Y aún más, ubicados en el terreno computacional, podemos afirmar que como no es posible invalidar la afirmación anterior, el resultado es válido en el contexto tecnológico donde estamos trabajando. La discusión anterior sobre la validez de un "teorema contextual" y la noción de demostración didáctica se debe entender desde un enfoque que concibe la matemática, no como una disciplina que tiene una normatividad propia y que no estamos cuestionando, sino como objeto de una concepción didáctica. En otras palabras, no estamos cuestionando la matemática en sí, sino buscando alternativas válidas a la adopción mecánica de la reproducción de los criterios matemáticos, como criterios de enseñanza y aprendizaje.

Heurística y representaciones ejecutables

Hasta ahora hemos enfatizado el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento. La naturaleza de la interacción entre las representaciones de carácter sentencial y de carácter visual es uno de los problemas básicos que, a nuestro juicio, debe explorarse dentro de los estudios que tiendan a incorporar la computadora a la educación matemática. La interacción entre el código analítico y el resultado visual es particularmente interesante en el caso de los fractales debido a la presencia de la estructura recursiva. Como ya hemos observado, las estructuras recursivas son un centro nervioso donde se dan cita diferentes versiones del infinito. En el estudio sobre la curva de Koch, por ejemplo, se pidió a los estudiantes que calcularan la longitud de la curva. Cuando se dieron cuenta de que el perímetro iba creciendo de manera no acotada, llegaron a la conclusión de que el área encerrada por la figura debería crecer también sin cota. Resultó un verdadero conflicto cognitivo el tener que aceptar la existencia simultánea de un área finita encerrada por una curva cuyo perímetro era infinito. Debe notarse, empero, que el cálculo del perímetro resultó sencillo para los estudiantes. Lo que resulta conflictivo es la confrontación de las implicaciones de este hecho con su conocimiento de ese momento. En términos piagetianos, estamos ante un desequilibrio de una estructura cognitiva y ante la necesidad de desencadenar un proceso de asimilación de la nueva información a dicha estructura. El resultado será una estructura cognitiva más equilibrada.

En el caso de las actividades con las espirales, utilizamos el código:

```
TO ESPIRAL:L
FD:L RT 90
ESPIRAL:L/2
END
```

Desde luego, la presencia de una condición para detener el proceso una vez que la longitud que avanza la tortuga sea menor que cierto número, da al proceso una “condición de finitud”, lo que no ocurre con la curva de Koch. Aun en el caso en que los brazos de la espiral corresponden a los recíprocos de los números naturales, la situación geométrica tiene tanta intensidad que los estudiantes concluyen que la longitud total de la espiral es finita. Tratando de minimizar esta “obstrucción sensorial” decidimos, antes de ejecutar el código ESPIRAL en sus diversas variantes (cambiando las fórmulas que controlan las longitudes de los brazos), aplicar la primitiva PU para levantar la tortuga de la pantalla. A pesar de que la tortuga no dibuja, los estudiantes perciben sus movimientos. Esto los obliga a recrear la imagen visual en su imaginación, y así se abre la posibilidad de concebir la espiral como el resultado de la ejecución de un proceso infinito.

Lahra, una estudiante con poca formación matemática, se involucró en una actividad exploratoria prolongada para tratar de comprender los mecanismos del procedimiento. Primero pensó que la figura resultante era una especie de "círculo quebrado"; luego pensó que era un rombo. Una intensa actividad le permitió llegar a la conclusión de que la tortuga estaba dibujando una espiral. Es razonable suponer que esto lo consiguió después de establecer una forma de correspondencia entre el código simbólico y las imágenes visuales que generó en su imaginación. Esta actividad sugiere, además, aprovechar las ventajas que ofrece la dinámica de la graficación mediante la computadora. Esta dinámica muestra la "secuenciación" del proceso de graficación, por oposición al carácter estático que tienen los dibujos que ilustran los textos, por ejemplo. El proceso constructivo de la figura nos permite acceder a la estructura de la figura y en consecuencia obtener control (cognitivo) sobre ella. Tal control puede estar en la raíz de la aceptación de la coexistencia de área finita y perímetro infinito en el caso presentado de la curva de Koch. Algo análogo ocurre con las espirales de longitud total finita (las de brazos controlados por una fórmula como $L/2^n$, por ejemplo).

No debemos perder de vista, empero, que el razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes en estas situaciones está fuertemente influenciado por el contexto. Siguiendo a Hoyles y Noss (1993, p. 84), diríamos que estamos en presencia de abstracciones contextuales (*situated abstractions*). Es decir, los estudiantes generan y articulan relaciones matemáticas que son generales dentro del contexto computacional en el que se encuentran trabajando. Aunque esto constituye un paso adelante en el proceso de formalización, una abstracción contextual está mediada por la tecnología y el lenguaje asociado. Lo que resulta relevante para nosotros, desde el punto de vista educativo, es que el estudiante que construye una abstracción contextual posiblemente no tiene acceso a la semántica (y a la sintaxis) del lenguaje oficial de la matemática. Por ejemplo, Lahra ve, a partir de que el proceso de dibujar la espiral es "perpetuo", la imposibilidad de que la suma de los brazos de la espiral alcance el límite (en un ejemplo real el límite era 2). Llega a decir, por otra parte, que el valor que alcanza la suma de las longitudes es un uno "seguido de muchos nueves". En este momento se le preguntó:

P: ¿Cuántos nueves necesitas para que sea dos?, ¿para que llegue a dos?
L: ¡Uy!, como mil...
P: ¿Mil?
L: No, muchísimos.

P: ¿Cuántos?
L: Hasta que todos sean nueves.
P: ¿Hasta el infinito?
L: Sí... ah... ¡no!, entonces no llega a dos.
P: ¿No llega a dos?
L: No.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. MAA Notes, 19.

Hoyles, C. & Noss, R. (1993). Out of the cul-de-sac. En J. Becker & B. Pence (Eds.). *Proceedings of the 15th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Pacific Grove: San Jose State University.

Mandelbrot, B. (1992). Fractals and the rebirth of experimental mathematics. En H.O. Peitgen, H. Jurgens & D. Saupe. *Fractals for the Classroom*. New York: Springer-Verlag and NCTM.

Piaget, J. (1958). *Six Psychological Studies*. New York: Vintage Books.

Piaget, J. y García, R. (1983). *Sicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*,14 (1).

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.

Tall, D. (1991) (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediated Action*. London: Harvester.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. MAA Notes, 19.

Dr. Luis Moreno
Ana Isabel Sacristán
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
Dakota 379, C.P. 03810, Col. Nápoles
México, D.F., México
E-mail: lmorenoa@mailer.main.conacyt.mx